

Provoquer la curiosité

(extrait d'une lettre de Gérard BOHLER - Lycée J.J. Henner, Altkirch)

"Je précise tout de suite que je ne procède pas en classe à des "séances dirigées d'heuristique" mais que je soumetts régulièrement ce genre de sujet à une longue réflexion, en dehors des heures de cours. Mon but est de donner aux élèves de seconde C le goût de la recherche et de l'initiative, par le travail personnel, seul ou en groupe. Tout en donnant une très large priorité au programme :

- je leur propose des sujets de réflexion (style rallye) sur une période d'environ un mois. Les élèves me font part de leurs idées et solutions éventuelles, au fur et à mesure qu'ils en ont à proposer. Puis avant de leur proposer d'autres sujets de ce genre, je fais un rapide bilan parfois accompagné d'une tentative d'analyse détaillée tenant compte de leur démarche.

- indépendamment de cela, ils ont la possibilité de rédiger n'importe quel exercice choisi dans un manuel et portant ou non sur la partie du programme traitée (ils peuvent aussi demander des conseils sur le choix de ces exercices), en plus de l'habituel devoir à la maison ou en classe. Chacun peut donc faire autant d'exercices suivant son rythme ou sa disponibilité qu'il le veut.

- j'essaie de satisfaire les curiosités suscitées par certaines questions du programme en leur donnant des documents à étudier personnellement sur d'autres parties des Mathématiques, pas forcément au programme. Quelques bons élèves commencent à étudier des variations de fonctions, à manipuler les nombres complexes, mais toujours en donnant priorité absolue au programme en cours.

Ainsi la proposition de ce genre de sujet s'inscrit dans le cadre d'un objectif plus large: apprendre à réfléchir sur

un sujet, même si cela prend beaucoup de temps, et avoir le goût de l'initiative et du travail personnel (ou en groupe) et ne pas se contenter uniquement du cours tel qu'il est fait et des exercices traités en classe (bien que toujours - et c'est clair depuis le début - la priorité est donnée aux cours, aux préparations, aux devoirs imposés et au programme étudié).

Beaucoup - et de plus en plus - sont intéressés par cette formule. Les plus faibles rattrappent leurs lacunes de calcul algébrique en travaillant ensemble des exercices appropriés, les autres font des exercices plus en rapport avec leur niveau. Je ramasse à chaque heure de plus en plus d'exercices que je n'avais pas imposés et qui sont le fruit de l'initiative des élèves, malgré le rythme imposé de 2 devoirs en 3 semaines. Pour les sujets de réflexion (genre du document qui vous est parvenu), je recueille les avis d'environ un bon tiers de la classe qui a vraiment cherché et 3 à 7 élèves vont jusqu'à trouver une bonne solution, cette proportion étant variable suivant les sujets."

Voici maintenant un extrait d'un "corrigé" que Gérard BOHLER distribue à ses élèves.

Un rectangle dont les côtés mesurent respectivement m et n unités de longueur (m et n entiers) est subdivisé en carrés de côté unité. Quel est le nombre de ces carrés traversés par la diagonale ?

1. Remarques sur la formulation de l'énoncé

a) "la diagonale" : L'énoncé dit : "la diagonale". Or il y a deux diagonales. Mais, pour des raisons de symétrie évidentes, les deux diagonales traversent le même nombre de petits carrés.

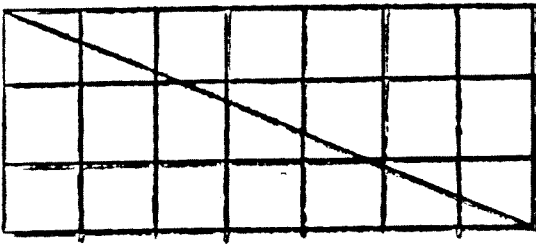
De même que : "la diagonale" d'un rectangle dont les côtés mesurent respectivement m et n unités traverse autant de petits carrés que "celle" d'un rectangle dont les côtés mesurent respectivement n et m unités. Ainsi, m et n devront jouer le

même rôle dans ce problème, et le résultat sera donc symétrique en m et en n .

