UN SCENARIO, POUR LE CALCUL NUMERIQUE EN CLASSE DE QUATRIEME

François PLUVINAGE et Bernard BLOCHS

INTRODUCTION

L'an dernier, Bernard Blochs est venu au D.E.A. de Didactique des Mathématiques avec le souhait de tirer le meilleur parti des activités de calcul mental qu'il propose régulièrement à ses élèves de collège. Pour ce faire, il est apparu intéressant de considérer le calcul numérique en général, avec les trois principales techniques dont disposent les élèves : calcul mental, calcul machine et calcul papier-crayon. A partir du démarrage d'une activité en classe sur ce thème, nous avons régulièrement envisagé comment la développer. Sans préjuger des observations que Bernard Blochs rapportera dans son diplôme, et qui seront d'ailleurs complétées cette année, il me paraît possible dès à présent de soumettre le scénario qui suit aux collègues qui auraient envie d'essayer, en fin de quatrième ou en troisième, de faire des mathématiques dans leurs classes grâce au calcul. Le scénario ne détermine pas tout (heureusement), mais il permet au professeur de savoir vers quoi la classe se dirige. Par ailleurs, liberté est laissée au professeur de déterminer sur quelles activités parmi celles proposées il souhaite attribuer des notes à ses élèves.

Après le scénario, on trouvera en annexe les contenus précis choisis par Bernard Blochs pour chacune des activités.

HYPOTHÈSE PÉDAGOGIQUE

Si le fait de savoir mettre en oeuvre **une** technique de calcul renvoie à une formation qui reste étroitement limitée, celui de choisir entre **plusieurs** techniques, pour appliquer celles qui sont les plus efficaces pour traiter des calculs donnés, correspond à une formation mathématique réelle.

PRÉSENTATION DE LA PLACE DU SCÉNARIO DANS LA CLASSE

Le calcul est envisagé comme n'absorbant pas la totalité de l'activité des élèves. En début d'année, quelques séances de quelques minutes chacune sont proposées régulièrement aux élèves en calcul mental. Le scénario est prévu pour huit séances à raison d'une séquence hebdomadaire, sur les quatre de la classe en mathématique ; il se déroulera donc pendant une durée totale d'environ deux mois.

ACTIVITÉS NUMÉRO 1 : Une interrogation écrite de calcul avec autorisation d'utiliser des calculettes.

Consigne donnée aux élèves : "Vous allez avoir vingt calculs à effectuer. Pour chacun d'eux, vous pouvez vous servir de celles des trois techniques : calcul mental, calcul papier-crayon, calcul machine, qui vous paraissent les plus efficaces. Vous aurez simplement à entourer, à côté du résultat, la ou les techniques que vous aurez utilisées pour parvenir au résultat ; ces techniques sont indiquées en abrégé : Me pour le calcul mental, PC pour le calcul papier-crayon, Ma pour le calcul machine. Il est précisé, pour la correction, que seront comptées comme réussites uniquement les résultats exacts, pas des valeurs approchées".
Durée : jusqu'à la fin de la séquence scolaire.
Les feuilles distribuées aux élèves laissent une place pour écrire les calculs.

9°) $$\frac{\cancel{14} \times \overset{5}{\cancel{25}} \times \cancel{9}}{\underset{\cancel{9}}{\cancel{45}} \times \underset{2}{\cancel{28}} \times 18} = \frac{5}{2 \times 18}$$

Résultat

$$\frac{14 \times 25 \times 9}{45 \times 28 \times 18} = \frac{5}{36}$$

Technique(s) utilisée(s)

Me PC Ma

Exemple de question avec sa réponse. Ici, il y a calcul papier-crayon puisque des résultats intermédiaires (les simplifications) ont été notés.

Contenu de l'interrogation

L'interrogation comporte vingt questions. Les nombres en jeu sont soit des entiers, soit des décimaux, soit des fractions, éventuellement négatifs. Chaque calcul ne propose qu'une seule opération, éventuellement répétée (une suite de multiplications par exemple). Par rapport au calcul machine, il n'y a aucun problème d'introduction ni aucun dépassement de capacité. En revanche, pour quelques uns des calculs, la calculette ne donne pas le résultat exact comme demandé, mais arrondi.

