REPORTAGE A L'OLYMPIADE (SUITE ET FIN)

G. GLAESER

Le n° 33 de l'"Ouvert" a soumis à ses lecteurs un des énoncés des problèmes proposés à l'Olympiade internationale de Mathématique (Paris - juillet 1983). Le voici :

> *"Soit ABC un triangle équilatéral. Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des points des segments fermés AB, BC, CA. Est-ce que, pour toute partition de E en deux sous-ensembles disjoints, il existe au moins un triangle rectangle dont les trois sommets appartiennent au même sous-ensemble ? Justifier la réponse."*

Après l'avoir résolu moi-même, j'ai observé ou interviewé une dizaine de personnes qui ont résolu cette question.

J'ai été particulièrement étonné de constater que, sans indications particulières, tous ont fini par trouver la même "astuce" qui fournit la clé du problème.

Si vous n'avez pas cherché vous-même, et si vous lisez la solution, le truc paraîtra peut-être "introuvable". Je vais au contraire vous raconter comment ce truc a été trouvé, d'une façon très naturelle.

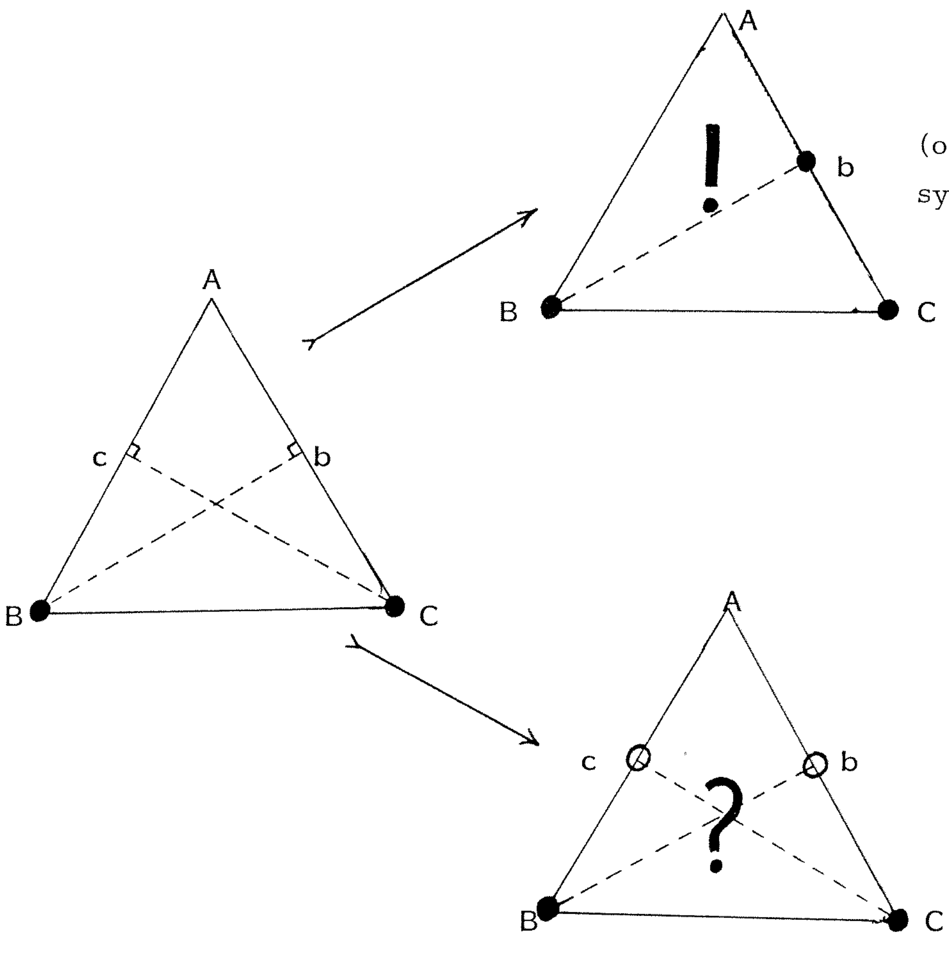
Le processus de résolution a comporté les mêmes phases (je dirai "cycles" pour me conformer à la terminologie généralement adoptée).

