NUMERATION EN BASE TROIS PRIME

Hommage à Charles CROS (1842-1888)

J. LEFORT

§ 1. INTRODUCTION

La préparation d'un cours relève souvent du hasard. Je cherchais des textes plus ou moins historiques pour étoffer l'option d'arithmétique de Terminale A2. J'avais certes trouvé bien des documents chez G. Ifrah ou chez G. Guitel (*) sur les notions de numération et de base. J'en avais trouvé d'autres dans des revues d'assyriologie et d'égyptologie. Et puis un jour, à propos d'une discussion sur la couleur et les techniques de reconstitutions de la couleur, on me signale que Ch. CROS, dès 1869 avait donné un procédé de photographie en couleur utilisant trois objectifs munis de filtres colorés différents. Par curiosité je me reporte aux oeuvres complètes (**) de ce poète et scientifique dont le français moyen ne connaît que "*le hareng saur*" (sec, sec, sec !) et le prix Ch. CROS récompensant les meilleurs disques. Je tombe alors sur de véritables bijoux :

Je laisserai à plus compétent que moi le soin de disserter sur "*le coffret de Santal*" publié en 1873 ou "*le fleuve*" en 1874 dont les alexandrins annoncent déjà le surréalisme.

Je dirai deux mots sur le **"paléophone"** très précisément décrit dans une communication à l'académie des sciences. Avec quelques mois d'avance, ce n'est autre que le **phonographe** d'Edison. Illustration parfaite de "*Les français ont des idées mais*

(*) G. Ifrah : "*Histoire universelle des chiffres*" - Seghers
G. Guitel : "*Histoire comparée des numérations écrites*" - Flammarion

(**) Collection "*La Pléïade*"

ne savent pas les utiliser", Charles CROS lègue son invention à l'humanité. Plus malin, Edison la fera breveter. Reconnaissons toutefois que les deux hommes firent leur découverte de façon indépendante.

§ 2. UNE NOUVELLE NUMÉRATION

J'en viens au sujet de cet article. C'est dans "*Sur les moyens de communication avec les planètes*" qu'on trouve le passage suivant :

" § 3. Je dois dire tout d'abord, - et la suite de l'étude justifie cet avis, - que la première notion à échanger est celle d'une **numération.**
Or, les premiers signaux doivent être tels qu'ils aient un caractère en quelque sorte **vivant**, *et qu'ils expriment la loi de la numération dont on se servira ultérieurement.*
La discussion du système de numération à employer, exigeant des notions mathématiques tout à fait spéciales, ne peut entrer dans ce mémoire que je m'efforce de rendre abordable à tous. Il suffira de dire que ce système doit être le plus simple possible au début, quitte à le changer ensuite. Le système usuel, à neuf chiffres significatifs plus le zéro, sera rejeté à cause de sa complication ; ses chiffres élémentaires ont une valeur trop forte - ce qui rend trop forte aussi la somme des chiffres d'un nombre donné - et l'emploi tout conventionnel du zéro est difficile à deviner.
Il faut se servir de très peu de signes élémentaires, et en utiliser tous les arrangements possibles dans l'ordre de génération de ces arrangements.
Les chiffres élémentaires seront : l'éclair simple, l'éclair double, triple, etc.

§ 4. Si l'on se borne à trois signes élémentaires, voici l'ordre des apparitions tel qu'il devra être dans les premiers signaux ; les apparitions sont représentées par des points dont les intervalles sont proportionnels aux durées des disparitions :

. .. .
.. .. *etc, etc.*

L'étude la plus sommaire de cette série révèle sa loi. C'est une suite de groupes différents composés de un, de deux, de trois termes élémentaires et ainsi de suite ; et ces termes élémentaires sont de trois espèces seulement : l'éclair simple, l'éclair double, l'éclair triple. Ils se substituent les uns aux autres dans tel terme des groupes consécutifs, suivant leur ordre de grandeur. Ce système peut se continuer indéfiniment, et servir de cette manière à repré-

senter la série des nombres naturels. Les propriétés, d'ailleurs fort intéressantes, de cette numération si simple, et celles des numérations analogues doivent être l'objet d'une étude particulière.
Pour que le doute ne puisse pas naître, il conviendra de produire après la suite des groupes représentatifs, la suite des nombres représentés - ces nombres étant exprimés chacun par autant d'éclairs simples qu'il contient d'unités. Enfin on y joindra quelques exemples, tels qu'un nombre assez grand exprimé en éclairs successifs, suivi de sa représentation dans le système adopté.

