LES SERIES DIVERGENTES CHEZ EULER

J. LEFORT

Tout lecteur sait calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison x. Par exemple de la façon suivante :

soit : $S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

alors : $xS_n = x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1}$

et par soustraction membre à membre

$(1 - x)S_n = 1 - x^{n+1}$

ce qui donne $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ pourvu que x soit différent de 1. De plus, pour $x < 1$ il est facile de voir que la suite de terme général S_n converge vers $\dfrac{1}{1 - x}$.

Imaginons (1) maintenant un élève qui ne connaît rien à la théorie des séries et qui se propose de calculer la somme infinie :

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n + \dots$

en utilisant une méthode voisine. Il remarque que 2S vaut S-1 ce qui conduit à S = -1 ! Que dira son professeur ? Manque de rigueur ? Manipulation indue de l'infini ? N'a pas appris son cours ? N'a rien compris aux maths ? Idiot ? Génial ? Personnellement je trouve un tel élève très astucieux, mais que de difficultés pour lui faire comprendre ce qui se passe, car, contrairement à ce qu'on peut penser, il n'y a pas obligatoirement une erreur !

*****

Nul ne déniera à Euler le titre de calculateur génial. Euler n'a pourtant jamais hésité à faire de tels calculs. On trouve par exemple dans son article "*De seriebus divergentibus*" (Opera omnia, tome XIV, série 1, p. 585 et suivante) les écritures :

(1) L'imagination n'a pas besoin d'être beaucoup sollicitée. Je connais plusieurs collègues qui ont vécu ce genre de situation.

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots\ldots = -1$$

$$1 + 3 + 9 + 27 + \ldots\ldots = -\frac{1}{2}$$

dont la justification repose sur la méthode imaginée ci-dessus. Certes, Euler lui même trouve bizarre d'obtenir un résultat négatif comme somme de termes tous positifs. Il justifie ce résultat, ou tout au moins essaye de le justifier sans trop y croire, par la remarque suivante :

la fonction $-\frac{1}{x}$ est croissante, or pour des valeurs entières de la variable on trouve la suite :

$$\ldots \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-3} \ldots$$

ce qui tend à prouver que les nombres négatifs sont plus grands que les positifs, de l'autre côté de l'infini. Les topologistes pourront disserter à loisir sur cette philosophie.

Dans la pratique, Euler n'avait pas besoin de cette justification. Il avait confiance dans son résultat dans la mesure où différentes méthodes le conduisaient à la même valeur.

Avec un recul de deux siècles, il est relativement facile de justifier - dans ce cas au moins - les calculs d'Euler. C'est ce qu'on appelle le prolongement analytique d'une fonction, et que l'on peut exprimer schématiquement sous la forme suivante :

* si f est définie sur F
* si g est définie sur G
* si les restrictions de f et g à $F \cap G$ sont égales
* si f et g sont des fonctions "pas trop biscornues"
* si $F \cap G$ est "suffisament grand"

alors on peut affirmer que f et g sont les restrictions à F et G d'une fonction h définie sur $F \cap G$.

Il n'est pas question ici de définir plus en détail les expressions "*pas trop biscornues*" et "*suffisament grand*". En appliquant ce résultat aux fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $F = R - \{1\}$ et $g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$ pour $G = \;\; -1, +1$ on justifie tout à fait le calcul imaginé par Euler.

D'autre part, les mathématiciens ont eu largement besoin de manipuler les séries. Ils se sont donc rendu compte qu'il n'y a aucune raison de se limiter à un seul type de convergence. Donnons ici l'exemple classique de la sommabilité au sens de Cesaro :

Soit $Sn = \sum_{0}^{n} u_i$

on pose, s'il existe, $S = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=o}^{n} S_i$.

