Problèmes numériques dans l'enseignement

Ecouter un exposé de J.L. Ovaert est toujours enrichissant. Spécialiste d'analyse, passionné d'histoire des mathématiques, tout ce qu'il dit est argumenté et il sait séparer en quelques mots simples les idées forces qui font date dans la pensée mathématique.

Dans le cadre du séminaire sur le fondement des sciences, il a donné une conférence sur : "le rôle des problèmes numériques dans les concepts d'analyse au XVIII è siècle", conférence dont on trouvera l'essentiel dans l'article : CALCUL NUMERIQUE (histoire du), dans le supplément qui vient de paraître de l'Encyclopaedia Universalis. (On pourra également consulter : Golstine : "A history of numerical analysis" chez Springer).

J.L. Ovaert a bien voulu, profitant de son passage à Strasbourg, présenter à la régionale A.P.M. un sujet voisin où l'accent à davantage été mis sur l'aspect pédagogique. On trouvera ci-après les principales idées qu'il a dégagé à cette occasion.

J. Lefort

* *

*

On ne peut pas dire que les activités numériques fassent actuellement partie de la formation des professeurs. Peut-être peut-on parler d'activités numériques dans certains DEUG par l'intermédiaire de l'initiation à l'informatique, mais cela reste trop coupé du reste du cursus universitaire.

Dans les établissements scolaires, c'est encore pire : Si dans les programmes de terminale on parle d'intégrale de Riemann, on ne dit rien de leur calcul approché et si on en parle, aucune activité n'est prévue à ce sujet. Cette situation est encore aggravée dans les manuels où l'on cite le théorème des valeurs intermédiaires sans songer à l'appliquer à la résolution des équations numériques sauf quelques rares fois en exercice à la fin d'un chapitre.

Et pourtant, il ne faut pas oublier qu'historiquement, les problèmes numériques sont intimement liés aux concepts mathématiques et il est curieux de remarquer que l'accès aux calculatrices et aux ordinateurs a donné un regain d'intérêt à ces problèmes. On ne peut plus fermer les yeux devant la multiplication des calculatrices entre les mains des élèves. La question est alors de savoir quel apport ces machines peuvent avoir dans l'enseignement et plus précisément : Comment intégrer les problèmes numériques dans l'enseignement de l'analyse ?

On peut situer grossièrement le début de l'analyse en première dans le cursus scolaire. Mais on l'aborde alors par la continuité, les limites, puis les dérivées avec des ε-η-raisonnements qui rebutent les élèves. On ne s'intéresse finalement qu'à des propriétés qualitatives en négligeant complètement les propriétés quantitatives liées aux ordres de grandeur, à la rapidité de convergence d'une suite...

Il faut penser en termes de problèmes mathématiques, car c'est en se frottant à la résolution de tels problèmes à différents niveaux qu'on trouve le moyen d'approfondir les concepts mathématiques.

Voici donc quelques problèmes intervenant dans le second degré.

1º) Approximations et représentation des nombres réels :

On peut avoir différente représentation initiales, comme :

$$\operatorname{Log} 2 = \int_1^2 (1/x)dx$$

$$= 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$$

mais pour le calcul, on se ramène toujours à une suite finie. C'est là qu'intervient la notion de rapidité de calcul pour une précision donnée. Le problème - et donc l'approche pédagogique - est plus délicat quand on se trouve face à une suite dont on ne connait pas a priori le devenir comme : $\lim_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$

2º) Recherche de solutions des équations numériques :

C'est le problème de la recherche d'un point fixe, de la stabilité de ce point, et de la performance du processus qui conduit à son calcul.

Cette notion de performance est délicate car elle englobe, bien sûr, la notion de rapidité de convergence qui est en gros le nombre d'itérations qu'il faut faire pour gagner une décimale :

exemples : 1) Une suite géométrique en $1/2^n$ nécessite environ 3 pas (ou itérations) pour le gain d'une décimale (3 $1/\ln 2$).

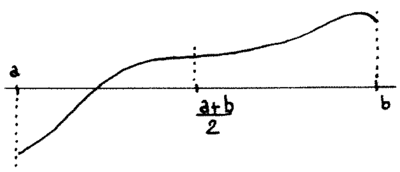
2) Si on a une suite en $1/10^{2^n}$ comme cela arrive dans le processus de Newton, on double le nombre de décimale à chaque pas.