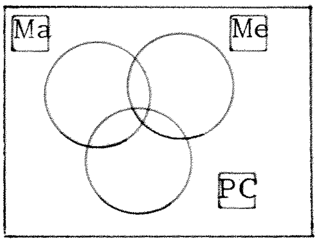
Correction des copies

Pour chaque élève et pour chaque question relever :

1° Réussite : R, Arrondi : A, Faux ou non-réponse : E (échec)

2° Relever la technique en hiérarchisant : Me < Ma < PC (si un élève entoure à la fois Me et Ma, on relève Ma).

ACTIVITÉ NUMÉRO 2 : "Corrigé" suivi de propositions



Le corrigé est aussi un compte-rendu :

-Nombres d'erreurs rapportés aux différentes techniques de calcul

-Techniques plutôt utilisées pour les divers exercices.

On essaie, lors de cette séance d'environ la moitié d'une séquence scolaire, de situer chaque énoncé dans le schéma ci-contre.

Deuxième partie de la séquence : il est demandé à chaque élève de trouver :

- quatre calculs bien adaptés au calcul mental,
- quatre calculs bien adaptés au calcul machine,
- quatre calculs bien adaptés au calcul papier-crayon.

ACTIVITÉ NUMÉRO 3 : Interrogation analogue à celle de l'activité numéro 1, et compte-rendu des propositions d'élèves.

Interrogation

La consigne est la même que dans l'activité numéro 1. Les feuilles fournies aux élèves ont la même organisation. La durée est d'une moitié de séquence scolaire (environ 25 minutes).

Contenu des exercices.

L'interrogation comporte dix questions. Chaque calcul ne propose qu'une opération, comme la première fois. Mais, à la différence de la première fois, il apparaît des calculs conduisant à des problèmes d'introduction des données et à des dépassements de capacité des calculettes. Certains exercices proposés en interrogation peuvent être choisis parmi ceux que les élèves ont proposés pour l'activité numéro 2.

Compte-rendu des propositions d'élèves

On essaiera de classer les propositions. Par exemple, on pourra relever différentes sortes d'obstructions en calcul machine : présence de fractions, de racines carrées, de variables, ou problèmes de gestion : pas ou capacité.

ACTIVITÉ NUMÉRO 4 : "Corrigé" de la deuxième interrogation et calcul mental.

Correction d'interrogation

Les mêmes éléments de compte-rendu que pour la première interrogation seront fournis. De plus, l'attention sera attirée sur l'évolution d'ordre de grandeur qui permet d'effectuer par ailleurs un calcul machine. Exemple : le calcul de 17000 × 780000 revient à celui de 17 × 780 si l'on sait que le résultat, soit 13260, est à faire suivre de six 0.

Calcul d'ordre de grandeur

Huit calculs sont proposés. Il ne s'agit pas de trouver le résultat, mais seulement le nombre de chiffres avant la virgule que comporte le résultat. La méthode est ici imposée : calcul mental. Les huit calculs présentent des décimaux, avec une seule opération (multiplication ou division) chaque fois.

ACTIVITÉ NUMÉRO 5 : Enchaînement de calculs

Consigne

On demande d'utiliser au mieux la calculette pour répondre aux cinq questions posées.

Contenu

Les exercices proposés ici ont été choisis chacun pour correspondre à un problème particulier de procédure machine. Nous les reproduisons ici, en explicitant le problème. Ainsi sera-t-il possible de leur substituer des variantes (nous en avons d'ailleurs indiquées dans certains cas).

1° Calculer $13! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 11 \times 12 \times 13$.

Variante : Calculer $2 \times 5 \times 8 \times 11 \times 14 \times 17 \times 20 \times 23 \times 26$.

Le problème est la saturation de l'affichage en cours de calcul.

Mais si on remarque alors que l'affichage se termine par des zéros, on peut supprimer ces zéros par une division par une puissance de 10 (à savoir 100 pour 13!) et ensuite terminer le calcul machine, pour n'avoir plus qu'à recopier le résultat, et lui rajouter en le recopiant les zéros manquants.

2° Calculer $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$.

Ici le calcul mental est possible et peut permettre de tester une procédure machine utile pour l'exercice suivant.