Il est alors facile de voir que si Sn admet une limite au sens habituel quand n tend vers l'infini, S existe et que c'est cette limite. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple : $u_i = (-1)^n$. Les S_i valent alternativement 1 et 0 et n'admettent donc pas de limite à l'infini ; mais S existe et vaut 1/2. A posteriori, il ne semble pas complètement idiot de poser :

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2},$$

c'est en quelque sorte la valeur moyenne. En pratique il existe de très nombreuses méthodes de sommation et on pourra à ce propos consulter le livre de Hardy : "*Divergent Series*". Euler se contentait de calculer. Il n'avait nul besoin de Cesaro, Hölder et compagnie pour obtenir des résultats ; pour l'exemple précédent il identifiait

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ avec } \frac{1}{1-x}$$

et il faisait $x = -1$.

Mais Euler ne s'arrêtait pas en si bon chemin ; il maniait les infinis avec dextérité, n'hésitant pas à intégrer ou dériver les séries termes à termes, à les multiplier entre elles comme des polynômes, donc sans justification si ce n'est d'obtenir (presque) toujours le même résultat par différentes méthodes, toutes aussi scabreuses.

Prenons un autre exemple :

$$(1 - 1 + 1 - 1 + 1\ldots)(1 - 1 + 1 - 1 + 1\ldots) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

d'après les remarques précédentes. Mais si on développe le premier nombre, on trouve, moyennant une astuce d'écriture :

$$\begin{array}{l}
1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \\
\quad - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \\
\qquad\quad + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \\
\qquad\qquad - 1 + 1 \ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
\end{array}$$

soit $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots\ldots\ldots\ldots$

D'où le résultat $1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots = \frac{1}{4}$.

Et si vous avez des doutes sur ce résultat, considérons avec Euler cette autre méthode :

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots\ldots$$

est la dérivée de

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 \ldots\ldots$$

qu'il identifie avec $1 - \frac{1}{1+x}$ dont la dérivée vaut justement $\frac{1}{(1+x)^2}$ qui pour $x = 1$ redonne bien :

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \ldots\ldots = \frac{1}{4}.$$

Si décidément vous êtes trop cartésien (ou trop bourbakien) pour accepter ce genre de preuve vous pourrez appliquer deux fois de suite la méthode de Cesaro pour retrouver 1/4. Mais notre propos n'est pas de justifier systématiquement les calculs d'Euler.

Il semble qu'Euler ait été une vraie locomotive. Une fois lancé, rien ne semblait pouvoir l'arrêter. Il tournait et retournait ses calculs dans tous les sens. A partir de :

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \ldots\ldots = \frac{1}{4}$$

il cherche à évaluer séparément

$$I = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$$

et $P = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots$

or : $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots = 2\ (1 + 2 + 3 + 4 \ldots)$

$= 2\ (1 + 3 + 5 + \ldots) + (2 + 4 + 6 + 8 \ldots)$

d'où : $P = 2(I + P)$

or : $I - P = \frac{1}{4}$

ce qui le conduit à $I = \frac{1}{12}$, $P = -\frac{1}{6}$ et surtout :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots = -\frac{1}{12}$$

Par le calcul de cette somme, Euler mettait en route une succession de recherches qui n'ont pas encore toutes abouti puisqu'il s'agissait du premier pas sur la fonction ζ de Riemann dont on sait qu'elle est au centre de tous les travaux sur les nombres premiers. Voyons de plus près ce qu'Euler a trouvé à ce propos :

Une définition possible de la fonction ζ est :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ce qui n'a de sens - pour nous - que si $s > 1$. Evidemment Euler donna à s des valeurs quelconques et en particulier négative puisque pour $s = -1$ on trouve

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

Ce qui est admirable c'est que la fonction ζ s'étend assez facilement aux valeurs complexes quelconques (sauf 1 et 0) et que $\zeta(-1)$ vaut justement $-\frac{1}{12}$

Dans l'article : "*Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes que réciproques*" (Opera omnia X, p. 70 et suivantes), Euler étudie la quantité :

$$\frac{1 - 2^m + 3^m - 4^m + \ldots\ldots}{1 - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} - \frac{1}{4^{m+1}} + \ldots} \quad \text{pour } m \quad N^*$$

qu'il trouve égal à 0 pour m pair et à

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \frac{m!\ (2^{m+1}-1)}{(2^m-1)\ \pi^{m+1}} \quad \text{pour } m \text{ impair.}$$