3) Au contraire, si la suite est en $1/n^2$ la convergence est très lente.

mais cette notion de rapidité de convergence n'est pas suffisante pour apprécier la performance d'un processus. Il se peut que le calcul d'une itération soit tellement compliqué qu'on a plus vite fait à utiliser un processus à convergence un peu plus lente mais à calculs beaucoup plus simples. Ce qui compte finalement, c'est le temps de calcul pour un matériel donné (calculatrice, ordinateur,...).

exemples : 1) On connait le procédé de dichotomie pour la résolution de

$f(x) = 0$



On pourrait imaginer le procédé de "décachotomie" qui permettrait un gain d'une décimale à chaque étape. Mais il nécessite 9 opérations au lieu d'une pour la dichotomie et c'est donc ce dernier processus que l'on préfèrera malgrè la moindre rapidité de sa convergence.

2) Nous avons dit que la méthode de Newton donne une convergence en 10^{-2^n}. Il existe un algorithme en 10^{-3^n} mais qui est beaucoup trop compliqué et qui n'entraîne pas de gain voire même, entraîne une perte de temps.

3º) Valeur approchée d'une fonction en un point :

Un problème que se posé très souvent tout utilisateur de calculatrice, c'est de savoir comment sont calculées les fonctions élémentaires (fonctions trigonométriques, exponentielles,...). Certains pensent à tort aux développements en séries entières. En pratique, la méthode est très compliquée et repose sur les travaux de Padé (au XVIII è siècle) et de Tchebycheff : interpollation par des polynômes et des fractions rationnelles. Devant les difficultés théoriques qui sont ainsi soulevées, il vaut mieux montrer aux élèves comment fait à peu près la machine :

- Trouver des exemples de suites convergentes qui divergent sur la machine et inversement.
- Expliquer l'influence des erreurs d'arrondi.

exemples : 1) $\begin{cases} u_{n+1} = \sin u_n \\ u_0 = 1 \text{ rd} \end{cases}$

On démontre, mais cela est très difficile, que cette suite converge vers 0 en $1/\sqrt{n}$. On peut cependant accéder à ce dernier résultat expérimentalement. Par ailleurs, la machine va converger vers 10^{-4}, tout simplement parceque $\sin x - x \quad x^3/6$ et que pour $x \quad 10^{-4}$, $x^3/6 \quad 10^{-12}$ n'apparaît plus dans la calculatrice.

2) Il y a un phénomène analogue dans les tables numériques.

Tout cela montre bien l'intérêt, dans l'enseignement, d'avoir des inégalités plutôt que des $o(x^2)$ ....

4º) Calculs asymptotiques :

Juste pour mémoire ; il en est fait très peu usage dans l'enseignement secondaire en dehors de la formule de Stirling et des suites de Fibonnacci.

5º) Interpolation et extrapolation :

C'est l'exemple classique de la fabrication des tables trigonométriques. On sait calculer sin 60º, sin 72º, donc sin 12º puis sin6º et enfin sin 3º . Le problème s'est posé de calculer sin 1º dès l'époque des grecs avec Ptolémée ; (d'où le problème ultérieur de la trisection de l'angle).

- Dans l'Almageste, Ptolémée le résoud de la façon suivante : Calcul de sin 1,5º et sin 0,75º et interpolation linéaire entre ces deux valeurs ce qui fournit sin 1º à 10^{-6} près.

- Les progrès de l'astronomie ont amené les mathématiciens arabes à améliorer cette précision. Vers 1400, Alkachi, astronome à l'observatoire de Samarcande, part de la relation $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Connaissant sin 3º, il en déduit sin 1º en résolvant par approximation successives l'équation :

$$(1/3)(\sin 3º + 4y^3) = y$$

en partant de $u_1 = (1/3)\sin 3º$ et de $u_{n+1} = (1/3)(\sin 3º + 4u_n^3)$

Il suffit de trois itérations pour arriver à 10 décimales exactes.

D'un point de vue pédagogique, la théorie est loin d'être captivante pour les élèves et elle ne se fera que sur des exemples bien choisis où on peut montrer les raisons de la rapidité de convergence et les procédés qui permettent d'accélérer cette convergence.

* *

*

Les quelques exemples qui viennent d'être donnés sont magnifiquement illustrés d'un point de vue pédagogique par un texte d'Euler de 1748 : "Introduction à l'analyse des infiniments petits" chapitre XVI : De la résolution des équations par approximations. Ce texte (dans une réédition du XIX ème siècle) doit être mis entre les mains des élèves. Il ne présente aucune difficulté de lecture en dehors des notations : 4 1/2 pour 4 + 1/2 et xx pour x^2. On trouvera ci-après une copie de ce texte.

J.L. Ovaert

CHAPITRE XVI.

De la réſolution des Equations par des approximations.

784.

