
L'APPREHENSION DES SITUATIONS PROBABILISTES CHEZ DES
ELEVES DE 12 A 14 ANS

G. GLAESER

Tel est le titre d'une thèse de 3e cycle, soutenue à Strasbourg en juin 1982, par le chercheur mexicain Jésus ALARCON, dit "Papini".

Deux raisons, au moins, nous incitent à nous intéresser à ce travail :

D'abord le **thème** même abordé dans cette recherche concerne l'enseignant et le didacticien.

Cette thèse explore les idées (justes ou fausses) que de jeunes élèves peuvent avoir acquises à propos de certains phénomènes de hasard bien **avant d'avoir commencé à étudier les probabilités** en classe.

Lorsqu'on commence à leur enseigner cette question, ils ne sont certainement pas des "tables rases" : depuis l'enfance, chacun se familiarise avec des situations de pari, de tirage au sort, ou de décisions à prendre sous des conditions d'incertitude. L'enseignant ne peut fonder une pédagogie efficace que sur une connaissance des idées préconçues de ses élèves, qu'il cherchera à combattre ou à renforcer.

L'élaboration du concept de probabilité est beaucoup plus délicate que ne l'imaginent ceux qui en ont déjà assimilé les notions de base. L'humanité a eu beaucoup de mal à maîtriser les phénomènes de hasard, et à venir à bout des préjugés magiques qui y sont attachés. L'histoire du calcul des probabilités a connu des débuts difficiles, jalonnés par les noms de CARDAN, PASCAL, FERMAT, d'ALEMBERT, LAPLACE, KOLMOGOROFF etc... Cette science est longtemps restée le domaine privilégié des paradoxes et des conclusions erronées. Et il est raisonnable de penser que bien des difficultés qui ont jadis arrêté les plus grands savants, doivent encore gêner nos élèves.

En second lieu, ALARCON effectue son exploration en mettant en jeu une **méthodologie expérimentale** exemplaire. Il évite de formuler

des conclusions qui ne résultent pas de faits bien établis. Il prévoit les objections raisonnables qui pourraient être faites, et il prend, à l'avance, des précautions expérimentales qui lui permettent de réfuter ces objections.

A mon avis, cette thèse constitue **le modèle actuel** de ce qui nous permet aujourd'hui d'affirmer que la didactique des mathématiques est devenue une science.

Je puis me permettre d'affirmer cela en toute modestie : il est vrai que cette thèse a été préparée sous la direction des didacticiens strasbourgeois. Mais ALARCON a mené cette recherche "**contre**" notre équipe : le candidat se montrait constamment plus exigeant et plus subtil que nous. Notre rôle s'est surtout borné à lui porter la contradiction. Mais, en fin de compte, c'est surtout "Papini" qui nous a influencé !

UN CONFLIT DE LOGIQUES

L'enseignement élémentaire des probabilités commence généralement par la description de situations de tirages avec remise, effectués sur des urnes contenant p boules blanches et q boules noires.

On postule alors, plus ou moins explicitement que :
toutes les réponses aux questions qui se posent dans ce contexte ne dépendent que de la proportion $p/(p+q)$, et non du nombre total $p+q$ des boules.

Or Alarcon a bien établi que ce postulat est loin de paraître évident au débutant ! Plus précisément, lorsque cette conviction commence à s'établir, elle reste encore **instable** : une légère modification dans la formulation des questions suffit à la faire chanceler (comme on le verra à propos d'une modalité de l'expérience de la fig. 2).

Un résultat étonne particulièrement : la persistance de stratégies de réponses qui ne se fondent pas sur la seule prise en compte du rapport $p/(p+q)$ se manifeste particulièrement chez des élèves considérés comme plus avancés que la moyenne de leurs camarades.

En fait, le début de l'apprentissage des probabilités fait apparaître un **conflit de logiques**.