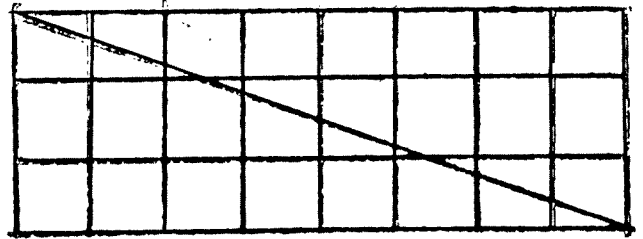
- b) ce qu'on cherche : Par ailleurs, on dit bien "le nombre de ces carrés" et non le nombre des carrés, il s'agit des carrés de côté unité de la subdivision, et non de tous les carrés qu'on peut former sur la figure.

Mais il faudra encore préciser le mot "traversés"
Il s'agit de carrés tels que la diagonale passse à l'intérieur et ne se contente pas de passer par un sommet.

2. Etude de quelques exemples



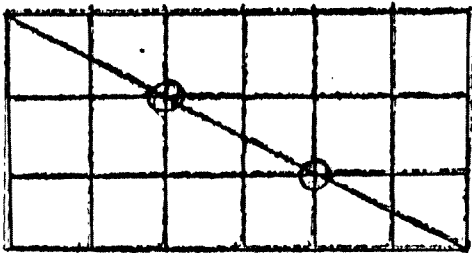
$$\left. \begin{array}{l} m = 8 \\ m = 3 \end{array} \right\} \text{on trouve : } \boxed{d(m, n) = 10}$$



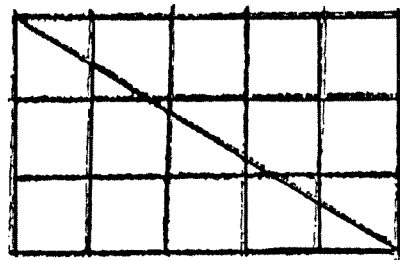
$$\left. \begin{array}{l} m = 7 \\ m = 3 \end{array} \right\} \text{on trouve : } \boxed{d(m, n) = 9}$$

On désigne par $d(m, n)$ le nombre cherché, pour un rectangle dont les côtés mesurent m et n unités.

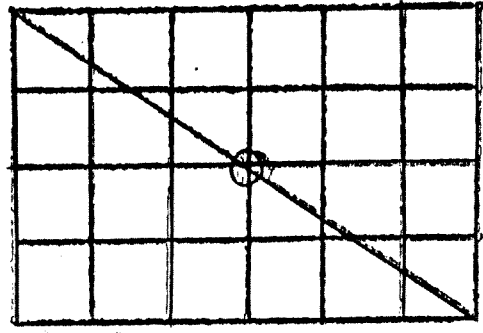
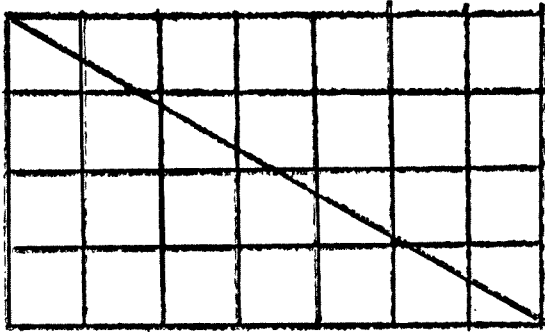
On a, d'après ce qui précède, $d(m, n) = d(n, m)$.



$$\left. \begin{array}{l} m = 6 \\ n = 3 \end{array} \right\} \text{on trouve : } \boxed{d(m, n) = 6}$$



$$\left. \begin{array}{l} m = 5 \\ n = 3 \end{array} \right\} \text{on trouve : } \boxed{d(m, n) = 7}$$



$$\left. \begin{array}{l} m = 7 \\ n = 10 \end{array} \right\} \text{ on trouve : } \boxed{d(m,n) = 10}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = 6 \\ n = 4 \end{array} \right\} \text{ on trouve : } \boxed{d(m,n) = 8}$$

3. Conjecture

a) Déjà sur les deux premiers exemples, il apparaît que le nombre cherché serait: $d = m + n - 1$.