Le premier cycle (très court chez les personnes expérimentées, et assez long chez les maladroits) a abouti à changer la terminologie. Voici par exemple, ce qu'on a pu lire sur certains brouillons, au cours de ce premier cycle.

> Soient $\mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_2$ deux parties disjointes qui forment une partition de $\mathbb{E}$, réunion des trois côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ du triangle.
>
> Alors si un point $X \in [AB]$ et sa projection orthogonale x sur $[BC]$ appartiennent à la même partie $\mathbb{E}_1$ (ou $\mathbb{E}_2$), ainsi qu'un troisième point Y de $[BC]$, alors X x Y est un triangle rectangle dont les trois sommets appartiennent à la même partie $\mathbb{E}_i$ de la partition.

Ce langage est lourd, et peu suggestif. Après un temps plus ou moins long, on décide de colorier $\mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_2$ à l'aide de deux couleurs, à parler de points noirs ou rouges (ce qui permet aussi de les dessiner). De plus on présente le problème comme une **chasse aux triangles rectangles unicolores**, et on utilise le signe **!** pour signifier qu'on vient d'en attraper un, et **?** pour dire qu'il faut continuer la chasse.

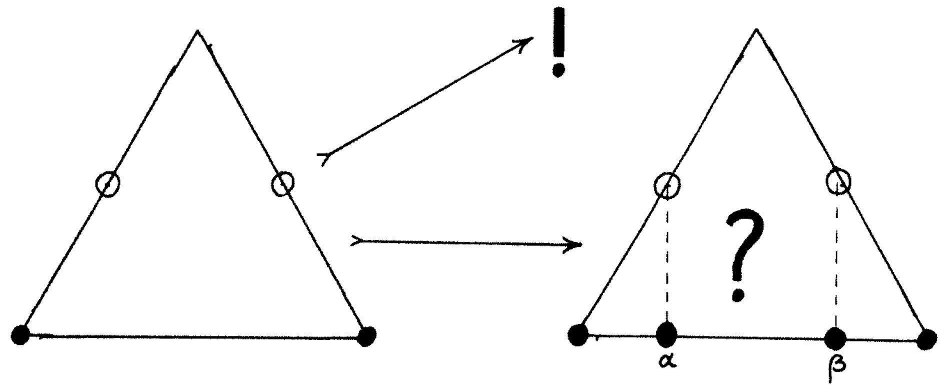
Le second cycle. Soit donc une partition de $\mathbb{E}$ en deux couleurs. On remarque que deux au moins des trois sommets du triangle équilatéral sont de même couleur. Pour fixer les idées, appelons B et C de tels sommets que l'on peut supposer **noirs** (sans perdre en généralité). Projetons orthogonalement B sur [AC] , en b et C sur [AB] en c. Si b (ou c) est noir, la chasse est victorieuse : on a attrapé un triangle BbC (ou BcC) unicolore. Il suffit donc de poursuivre la chasse avec b et c **rouges**.



(ou figure symétrique)

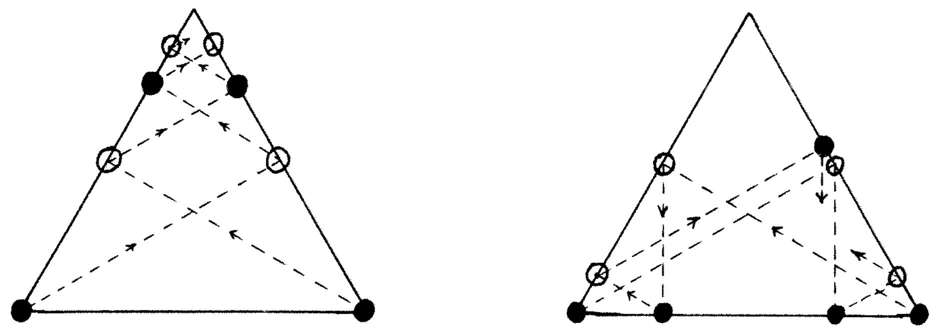
Note : Les sommets noirs sont notés ● , et les rouges ○ . L'OUVERT n'ose, en effet, pas encore rêver à la quadrichromie.