§ 5. L'exemple des premiers signaux donnés ci-dessus, est construit d'après une numération à **trois** *éléments. Je n'ai pas voulu insinuer par là que ce système fût le préférable. Peut-être la numération à* **deux** *éléments est-elle plus avantageuse. C'est encore une question à discuter d'une manière rigoureuse. Les conclusions de cette étude tendront probablement à l'emploi d'une numération basée sur peu de signes élémentaires."*

Je tenais un excellent texte à proposer aux élèves de Terminale A2. Que de questions soulevées en peu de lignes :

- . Le rôle du zéro.
- . La notion de base de numération.
- . Avantages et inconvénients des petites et grandes bases.
- . Lecture de la suite de points ; comment la prolonger ? Est-ce une numération de base trois ? Pourquoi ?
- . Comment construire, sur le même principe une numération à deux ou quatre ... éléments ?

Il n'est pas question de faire ici une étude exhaustive de ce texte. Je voudrais seulement étudier plus en détail ce curieux système de numération et aller plus loin qu'on ne peut le faire avec une classe de T A2.

Reconnaissons tout d'abord, que la suite de points telle qu'elle est présentée dans l'ouvrage de la Pléïade est peu claire. Puisqu'il s'agit d'une numération à trois éléments, utilisons les symboles 1, 2 et 3. Ils nous sont beaucoup plus parlants et notre propos n'est plus de communiquer avec d'éventuels extra-terrestres !
On obtient alors la suite :

1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32...

qu'on prolonge facilement en

33, 111, 112, 113, 121...

Cela ressemble furieusement à une numération en base trois, et pourtant il n'y a pas de zéro. Une numération de base trois utilisant les symboles 0, 1 et 2 s'écrirait :

1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22...

Pour mieux juger, comparons les numérations nombre pour nombre.

en base dix	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 ...
en base trois	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111	112	120 ...
Ch. CROS	1	2	3	11	12	13	21	22	23	31	32	33	111	112	113 ...

Les deux numérations concordent tant qu'on n'utilise pas le 0 (ou le 3). Charles CROS n'a pas besoin de 0 et c'est le 3, autrement dit la base, qui joue le rôle du zéro.

Il est clair que l'on a affaire à une numération de position : tout chiffre voit sa valeur multipliée par 3 (par la base) quand il est décalé d'un rang vers la gauche. Par exemple :

$$113 = 1 \, . \, 3^2 + 1 \, . \, 3 + 3 = 9 + 3 + 3 = 15.$$

Je propose donc de baptiser la numération de Charles CROS, **numération en base trois prime**. Le lecteur inventera sans peine les numérations en base deux prime, dix prime (avec les dix symboles 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et X), etc...

§ 3. CHANGEMENT DE BASE

L'exemple précédent montre le passage de la base trois prime à la base dix habituelle. Cette méthode se généralise sans difficulté pour le passage de la base b' à la base dix. Comme on sait passer de la base dix à la base b (par division) montrons qu'il est facile de passer de la base b à la base d'. Prenons l'exemple de b = 3.

On remplacera 10 (en base trois) n'importe où dans le nombre par 3. Plus généralement, on cherchera à supprimer les "0" en baissant d'une unité le nombre restant à gauche par troncature et en mettant un 3 à la place du zéro.