En effet, si $n = 7$ et $m = 3$, on a trouvé : $9 = 7 + 3 - 1$

si $n = 8$ et $m = 3$, on a trouvé : $10 = 8 + 3 - 1$

si $n = 5$ et $m = 3$, on a trouvé : $7 = 5 + 3 - 1$

b) par contre, ce résultat est mis en défaut par la suite:

Ainsi, si $m = 6$ et $n = 3$, on a trouvé : $6 \neq 6 + 3 - 1 = 8$

si $m = 6$ et $n = 4$, on a trouvé : $8 \neq 6 + 4 - 1 = 9$

Mais dans ce cas, contrairement aux exemples précédents, m et n ne sont pas premiers entre eux: cette constatation va nous servir de point de départ pour notre recherche.

On commence à se demander si $d(m, n)$ ne serait pas égal à $m + n - 1$, chaque fois que m et n sont premiers entre eux.

4. Démonstration

Il s'agit de démontrer maintenant la conjecture formulée précédemment :

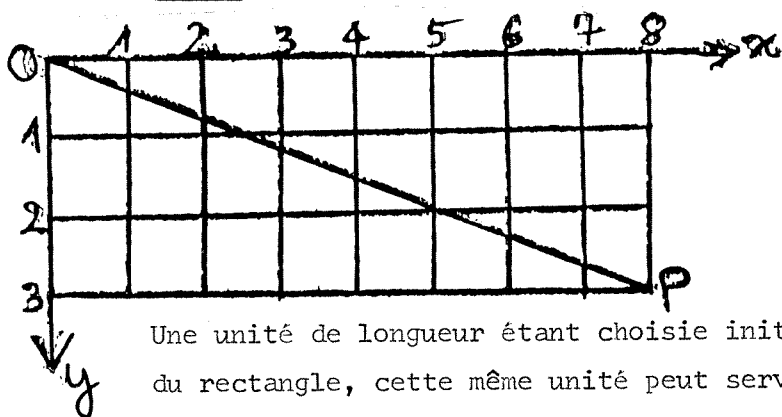
Si m et n sont premiers entre eux, alors la diagonale traverse un nombre de petits carrés égal à :

$$d(m, n) = m + n - 1$$

Chaque fois que la diagonale traverse une ligne, horizontale ou verticale, on rentre dans un nouveau carré.

Si la diagonale rencontre bien toutes les horizontales et toutes les verticales, il s'agit de voir si elle passe à l'intersection d'une horizontale et d'une verticale: un tel point sera appelé un noeud. Il est clair que l'origine et l'extrémité de la diagonale seront des noeuds, dans tous les cas.

Lemme : si m et n sont premiers entre eux, il n'existe pas d'autre noeud



Une unité de longueur étant choisie initialement pour mesurer les côtés du rectangle, cette même unité peut servir à définir un repère orthonormé, comme sur la figure ci-dessus.

Si I (a, b) était un noeud, les points O (0, 0), I et P (m, n) seraient alignés. Leur alignement se traduirait par la relation:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$$

(Si I \neq O, a et b ne sont pas nuls)

donc par la relation : $an - bm = 0$ dont les solutions sont :

$$\left\{ m = ka, n = kb, k \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \right\} \quad (k \neq 0 \text{ et } k \neq 1 \text{ si } I \neq O \text{ et } I \neq P).$$

Donc il existerait k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tel que k soit un diviseur commun de m et n, ce qui contredirait l'hypothèse que m et n sont premiers entre eux. (démonstration par l'absurde).

Il en résulte qu'on compte un carré traversé chaque fois que la diagonale traverse une horizontale (il y en a m qui sont traversées) ou une verticale (il y en a n qui sont traversées) en faisant attention au fait que l'horizontale m et la verticale n sont atteintes en même temps: il y aura donc bien $m + n - 1$ carrés traversés par la diagonale.

5. Généralisation

Si m et n ne sont pas premiers entre eux, désignons par p le p.g.c.d. de m et n. Soient m' et n' les entiers tels que:

$m = p \cdot m'$ et $n = p \cdot n'$

Lorsque $k = 1, 2, \dots, p-1$, alors $\frac{m}{n} = \frac{km'}{kn'}$.

Donc les points $O(0,0)$, $P(m, n)$ et $I_k(km', kn')$ sont alignés, c'est-à-dire que I_k se trouve sur la diagonale.