Connaissant Euler, il se devait de voir ce qui se passe pour m non entier. Il commence par se dire que si on pose

$A(m) =$

$A(m) = \frac{m!\ (2^{m+1} - 1)}{2^m - 1)\ \pi^{m+1}}$ alors l'expression cherchée vaut successivement

	$A(1)$	0	$-A(3)$	0	$A(5)$	0
pour m =	1 ,	2 ,	3 ,	4 ,	5	, 6 ...

et que par conséquent on peut réécrire le coefficient de $A(m)$ sous la forme $-\cos\frac{(m+1)\ \pi}{2}$. Par ailleurs en remplaçant $m!$ par $\Gamma(m+1)$, il trouve finalement :

$$\frac{1 - 2^m + 3^m - 4^m + \ldots\ldots}{1 - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} - \frac{1}{4^{m+1}} + \ldots\ldots} = -\cos\frac{(m+1)\ \pi}{2} \quad \frac{\Gamma(m+1)(2^{m+1} - 1)}{(2^m - 1)\ \pi^{m+1}}$$

Il vérifie sa conjecture en faisant $m = 0$ (par un calcul à la limite) puis $m = \frac{1}{2}$ et $m = \frac{3}{2}$ en calculant une valeur approchée du premier membre. Cette conjecture qui est à très peu près la fameuse équation fonctionnelle de la fonction ζ sera démontrée rigoureusement par Riemann. Pour plus de détail, je ne peux qu'inviter le lecteur à se reporter au texte même d'Euler (texte qui est en français). Il pourra y admirer les prouesses calculatoires de ce prodigieux mathématicien.

*****

Dans sa soif de calcul, Euler aborda dans le même esprit les produits infinis, ce qui lui permit de découvrir bien d'autres résultats. Voyons rapidement comment il évalua la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$:

Il connaît le développement en série entière de sin x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

d'où $$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

mais $\frac{\sin x}{x}$ s'annule pour $x = \pm k\pi$, $k \neq 0$, "donc" $\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2})$

en généralisant la formule de factorisation des polynômes. Mais si on développe le deuxième membre il vient :

$$1 - \frac{x^2}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{x^4}{\pi^4} \cdot \sum_{k \neq l} \left(\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{l^2}\right) - \ldots$$

et par identification, il trouve :

$$\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ainsi que d'autres formules analogues.

Ne nous attardons pas sur ce genre de calcul, nous pourrions ainsi passer en revue l'oeuvre entière d'Euler, et revenons aux calculs des séries divergentes avec un excellent exemple.

*****

Dans "*De seriebus Divergentibus*" (déjà cité), Euler s'attaque au calcul de la série

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \ldots\ldots$$

série sacrément divergente, qu'il qualifie d'hypergéométrique (on comprend pourquoi) et qu'il attribue à Wallis (mais les historiens se demandent bien pourquoi ?).

Euler va "*calculer*" le résultat de quatre façons et comme les quatre valeurs approchées obtenues seront suffisamment voisines il conclura à la justesse des méthodes employées et à la justesse du résultat !

Sans entrer dans les détails regardons rapidement le principe de ces méthodes :

1ère méthode :

Soit S = a - b + c - d + e - f ..... où a, b, c ... sont tous positifs et considérons le tableau des *"différences finies"*

	Δ_1	Δ_2	Δ_3	
a				
	b-a			
b		c-2b+a		
	c-b		d-3c+3b-a	.....
c		d-2c+b		
	d-c		⋮	
d		e-2d+c		
	e-d			
e		f-2e+d		
	f-e	⋮		
f	⋮			
⋮				

Posons $\alpha = b - a$; $\beta = c - 2b + a$; $\gamma = d - 3c + 3b - a$; .....
On peut vérifier que S se réécrit :

$$S = \frac{a}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} - \frac{\gamma}{16} + \frac{\delta}{32} \ldots\ldots$$

Euler va appliquer cette méthode à la série hypergéométrique qu'il écrira

$$S = 2! - 3! + 4! - \ldots\ldots \text{ puis } \frac{S}{2} = \frac{2!}{2} - \frac{3!}{2} + \frac{4!}{2} \ldots$$

après simplification des deux premiers termes. Il trouve

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{7}{8} - \frac{32}{16} + \frac{181}{32} - \frac{1214}{64} + \ldots\ldots$$

il calcule suffisamment loin pour itérer plusieurs fois sa méthode.

