Courrier

UN PETIT MONSTRE PERIODIQUE

Je me permets de vous écrire à propos de l'article de Monsieur Eric CHANEY sur les fonctions périodiques, paru dans l'Ouvert n°24.
C'est là un problème qui m'a également démangé et il se trouve que, lors de la préparation au C.A.P.E.S., j'ai eu l'occasion de rencontrer un monstre moins "horrible" que celui proposé, mais tout aussi destructeur. Je vous le livre :

$$f : \mathbb{Z} \cup \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$\text{si } x \in \mathbb{Z} \quad f(x) = 1$$
$$\text{si } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \quad f(x) = 0$$

$\forall x \in Df \qquad f(x+1) = f(x)$

De plus Df est stable par translation de vecteur d'abscisse 1 , mais pas invariant. Cependant, on n'a pas envie de dire que f est périodique. L'intérêt de la notion de fonction périodique est de pouvoir réduire le domaine d'étude d'une fonction à un intervalle I (d'amplitude $P \neq 0$). On reconstitue alors la fonction f en translatant (dans les deux sens) le graphe de f/I, c'est-à-dire en fabriquant la fonction g:

$$g \text{ définie sur } Dg = \bigcup_{k \in Z} \left\{ (I \cap Df) + kP \right\}$$

$$g\ (x) = g(x_0 + kP) = f(x_0) \qquad (x_0 \in I \cap Df)$$

Il faut alors avoir f = g , ce qui est vérifié si et seulement si

$$\forall x \in Df \qquad f(x+P) = f(x) \quad \text{et } Df + P = Df$$

(définition équivalente à celles proposées dans l'article).
L'intérêt pédagogique étant de montrer qu'une fonction , ce n'est pas seulement une formule f(x) = ..., mais aussi un ensemble de départ.

Périodiquement vôtre,

Francis JAMM.

Nous remercions ce collègue pour sa contribution à la tératogénèse des fonctions périodiques. En fait, le caractère monstrueux tient au fait que le domaine de la fonction n'est pas stable par une translation de T(si T est la période) et pas à l'étrangeté des valeurs prises. Munie du domaine proposé, une fonction constante devient "monstrueuse" ! L'OUVERT