Or ces points I_k correspondent à des noeuds. Comme m' et n' sont premiers entre eux, ce seront les seuls noeuds autres que O et P , et ils seront au nombre de $p - 1$. Donc:

$$d(m, n) = (m + n - 1) - (p - 1)$$

Soit finalement : $d(m, n) = m + n - p$

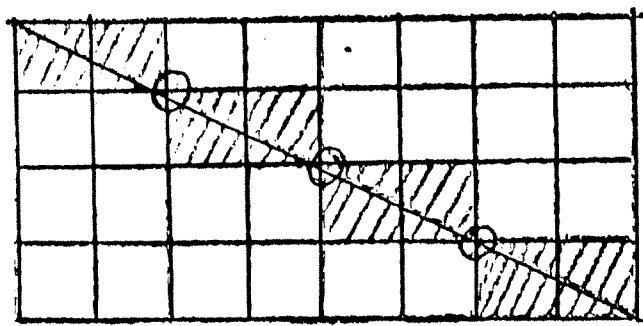
Remarque :

On peut aussi décomposer le rectangle de côtés m et n en rectangles de côtés m' et n' , et alors appliquer le résultat obtenu pour m' et n' (qui sont premiers entre eux) p fois pour obtenir le résultat correspondant à m et n .

Le nombre cherché est donc : $p(m' + n' - 1)$, soit encore : $pm' + pn' - p = m + n - p$.

On retrouve que : $d(m, n) = m + n - p$

Exemple :



Si $m = 8$ et $n = 4$, on peut appliquer 4 fois le résultat obtenu pour 2 et 1, compte tenu du fait que la diagonale traverse, dans ce cas, autant de carrés que pour 4 fois un carré pour lequel $m = 2$ et $n = 1$.

Synthèse Compte tenu du fait que si m et n sont premiers entre eux, leur p.g.c.d. est égal à 1, on a la relation générale

$$d(m, n) = m + n - p, \quad p = \text{p.g.c.d.}(m, n).$$

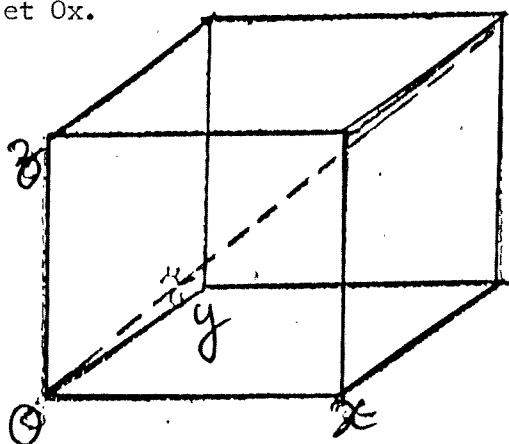
On vérifie que cette relation est symétrique en m et n .

La diagonale d'un rectangle de côtés m et n traverse $m + n - p$ petits carrés, avec $p = \text{p.g.c.d.}(m, n)$.

6. Extension

Le problème précédent peut être posé avec des cubes de côté unité rassemblés pour constituer un parallélépipède, dont les côtés mesurent a, b, c unités de longueur.

Cette fois-ci, il y aura plusieurs types de "noeuds": les intersections de droites parallèles à Ox, Oy, Oz , à Ox et Oy , à Oy et Oz , à Oz et Ox .



Par un raisonnement analogue, on obtient que :

$$d(a, b, c) = a + b + c - \text{pgcd}(a, b) - \text{pgcd}(b, c) + \text{pgcd}(a, b, c)$$

N.B.

Ce problème de la traversée du rectangle posé à des enfants a fait l'objet d'un compte-rendu dans l'ouvrage :

. Starting Points (Oxford University Press) p. 23.

Une traduction est faite chez CEDIC, sous le titre "Points de départ".

Il est à noter que nos collègues anglais qui racontent une expérience faite en 6ème, font cesser leurs investigations lorsque les élèves se sont aperçus que pour certains couples (m, n) , la solution semble être $m + n - 1$.

G. Glaeser en a tiré quelques méditations mélancoliques sur les charmantes perspectives qu'ouvrirait un mariage entre nos méthodes et les leurs (Bulletin de l'A.P.M. N° 297 : "La mathematical education" chez les Bretons et les Gaulois").

L'Ouvert.