A chaque étape il va appliquer un résultat classique sur les séries alternées (ce qu'est la série hypergéométrique) convergentes (ce qu'elle n'est pas), à savoir que la somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives. Il trouvera donc d'abord

$$\partial < S < 1$$

puis en itérant il arrive à :

$$5/16 < S < 7/8$$

et enfin

$$S \cong 0,580.$$

Il est à remarquer que cette méthode ne permettra jamais d'aboutir à une série convergente en partant de la série hypergéométrique, mais redonne bien $\frac{1}{4}$ pour 1 - 2 + 3 - 4 + 5 ...

2ème méthode :

Soit $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ et considérons le tableau des différences finies :

	Δ^1	Δ^2	Δ^3
a_1	$a_2 - a_1$		
a_2		$a_3 - 2a_2 + a_1$	
	$a_3 - a_2$		$a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1$
a_3		$a_4 - 2a_3 + a_2$	
	$a_4 - a_3$		
a_4			

Par définition on aura $\Delta a_1 = a_2 - a_1$

$$\Delta^2 a_1 = a_3 - 2a_2 + a_1 \qquad \text{etc...}$$

alors :

formule (F) $$a_{i+k} = a_i + k\Delta a_i + \frac{k(k-1)}{2} \Delta^2 a_i + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 a_i + \ldots$$

Cette formule n'est évidemment "*valable*" que pour k entier positif ou nul. L'idée d'Euler est d'appliquer cette formule pour k négatif !

Il considère la suite

$$P_1 = 1 \; ; \; P_{n+1} = n P_n + 1$$

construite spécialement pour que $\Delta^i P_i = i!$ En faisant dans la formule (F) $i = 1$ et $k = n-1$ il vient :

$$P_n = 1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) + \ldots$$

où il y a un nombre fini de termes puis en faisant $n = 0$

$$P_0 = 1 - 1 + 2! - 3! + 4! \ldots$$

où il y a un nombre infini de termes. Pour évaluer P_0 qui apparaît ainsi comme le zéro$^{\text{ième}}$ terme d'une suite il va utiliser la même formule (F) et la même méthode pour $a_n = \frac{1}{P_n}$ et $a_n = \log_{10} P_n$ ce qui lui permettra de trouver :

$$\frac{1}{P_0} = 1,651740 \qquad \text{donc} \qquad P_0 \cong 0,60542$$

$$\log_{10} P_0 = 1,7779089 \qquad \text{donc} \qquad P_0 \cong 0,59966$$

valeurs qui corroborent celle trouvée par la première méthode. Euler a décidement de la chance car les conditions nécessaires au bon fonctionnement de cette méthode sont assez restrictives.

3ème méthode :

Euler considère la série entière

$$S(x) = x - 1x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - 120x^6 + \ldots$$

et il veut évaluer S(1). Bien sûr, le rayon de convergence de cette série est nul, mais que lui importe. Or par dérivation il remarque que

$$S'(x) + \frac{S(x)}{x^2} = \frac{1}{x}$$

équation différentielle facile à résoudre et qui le conduit à :

$$S(x) = e^{\frac{1}{x-1}} \int_0^{e^{1-1/x}} \frac{dv}{1-\ln v}$$

D'où les expressions possibles de S(1) obtenues par divers changement de variable :

$$S(1) = e \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t}\, dt = \int_0^1 \frac{dv}{1-\ln v} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1+s}\, ds$$