3° Calculer, avec la précision permise par la calculette :

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4,79}}} + 0,3.$$

(Variantes : Remplacer 4,79 par un autre nombre, compris entre 0,3 et 9). L'énoncé oblige à introduire d'abord 4,79, c'est-à-dire presque le nombre qui se lit en dernier, et à savoir obtenir l'inverse (1/x n'est pas une touche de calculette).

4° Calculer $-387 \times (20450 + 0,00045) + 386 \times 20503$

Variante : Calculer $18817 \times 7552,5 - 241,2 \times 7552,5 - 18817 \times 7434,87$.

Le but de l'exercice est d'amener à **appliquer** la distributivité de la multiplication sur l'addition. Dans l'énoncé proposé, le calcul est possible sous la forme de l'énoncé, mais l'erreur est grossière si l'on n'applique pas la distributivité. Dans la variante, le calcul n'est possible qu'en regroupant premier et troisième termes (suggestion : pour la variante, retourner la machine pour lire un commentaire, après le calcul exact).

Ce genre d'exercices est très important pour mettre en évidence que le signe "=" sépare des expressions qui ont, bien sûr, même valeur mathématique, mais pas même "valeur" pour ce qui est des traitements (on ne peut pas toujours substituer une expression à l'autre dans un calcul effectif).

5° En prévoyant une quantité moyenne de 125 g de pâtes par personne et par jour, remplir le tableau ci-dessous, prévu pour une colonnie de 28 enfants.

nombre de jours	1	2	3	4	5	6	7
quantité de pâtes							

Il s'agit ici d'avoir recours au facteur constant, pour éviter une manipulation fastidieuse.

ACTIVITÉ NUMÉRO 6 : Séance de travail sur calculatrices scientifiques

La séance du type "travaux dirigés", introduite par la correction de l'activité numéro 5 sur l'enchaînement des calculs et la reprise des exercices avec cette fois-ci des calculatrices scientifiques, a pour but de mettre en évidence les nouveautés des calculatrices scientifiques par rapport aux calculettes :

- puissances de 10,
- priorités opératoires et parenthésage,
- touche 1/x et autres fonctions,
- existence de chiffres de garde non visibles à l'affichage.

Une manipulation pour visualiser les chiffres de garde consiste à introduire le nombre π par la touche affectée à ce nombre, puis à retrancher 3,14159 (les six premiers chiffres de π) pour voir la différence qui apparaît.

ACTIVITÉ NUMÉRO 7 : Interrogation de calcul mental.

Vingt exercices sont proposés, dont certains amènent à **appliquer** les formules $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Quelques exercices comportent des variables, et dans certains cas, il est demandé de donner les résultats sous forme scientifique et sous forme normale (formes du type $a \times 10^n$, avec n entier relatif et a compris soit entre 0 et 1, soit entre 1 et 10).

ACTIVITÉ NUMÉRO 8 : Interrogation analogue à l'activité numéro 1, mais avec calculatrices scientifiques.

Dix calculs sont proposés, dont deux sont pratiquement des exercices de l'interrogation précédente (un est même rigoureusement identique). Il s'agit d'observer combien d'élèves, parmi ceux qui ont réussi les exercices correspondants en calcul mental, vont ici "assurer" en calcul machine.
Pour tous les exercices, le résultat exact est demandé, sauf pour un exercice, où le résultat n'est demandé qu'avec deux chiffres après la virgule :

Calculer $$\left(7,809^2 - \frac{3,92099}{4,0275 - 2,57}\right)^3$$

L'un des exercices proposé est particulièrement spectaculaire :

Calculer $P = 9x^4 - y^4 + 2y^2$ *(*)*
pour $x = 10864$ et $y = 18817$.

Si l'on n'utilise pas l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, pour les deux premiers termes de P, une calculatrice scientifique est très loin de fournir le résultat, qui est 1.

Variantes : $P = x^4 - 25y^4 + 2x^2$, pour $x = 12238$ et $y = 5473$
$P = 25x^4 - y^4 + 2y^2$, pour $x = 23184$ et $y = 51841$
(Résultats : -1 pour le premier cas et 1 pour le second).

SYNTHÈSE

Au fur et à mesure du déroulement des activités, un classeur rassemblant les sujets, les résultats d'ensemble et les observations pourra être constitué. Il pourra être mis à la disposition des élèves pour consultation (par exemple en restant au Centre de Documentation du collège).

(*) Voir à ce sujet l'article de M. de Cointet, dans ce même numéro.