Exemple : 1 0 2 0 1 0 0 2 2 0 **1 0**

On commence par la droite 1 0 → 0 3, d'où

1 0 2 0 1 0 0 2 **2 0 0** 3

On prend 2 0 0 , le dernier 0 est remplacé par 3 et 2 0 est baissé d'une unité : 1 2, d'où

1 0 **2 0 0** 2 3 2 1 2 3 3

On continue pour obtenir successivement :

1 0 **2 0 0** 2 3 2 1 2 3 3

1 0 1 2 3 2 3 2 1 2 3 3

3 1 2 3 2 3 2 1 2 3 3

§ 4. OPÉRATIONS EN BASE TROIS PRIME

• Pour l'addition et la multiplication, aucune difficulté en utilisant les tables de pythagore suivantes :

+	1	2	3
1	2	3	11
2	3	11	12
3	11	12	13

x	1	2	3
1	1	2	3
2	2	11	13
3	3	13	23

• Pour la soustraction, il faut faire un peu plus attention car la base trois prime n'autorise que les opérations dans $\mathbb{N}^*$. On modifiera donc légèrement son habitude de pensée quand, dans les soustractions partielles, les chiffres sont égaux :

Exemple :
$$\begin{array}{r} 323 \\ -\ 113 \\ \hline 133 \end{array}$$
on dira 3 ôté de 13 reste 3 et on retient 1
1 et 1 = 2 ôté de 12 reste 3 et on retient 1
1 et 1 = 2 ôté de 3 reste 1.

On remarquera que si les chiffres les plus à gauche sont identiques, on n'en tient pas compte.

exemple :
$$\begin{array}{r} 13223 \\ -\ 13113 \\ \hline 33 \end{array}$$
le 3e chiffre devient identique avec la retenue.

• La division enfin, reste une opération délicate car les quotients partiels ne doivent pas laisser apparaître de zéro. Je propose la méthode suivante qui a le tort de ne pas être véritablement intrinsèque. Peut-être qu'un lecteur en trouvera une qui le soit?

Exemple : 2 3 3 3 2 3 2 2 1 3	3 1	
2 3 3	3 . 1 . 2 . . 2	
3 2	3 . 1 . 1 3 . 2	
3 1	3 . 1 . 1 2 3 2	
1 3 2	3 . . 3 1 2 3 2	
1 3 2	2 3 . 3 1 2 3 2	
2 1 3	$\boxed{2\,2\,3\,3\,1\,2\,3\,2}$	= quotient
1 3 2		
reste = $\boxed{1\,1}$		

La division s'effectue normalement en laissant une place vide à chaque fois que le quotient partiel serait nul. (On a reporté les produits partiels à l'allemande.) Puis on transforme le quotient comme dans le passage de la base trois à la base trois prime.

• On peut s'intéresser aux critères de divisibilité. On retrouve des énoncés tout à fait analogues à ceux que l'on connaît. Par exemple en base b' un nombre est divisible par b - 1 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par b - 1. La seule différence notoire est qu'en base b' un nombre est divisible par b^n si et seulement si il se termine par b^n.

Exemple : En base trois prime les puissances successives de 3 sont
3, 23, 223 ..., 22... 23, ...
Donc : 1 2 3 3 **2 2 3** est divisible par 3^3 = 223.

§ 5. ECRITURE DES NOMBRES À VIRGULE

L'absence du zéro va entraîner quelques modifications pour l'écriture des nombres à virgule. Aucune difficulté pour comprendre

23, 12332 ou ,3132

cette dernière notation, de type anglo-saxon, nous étant imposée pour éviter l'emploi du zéro.

Une difficulté semble apparaître pour écrire une puissance négative de la base. L'écriture [0,0001] semble impossible mais le recours à la notation scientifique nous donne

1 . E - 11 ou 1×3^{-11} (en base trois prime).