Il calculera les deux premières intégrales par la méthode des trapèzes, obtenant respectivement 0,59637255 et 0,58734359 avec une subdivision en 10 intervalles, puis il développera en puissance de 1-v la quantité $\frac{1}{1-\ln v}$ qu'il intégrera terme à terme ce qui lui donne :

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \ldots = S(1) = 1 - 1/2 + 1/6 - 1/12 + 1/30 \ldots$$

d'où une nouvelle évaluation de la série de Wallis :

$$S(1) \cong 0,59940472\ldots$$

4ème méthode :

En essayant de développer en fractions continues généralisées

$$\frac{S(x)}{x} = 1 - x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + \ldots$$

il trouve l'expression sympathique :

$$S(x) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \ldots}}}}}}}}$$

Il lui suffit ensuite de faire $x = 1$ et d'arrêter le développement à un ordre quelconque, tout le problème étant d'essayer d'évaluer le reste. A ce propos on notera l'ingéniosité d'Euler qui transforme, majore, minore, fait des hypothèses simplificatrices pour arriver à évaluer le reste comme solution d'une équation du 3ème degré. Après moult calculs il obtient

$$\frac{S(1)}{1} \cong 0,5963473621372\ldots \quad (*)$$

*****

Il n'est pas question ici de discuter de la "*validité*" des calculs d'Euler. Le lecteur intéressé se reportera à l'article "*Euler Subdues a very obstreperous series*" de E.J. Barbeau paru dans l'American Mathematical Monthly de mai 1979. Il s'agit plutôt de voir l'excellente habilité d'Euler à faire des calculs et à les vérifier. Dans le fond, Euler ne fait qu'essayer d'appliquer les recettes qui marchent bien pour les polynômes au cas des séries entières. Avec le recul du temps il est facile de voir ce qui va et ne va pas. Mais n'oublions pas qu'Euler ne connaissait pas encore tous les du zoo mathématique, ceux que l'on exhibe aux étudiants quand justement ils font un raisonnement d'un des types vus ci-dessus. Essayons d'être un peu honnête vis à vis d'eux ; bien sûr expliquons leur que le raisonnement est faux mais félicitons les quand même d'avoir eu une si bonne idée. Pensons à Apéry (voir l'Ouvert n° 21, p. 14 et suivantes).

Il est une autre leçon qu'Euler nous donne à travers ses travaux : A l'heure de l'informatique nous pouvons méditer sur sa puissance de calcul : Que donnerait un nouvel Euler avec un simple micro-ordinateur entre les mains ? A ceux qui rechignent de calculer sous prétexte qu'il y a des machines, il est bon de montrer que la machine ne remplace pas le cerveau mais permet d'en décupler les capacités.

(*) Dans l'ouvrage déjà cité p. 26 et suivantes, Hardy démontre que $1 - 1! + 2! - 3! + \ldots = -e\,(\gamma - 1 + \frac{1}{2.2!} - \frac{1}{3.3!} + \ldots)$ où γ est la constante d'Euler ce qui conduit à la valeur

0,596347362318... pour la série hypergéométrique.

Pour terminer et pour ramener le lecteur au présent montrons comment un raisonnement à la Euler peut capoter :
Nous avons vu que $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = S = \frac{1}{2}$
en identifiant S avec f(1) où $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots = \frac{1}{1-x}$
mais rien n'interdit d'identifier S avec g(1) où
$g(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 \ \ldots$

$$= (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)(1 - x^2)$$

$$= \frac{1 - x^2}{1 - x^3} = \frac{1 + x}{1 + x + x^2}$$

or ici g(1) vaut 2/3. On peut d'ailleurs s'amuser à obtenir n'importe quel rationnel donné à l'avance. Euler, à qui ce genre de réflexion avait été faite avait fait remarquer que g(1) est plutôt associé à :

$$1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 \ldots$$

Mais il faut avoir du génie pour pouvoir comprendre intuitivement ce genre de subtilité et les méthodes rigoureuses sont les bienvenues pour ceux qui n'ont que des compétences.