Exemple : Au cours d'une partie de pile ou face, on peut parier pile. Mais si, d'aventure c'est face qui sort on n'y voit pas un scandale intellectuel.

Par contre, si l'on pose sur les touches d'une calculatrice l'addition $12+7$, et si le résultat affiché est 15 on sait bien qu'il y a là un fait anormal.

Du point de vue ensembliste, il est parfaitement concevable que l'on reçoivent, au cours d'une partie de bridge, un jeu de 13 piques. Mais du point de vue probabiliste, cela tient du prodige ou de la supercherie.

Alarcon met en évidence une opposition entre les attitudes **compatibilistes** et les attitudes **probabilistes**. Les élèves qui adoptent les premières se refusent à choisir entre des alternatives "possibles", même si l'une est franchement plus probable qu'une autre. Ceux qui adoptent les secondes, s'intéressent à des rapports, et considèrent qu'un événement dont la probabilité est très faible est "impossible". (Par exemple, ce sont ceux qui répondent "plutôt le sac 2" ou "forcément le sac 2" à la question de la fig. 4.)

L'EXPERIENCE

La recherche d'Alarcon a commencé par une **pré-expérience** où il a observé une quarantaine d'enfants d'âges divers, en entretien individuel. Il leur a présenté une trentaine de questions en les adaptant éventuellement d'un entretien à l'autre.

A la suite de ce travail, il a réalisé un questionnaire présenté à 6 classes de 5e et 6 classes de 4e tirées au hasard, dans le département du Bas-Rhin (soit 300 élèves environ).

Le questionnaire se présentait sous trois variantes (modalités) qui différaient par leur formulation ou par l'ordre de présentation des questions.

Voici par exemple, une des questions typiques à laquelle l'attitude compatibiliste permettait de répondre.

1. Alain a pris l'un des deux sacs ci-dessous, et sans jamais regarder dans le sac...

Alain a tiré une boule : la boule sortie était BLANCHE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

Alain a tiré une 2e fois : il a sorti une boule BLANCHE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

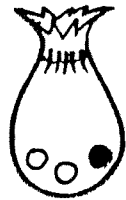
Alain a tiré une 3e fois : il a sorti une boule NOIRE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

Alain a tiré une 4e fois : il a sorti une boule BLANCHE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

Alain a tiré une 5e fois : il a sorti une boule NOIRE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

Alain a tiré une 6e fois : il a sorti une boule NOIRE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

Quel sac Alain a-t-il pris ? Mettez une croix dans la case de votre choix.



SAC 1



SAC 2

Fig 1



forcément
le sac 1



plutôt le
sac 1



pas de raison
de préférer
l'un des sacs



plutôt le
sac 2



forcément
le sac 2

Mais considérons maintenant deux questions faisant intervenir les sacs ci-dessous :



SAC 1



SAC 2

Fig 2

Supposons que l'on indique un tirage (avec remise) effectué dans l'un de ces sacs, et que l'on demande d'indiquer ce sac. Pour un probabiliste moyennement averti, il est inutile de prendre connaissance du tirage : les sacs sont **équivalents**, et par conséquent il n'y a aucune raison pour que ce soit plutôt l'un des sacs que l'autre.

Or l'expérience nous fournit le résultat suivant : si le tirage indiqué se réduit à une seule boule blanche, 98 % des élèves de 4e et 76 % de ceux de 5e fournissent la réponse correcte. Mais ces pourcentages tombent respectivement à 65 % et 52 % lorsque le tirage indiqué est de 4 boules blanches et 2 boules noires ! Tout se passe comme si des élèves croyaient qu'il est plus facile de tirer 4 boules blanches du sac 1 que du sac 2. C'est là, le **phénomène d'instabilité** signalé plus haut. Mais ce n'est là qu'un résultat local de cette thèse. En fait, le questionnaire harcèle les élèves interrogés par des questions en apparence analogues, mais faisant appel en réalité à des stratégies diverses.