LORSQUE les racines d'une équation ne ſont pas rationnelles, ſoit qu'on puiſſe les exprimer par des quantités radicales, ſoit qu'on n'ait pas même cette reſſource, comme c'eſt le cas pour les équations qui paſſent le quatrieme degré, on eſt obligé de

V v 3

ſe contenter de déterminer leurs valeurs par des approximations, c'eſt-à-dire par des voies qui font qu'on approche toujours davantage de la vraie valeur, juſqu'à ce que l'erreur puiſſe être cenſée nulle. On a propoſé différentes méthodes de cette eſpece, nous allons détailler les principales.

785.

Le premier moyen dont nous parlerons, ſuppoſe qu'on ait déjà déterminé aſſez exactement la valeur d'une racine (*); qu'on ſache, par exemple, qu'une telle valeur ſurpaſſe 4, & qu'elle eſt plus petite que 5. Dans ce cas, ſi l'on ſuppoſe cette valeur $= 4 + p$, on eſt sûr que p exprime une fraction. Or ſi p eſt une fraction, & par conſéquent moindre que l'unité, le quarré

(*) Cette méthode eſt celle que *Newton* a donnée au commencement de ſa *méthode des fluxions*. En l'approfondiſſant on la trouve ſujette à différentes imperfections; c'eſt pourquoi on y ſubſtituera avec avantage la méthode que M. *de la Grange* a donnée dans les Mémoires de Berlin, pour les années 1767 et 1768.

de p, ſon cube, & en général toutes les puiſſances plus hautes de p, ſeront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, & cela fait que, puiſqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul. Quand on aura donc déterminé à peu près la fraction p, on connoîtra déjà plus exactement la racine $4 + p$; on partira de là pour déterminer une nouvelle valeur encore plus exacte, & on continuera de la même maniere, juſqu'à ce qu'on ait approché de la vérité autant qu'on le ſouhaitoit.

786.

Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $xx = 20$.

On voit ici que x eſt plus grand que 4 & plus petit que 5; en conſéquence de cela on fera $x = 4 + p$, & on aura $xx = 16 + 8p + pp = 20$; mais comme pp eſt très-petit, on négligera ce terme pour avoir ſeulement l'équation $16+8p=20$, ou $8p=4$; elle donne $p=\frac{1}{2}$ & $x=4\frac{1}{2}$, ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. Si donc on ſuppoſe à préſent $x=4\frac{1}{2}+p$; on eſt ſûr que p ſignifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, & qu'on pourra négliger pp à bien plus forte raiſon. On aura donc $xx=20\frac{1}{4}+9p=20$, ou $9p=-\frac{1}{4}$, & par conſéquent $p=-\frac{1}{36}$; donc $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$.

Que ſi l'on vouloit approcher encore davantage de la vraie valeur, on feroit $x=4\frac{17}{36}+p$, & on auroit $xx=20\frac{1}{1296}+8\frac{34}{36}p=20$; ainſi $8\frac{34}{36}p=-\frac{1}{1296}$, $322p=-\frac{36}{1296}=-\frac{1}{36}$, & $p=-\frac{1}{36\cdot 322}=-\frac{1}{11592}$. Donc $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{4473}{11592}$, valeur qui approche ſi fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle.

787.

Généraliſons ce que nous venons d'expoſer, en ſuppoſant que l'équation donnée ſoit $xx=a$, & qu'on ſache d'avance que x eſt plus grand que n, mais plus petit que $n+1$. Si après cela nous ſuppoſons $x=n+p$, en ſorte que p doive être une fraction, & que pp puiſſe ſe négliger comme une quantité très-petite, nous aurons $xx=nn+2np=a$; ainſi $2np=a-nn$, & $p=\frac{a-nn}{2n}$; par conſéquent $x=n+\frac{a-nn}{2n}=\frac{nn+a}{2n}$. Or ſi n approchoit déjà de la vraie valeur, cette nouvelle valeur $\frac{nn+a}{2n}$ en approchera encore beaucoup plus. Ainſi en la ſubſtituant à n, on ſe trouvera encore plus près de la vérité; on aura une nouvelle valeur qu'on pourra ſubſtituer de nouveau, afin d'approcher encore davantage; & on pourra continuer le même procédé auſſi loin qu'on voudra.

