EULER AU BAC A_1 !

Proposé par l'Académie de Besançon, le sujet de mathématiques donné en Alsace pour la session 84 du baccalauréat de la nouvelle section A1 comportait deux exercices et le problème reproduit ci-dessous. Le premier exercice, de probabilité, proposait d'étudier les variations sur le thème de Molière *"Belle Marquise, vos beaux yeux..."*. Le second, de facture plus classique, faisait étudier une fonction du second degré et une fonction homographique. Tous deux étaient notés six points.

De façon plus générale, l'OUVERT serait heureux que les réflexions sur les sujets du bac 84 sortent des salles des professeurs, et publierait volontiers celles qui lui seraient transmises.

<u>P R O B L E M E</u> (8 points)

Résolution d'une équation : $x \in \mathbb{R}$ $a^x = b$, application.

L. Euler : "Introduction à l'analyse infinitésimale" chap. 6 tome 1 (Bachelier 1835).

111. L'uſage des logarithmes eſt particuliérement eſſentiel pour réſoudre les équations, dans leſquelles l'inconnue ſe trouve en expoſant. Si, par exemple, on arrive à l'équation $a^x = b$, d'où il faille tirer la valeur de l'inconnue x; on ne pourra y parvenir qu'en employant les logarithmes.

"L'usage des logarithmes est particulièrement essentiel pour résoudre des équations, dans lesquelles l'inconnue se trouve en exposant. Si, par exemple, on arrive à l'équation $a^x = b$, d'où il faille tirer la valeur de l'inconnue x ; on ne pourra y parvenir qu'en employant les logarithmes."

<u>QUESTION 1</u> : A quelles conditions, sur a et b, l'équation :

$x \in \mathbb{R}$ $a^x = b$, a-t-elle une et une seule solution ?

dans ce cas la résoudre.

<u>APPLICATION</u> :

E X E M P L E II.

Un particulier doit 400000 florins, dont il eſt convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent; il acquitte tous les ans 25000 florins; on demande après combien d'années ſa dette ſera entierement éteinte. Écrivons a pour la ſomme dûe 400000 fl. & b pour la ſomme 25000 fl. payée tous les ans; il devra donc au bout d'un an $\frac{105}{100}a - b$; au bout de deux ans $\left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \left(\frac{105}{100}\right) b - b$; au bout de trois ans $\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \left(\frac{105}{100}\right) b - b$; & en mettant, pour abréger, n au lieu de $\frac{105}{100}$, il reſtera dû après un nombre x d'années $n^x a - n^{x-1} b - n^{x-2} b - n^{x-3} b \ldots\ldots - b$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. L

"Un particulier doit 400000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent ; il acquitte tous les ans 25000 florins ; on demande après combien d'années sa dette sera entièrement éteinte.
Ecrivons a pour la somme dûe 400000 fl. et b pour la somme 25000 fl. payée tous les ans ; il devra au bout d'un an :"

$$S_1 = \frac{105}{100} a - b$$

au bout de deux ans : $S_2 = (\frac{105}{100})^2 a - \frac{105}{100} b - b$;

au bout de trois ans : $S_3 = (\frac{105}{100})^3 a - (\frac{105}{100})^2 b - \frac{105}{100} b - b$;

et en mettant pour abréger n au lieu de $\frac{105}{100}$, il restera dû après un nombre x d'années :

$$S_x = n^x a - n^{x-1} b - n^{x-2} b - \dots - n b - b$$

QUESTION 2 : Soit S_p la somme dûe au bout de p années, p étant un entier compris entre 1 et x (le nombre d'années au bout duquel la dette sera éteinte), montrer par récurrence sur p que :

$$S_p = n^p a - n^{p-1} b - n^{p-2} b - \dots - n b - b$$

52 DES QUANTITÉS EXPONENTIELLES

$= m^x a - b(1 + n + n^2 + \dots + n^{x-1})$. Mais comme par la nature des progreſſions géométriques $1 + n + n^2 + \dots + m^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$; après x années, il ſera dû $n^x a - \frac{n^x b + b}{n - 1}$ fl., quaantité, qui égalée à zéro donnera cette équation $n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1}$,

" $S_x = n^x a - b (1 + n + n^2 + \dots + n^{x-1})$. Mais comme par la nature des progressions géométriques $1 + n + n^2 + \dots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$;
après x années, il sera dû $n^x a - \frac{n^x b + b}{n - 1}$, quantité , qui égalée à zéro donnera cette équation $n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1}$ ", ... *(progression = suite)*

QUESTION 3 : Justifier la formule $1 + n + n^2 + \dots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$.
Il y a manifestement une erreur d'impression, dans le texte ci-dessus.
Donner une expression correcte de la forme réduite de S_x .

QUESTION 4 : Résoudre l'équation $x \in \mathbb{N}$ $\quad n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1}$,
en se ramenant comme l'indique Euler à une équation dans $\mathbb{R}$: $A^x = B$;
il est demandé de détailler les calculs et d'indiquer les moyens de calculs utilisés (tables, calculatrice).

QUESTION 5 : Voici la conclusion donnée par Euler : "donc x sera un peu moindre que 33 ; c'est à dire qu'au bout de 33 ans la dette sera non seulement acquittée, mais le créancier sera tenu de rendre :" 318,8 fl.
Justifier cette conclusion (on pourra calculer S_{33}).