N'a-t-on pas reculé pour mieux sauter ? Existe-t-il une manière simple d'écrire $12 + 1 \times 3^{-11}$? On remarque alors que 1 = , 3 = , 23 = , 223 =...=, 22 ...23 et par conséquent $12 + 1 \times 3^{-11}$ = 11, 2223 + 1 $\times$ 3^{-11}
= 11, 2231

Ces quelques recherches font surgir deux problèmes :

1°) Il n'y a pas unicité de l'écriture d'un nombre à virgule. C'est un problème voisin de celui qu'on rencontre avec la notation habituelle, en base dix :

1 = 1,0 = 1,00 = 1,000 = ... = 0,999...9...

On trouve de même en base trois prime :

1 = ,3 = ,23 = ,223 = ... = ,222...2...

Il n'y a unicité que si on s'interdit de terminer par la base, ici par un 3. On peut toujours le faire en supprimant ce 3 et en augmentant d'une unité le nombre qui apparaît en faisant alors abstraction de la virgule. On peut être amené à effectuer plusieurs fois cette opération :

2,233 = 2,31 2,2123 = 2,213 = 2,22.

2°) La comparaison de deux nombres est délicate. Il n'est pas évident que : 11,2231 > 12.

Pour comparer deux nombres à virgule, il faut qu'ils aient le même nombre de chiffres après la virgule. On comparera donc :

11,2231 et 11,2223

pour lesquels l'inégalité est évidente.

Cette difficulté n'est pas plus grande qu'en base dix. Les professeurs de collèges savent que les élèves buttent sur la comparaison de 2,21 et 2,3 puisque 3 est plus petit que 21.

§ 6. CONCLUSIONS

On connaît les difficultés et péripéties historiques qui ont conduit à l'adoption du zéro. On sait qu'initialement il a surtout servi à noter l'absence de boule dans une colonne du boulier, avant de devenir également opérateur. Or, il y a essentiellement deux types de boulier * pour une numération décimale : ceux qui comportent neuf boules par colonne et ceux qui en comportent dix. Le premier type conduit

(*) Je mets à part les bouliers chinois et japonais qui utilisent la décomposition de dix en facteurs premiers : 10 = 5 x 2.

naturellement à la numération en base dix. Le deuxième type aurait pu conduire à une numération en base dix prime puisqu'un tel boulier permet d'éviter des colonnes vides entre deux colonnes occupées, donc d'éviter l'emploi du zéro. Cela n'a pas eu lieu et je ne connais pas d'exemple historique d'une base dix prime ou de son esquisse.

Ce qu'il faut retenir est qu'il est faux de dire que seule l'invention du zéro opérateur a permis le développement d'une numération de position. Cette invention suffit mais elle n'est pas nécessaire. On peut en effet imaginer que les différents tabous qui ont gravité, et qui gravitent encore, autour de la notion de zéro (le texte de Ch. CROS en fait foi) aient pris suffisamment d'ampleur pour imposer une civilisation dont la numération serait en base dix prime. Seul, zéro n'aurait pu être noté. On peut toujours écrire et cela a été fait :

$2 - 2 =$ pour $2 - 2 = 0$

$3 >$ pour $3 > 0$

et si éventuellement un symbole est nécessaire on peut inventer l'écriture **T**, 3 (en base trois prime) en s'inspirant de l'ancienne notation des logarithmes des nombres inférieurs à 1.

Tous les livres d'arithmétique énoncent le théorème d'unicité de la décomposition d'un nombre entier dans une base donnée. Il serait bon de modifier le théorème de la façon suivante :

Théorème : $b \geqslant 2$ étant un entier donné (*), alors tout entier non nul x peut s'écrire de deux façons exactement sous la forme :

$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 b + a_o$,

la première où les $a_i \in \{0, 1, 2 \ldots b-1\}$ et $a_n \neq 0$

la seconde où les $a_i \in \{1, 2 \ldots\ldots b\}$.

Finalement, les certitudes les mieux établies, même en mathématiques, sont sujettes à révision.

(*) On peut même prendre $b < 0$, voir le cas $b = -2$ dans les Bulletin n° 262 et n° 271 de l'A.P.M.E.P. Je n'ai pas testé l'existence d'une numération en base moins deux prime.