Si le tirage comporte plus de boules blanches que noires, on peut préférer le seul sac qui contient plus de boules blanches que noires, sans faire appel aux proportions.

D'autres renseignements sont obtenus, grâce à des questions où le contenu de l'un des sacs est inconnu. Par exemple :

Edith a pris l'un des deux sacs ci-dessous, ensuite elle a tiré une boule sans regarder dans le sac ; la boule sortie était BLANCHE.

Puis elle a remis la boule dans le même sac.



SAC 1



SAC 2

Fig 3

FFV FV 10+13

FFV VV 16+14

FFV VF 7+0

Voici cinq affirmations : lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ? Mettre une croix dans la case correspondante.

Il est sûr que Edith a pris le SAC 1. vrai faux

Il est impossible que Edith ait pris le SAC 1. vrai faux

Il n'est pas sûr que Edith ait pris le SAC 1. vrai faux

Il est plus probable que Edith a pris le SAC 1. vrai faux

Il est tout aussi probable que Edith a pris le SAC 1 que le SAC 2. vrai faux

ou encore :

Le résultat des tirages a été : 6 NOIRES.

Quel sac Gérard a-t-il pris ? Mettez une croix dans la case de votre choix.



SAC 1

Nombre non négligeable de choix du sac "connu" en 4e.



SAC 2

Fig 4

forcément le sac 1

plutôt le sac 1

pas de raison de préférer l'un des sacs

plutôt le sac 2

forcément le sac 2

4e

11

18

19

7

5e

4

18

19

5

La méthode d'Alarcon évite de tirer des conséquences d'une réponse particulière à une question isolée. Au contraire, il met en évidence des comportements cohérents sur l'ensemble du questionnaire.



Et la formulation des questions permet d'aboutir à des conclusions très fines.

PROBABILITES ET CALCUL DES FRACTIONS

Voyons maintenant comment Alarcon réfute une opinion fort répandue, parmi les enseignants et chez de nombreux chercheurs en pédagogie.

Il semble plausible que l'apprentissage des probabilités requiert une bonne maîtrise du calcul des fractions, et l'on affirme souvent que c'est là le seul prérequis exigé. Pour discuter ce point, Alarcon a présenté, au début de chacune des trois modalités, des questions inspirées du célèbre test du jus d'orange, de Gerald Noelting.

Catherine va préparer de la boisson au goût d'orange.

Au dessous de chaque carafe sont indiquées les quantités de jus d'orange et d'eau que Catherine va mélanger pour préparer la boisson :  = 1 verre de jus d'orange ;
 = 1 verre d'eau.

Mettez une croix là où le mélange aura le plus fort goût d'orange.

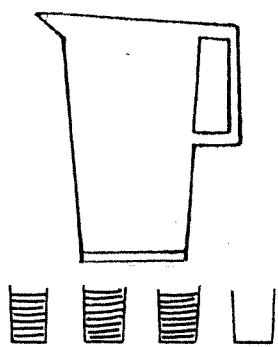
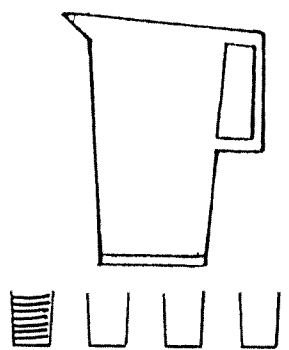


Fig 5



(une case "même goût" est également proposée)

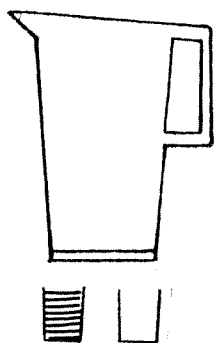


Fig 6



Pour permettre des comparaisons, l'expérimentateur a choisi les mêmes nombres p et q de verres de concentré d'orange et d'eau que de boules blanches et noires dans les sacs. Il apparaît que l'expérience à la Noelting est massivement réussie, alors que l'on observe beaucoup d'échecs significatifs aux épreuves de tirage aléatoire. L'expérience apporte une réfutation expérimentale convaincante de l'assertion selon laquelle une maîtrise du calcul des fractions suffit à comprendre le calcul des probabilités élémentaires.