Projettons maintenant les points c et b sur [BC] en α et β. Si l'un de ces points est "rouge", la chasse est finie (l'un des triangles cbα ou cbβ est "rouge". Il reste donc à poursuivre la chasse dans le cas où α et β sont "noirs".



Chacun des chercheurs a poursuivi ainsi, plus ou moins longtemps ce petit jeu, projettant les derniers points obtenus, prouvant que si l'une de ces projections est d'une certaine couleur, la chasse est victorieuse ! Malheureusement, si les deux projections sont de couleur opposée, on ne peut pas conclure, il faut continuer à chasser (?).

C'est ainsi que des chercheurs ont ramené le problème à l'étude de l'une des figures suivantes :



ou à toute autre obtenue en poursuivant la manoeuvre, pendant quelques crans encore.

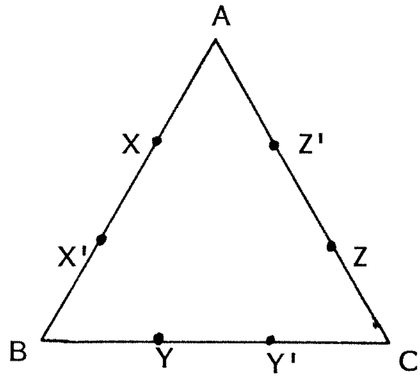
On tourne en rond ! On ne s'en sort pas ! On se trouve être aussi bête qu'un ordinateur ! A chaque coup, on trouve des points nouveaux. Ah ! si l'on pouvait retomber sur un point déjà obtenu.

Et l'on décide de prendre un temps de repos, puis de réfléchir un peu pour comprendre pourquoi on ne s'en sort pas. Et l'on formule le souhait : "j'aimerais bien qu'un des points construit sur [AB] et sa projection sur [AC] (par exemple), soit de la même couleur !"

Finalement **voici le micro-eureka** ! Il faudrait trouver un point X (sur $[AB]$) tel que sa projection Y sur $[BC]$, se projette en Z sur $[CA]$, de façon que Z se projette en X sur $[AB]$.