Soit, par exemple, $a=2$, c'eſt-à-dire qu'on demande la racine quarrée de 2; ſi

N.D.L.R : il faut lire $4\frac{5473}{11592}$ comme ultime valeur approchée de $\sqrt{20}$.

on connoît déjà une valeur assez approchante, & qu'on l'exprime par n, on aura une valeur de la racine encore plus approchante, exprimée par $\frac{nn+2}{2n}$. Soit donc

I.) $n = 1$, on aura $x = \frac{3}{2}$,

II.) $n = \frac{3}{2}$, on aura $x = \frac{17}{12}$,

III.) $n = \frac{17}{12}$, on aura $x = \frac{577}{408}$;

& cette derniere valeur approche si fort de $\sqrt{2}$, que son quarré $\frac{332929}{166464}$ ne differe du nombre 2 que de la petite quantité $\frac{1}{166464}$, dont il le surpasse.

788.

On pourra procéder de la même maniere, quand il s'agira de trouver par approximation des racines cubiques, quarré-quarrées, &c.

Soit donnée l'équation du troisieme degré, $x^3 = a$, & qu'on se propose de trouver la valeur de $\sqrt[3]{a}$. On supposera, sachant qu'elle est à peu près n, que $x = n + p$; on aura, en omettant pp & p^3, $x^3 = n^3 + 3nnp = a$; ainsi $3nnp = a - n^3$, & $p = \frac{a - n^3}{3nn}$; donc $x = \frac{2n^3 + a}{3nn}$. Si donc n est de fort près $= \sqrt[3]{a}$, la formule que l'on vient de trouver en approchera encore beaucoup plus. Mais pour une précision encore plus grande, on pourra la substituer à son tour à la place de n, & ainsi de suite.

Soit par exemple $x^3 = 2$, & qu'on veuille déterminer $\sqrt[3]{2}$. Si n approche de près le nombre cherché, la formule $\frac{2n^3 + 2}{3nn}$ exprimera ce nombre encore de plus près; qu'on fasse donc

I.) $n = 1$, on aura $x = \frac{4}{3}$,

II.) $n = \frac{4}{3}$, on aura $x = \frac{91}{72}$,

III.) $n = \frac{91}{72}$, on aura $x = \frac{162130896}{128634294}$.

789.

On emploie cette méthode avec le même succès, pour trouver par approximation les racines de toutes les équations.

Suppofons, pour le faire voir, qu'on ait l'équation générale du troifieme degré, $x^3 + axx + bx + c = 0$, où n approche déjà beaucoup d'une des racines. Faifons $x = n - p$; &, puifque p fera une fraction, négligeant les puiffances de cette lettre plus hautes que le premier degré, nous aurons $xx = nn - 2np$, & $x^3 = n^3 - 3npp$, d'où réfulte l'équation $n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0$, ou $n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp = (3nn + 2an + b)p$; ainfi $p = \frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}$, & $x = n - \left(\frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}\right) = \frac{2n^3 + ann - c}{3nn + 2an + b}$. Cette valeur, qui eft déjà plus exacte que la premiere, étant fubftituée à la place de n, en fournira une nouvelle encore plus exacte.

790.

Soit, pour appliquer ce procédé à un exemple, $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, où

$a = 2$, $b = 3$ & $c = -50$. Si n eft cenfé approcher de près une des racines, $x = \frac{2n^3 + 2nn + 50}{3nn + 4n + 3}$, fera une valeur encore plus proche de la vraie. Or la valeur $x = 3$ n'étant pas éloignée de la véritable, nous fuppoferons $n = 3$, & nous trouvons $x = \frac{62}{21}$. Que fi nous écrivions cette nouvelle valeur à la place de n, nous en trouverions une autre encore plus exacte.

791.

Nous ne donnerons pour les équations des degrés fupérieurs au troifieme, que l'exemple fuivant :

Soit $x^5 = 6x + 10$, ou $x^5 - 6x - 10 = 0$, où on remarque facilement que 1 eft trop petit, & que 2 eft trop grand. Or, fi $x = n$ eft une valeur affez proche de la vraie, & qu'on faffe $x = n + p$, on aura $x^5 = n^5 + 5n^4p$, & par conféquent $n^5 + 5n^4p = 6n + 6p + 10$, ou $5n^4p - 6p = 6n + 10 - n^5$. Donc $p = \frac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}$

& $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$. Qu'on ſuppoſe $n = 1$, on aura $x = \frac{14}{-1} = -14$; cette valeur eſt tout-à-fait impropre, & cela vient de ce que la valeur approchée de n étoit de beaucoup trop petite. On fera donc $n = 2$, & on aura $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, valeur qui s'écarte beaucoup moins de la vraie. Si on ſe donnoit la peine de ſubſtituer maintenant, au lieu de n, la fraction $\frac{69}{37}$, on parviendroit à une valeur encore bien plus exacte de la racine x.