Bien mieux, l'épreuve suivante est l'une de celles qui comporte une proportion d'échecs forte et inattendue, alors que les items portant sur des sacs de même composition, sont bien réussis dans l'ensemble.



Fig 7

	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<i>même goût dans les deux carafes</i>		
4e	11	0	49
5e	19	0	27

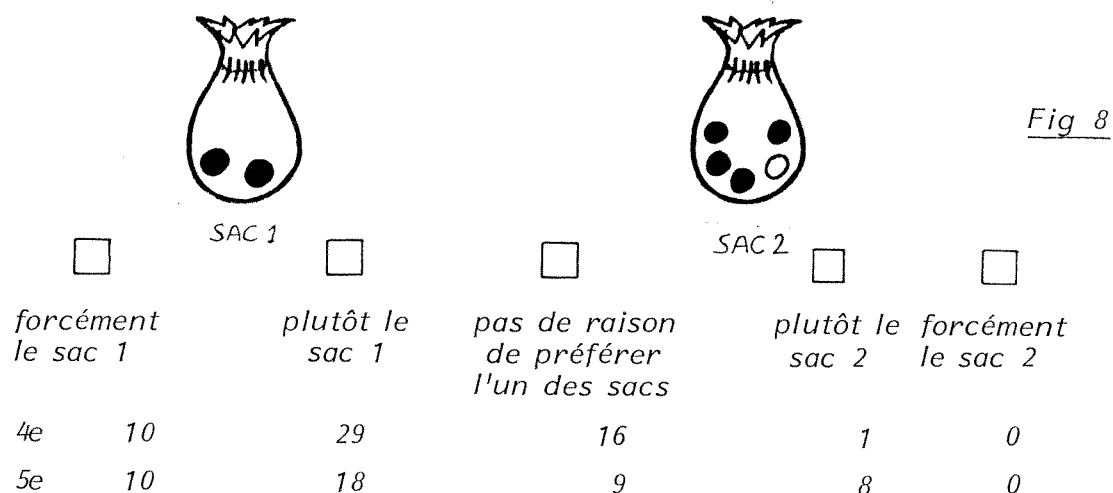


Fig 8

	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<i>forcément le sac 1</i>	<i>plutôt le sac 1</i>	<i>pas de raison de préférer l'un des sacs</i>	<i>plutôt le sac 2</i>	<i>forcément le sac 2</i>
4e	10	29	16	1	0
5e	10	18	9	8	0

L'EVOLUTION AVEC L'AGE

En règle générale, on constate un progrès des performances lorsqu'on passe des élèves de 5e en 4e. Mais Alarcon est trop exigeant pour conclure, lorsque les améliorations ne sont pas significatives (au sens statistique). Et, par ailleurs, il aurait fallu, dans ce cas faire intervenir les âges réels, sans s'en tenir uniquement à l'opposition 5e (environ 12-13 ans) et 4e (13-14 ans).

On se reportera en détail à la thèse pour connaître les cas où ce progrès est expérimentalement prouvé.

De toute façon, ce résultat heurte maintes idées reçues de la pédagogie officielle : une certaine **maturation** se constate, sur des points précis, entre 12 et 14 ans, à propos de notions qui **ne font l'objet d'aucun enseignement scolaire**.

Quoi qu'il en soit, ce compte-rendu sommaire de la thèse d'Alarcon est beaucoup trop rapide pour livrer toute la richesse de cette investigation.

A tous ceux qui désirent se faire une opinion solide, à propos des possibilités offertes par la méthode expérimentale, en matière d'enseignement, on ne peut que conseiller une lecture attentive de la thèse de Jésus ALARCON.