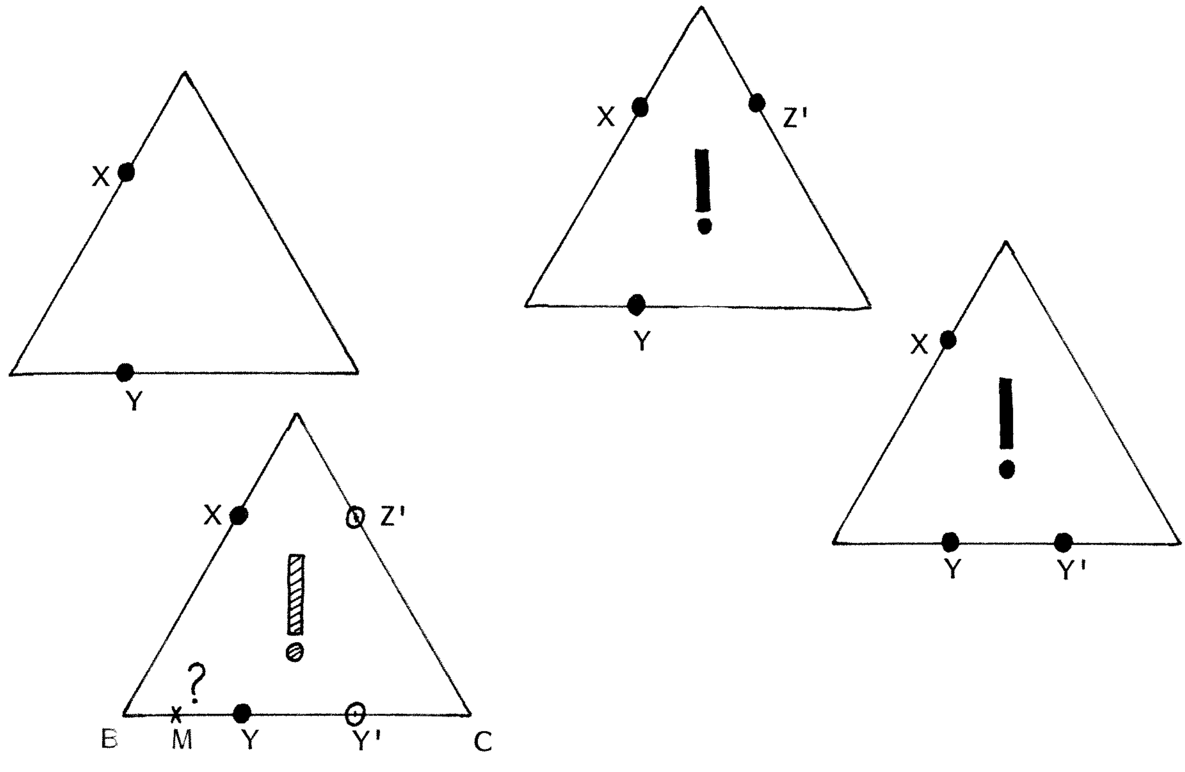
Troisième cycle. Est-ce possible ? On peut répondre à la question de diverses façons, par exemple en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires. Mais, le plus élémentaire est de déterminer un tel point, par des méthodes de géométrie du programme de la classe de 3e. Par exemple si l'on pose $BX = x$, alors $BY = x \cos(60°) = \frac{x}{2}$, et finalement on aboutit à la réponse ne serait-ce qu'en résolvant une équation du premier degré.

Partageons les côtés en trois parties égales ; on obtient ainsi le triangle XYZ (ou X'Y'Z') cherché.



Quatrième cycle. On reprend alors tout le problème, à partir des points X, Y, Z, dont l'existence a été prouvée au cours du 3e cycle. Deux de ces points X, Y, Z sont de la même couleur : on peut supposer, sans nuire à la généralité que les points X et Y sont noirs.

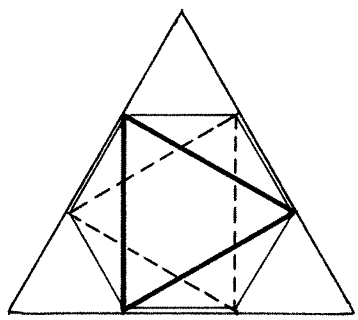
Il y a alors beaucoup de façons de conclure : en voici une.



Si l'on prend sur [BC] un point M quelconque, distinct de Y et Y', s'il est noir, on a chassé le triangle XYM et s'il est rouge, c'est Z'Y'M qui sera chassé. Eureka ! et C.Q.F.D.

Pour conclure. L'idée-clé, de faire intervenir dans la question un triangle équilatéral XYZ inscrit dans ABC, de façon que chaque côté du premier triangle soit orthogonal à un côté du second, a fini par venir (à ma connaissance) à tous ceux qui ont résolu ce problème. Elle me paraît naturelle, mais pas toujours immédiate.

"L'Ouvert" serait heureux de recueillir des témoignages de ceux qui ont cherché (ou même résolu) ce problème. Trouvez-vous qu'il y a là une "astuce introuvable" ?



Plusieurs lecteurs de l'OUVERT se sont attaqués à cette chasse au triangle rectangle (celui qui fuit par les coins ...) . M. J.M. BAYARRI nous a fait parvenir sa solution. Lui aussi a transcrit l'énoncé dans un langage à lui, parlant par exemple de "points congrus". Les obstacles qu'il a rencontré dans sa recherche et sa façon de les surmonter nous interesseraient fort. Jean MARTINET nous a également transmis sa solution, commentée. Elle est reproduite ci-après.