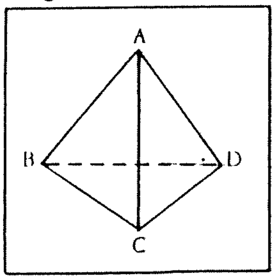
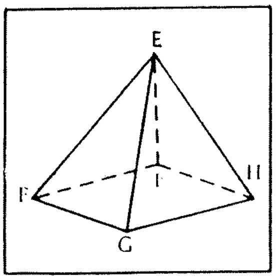
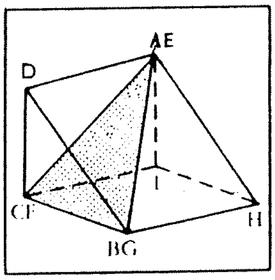
CINQ FACES ! PAS SEPT...

Dans l'OUVERT n° 37, l'énoncé suivant était reproduit :

"On considère deux pyramides dont toutes les arêtes ont la même longueur a. L'une est un tétraèdre régulier, l'autre une pyramide régulière à base carrée.
On recolle les deux pyramides selon une de leurs faces latérales en forme de triangle équilatéral"





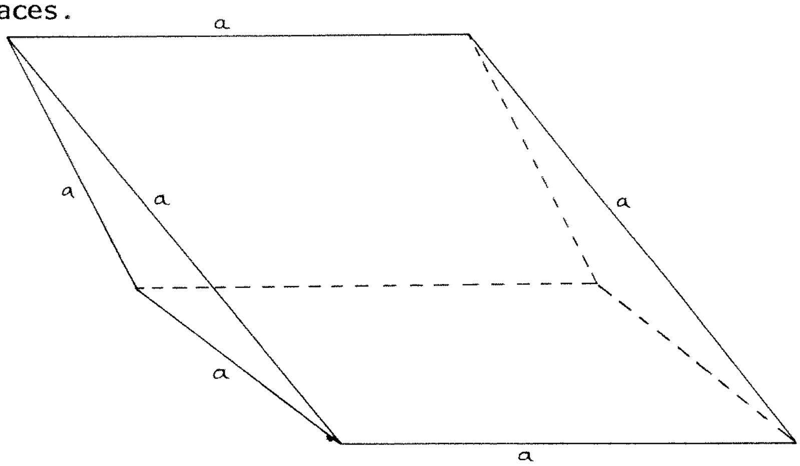


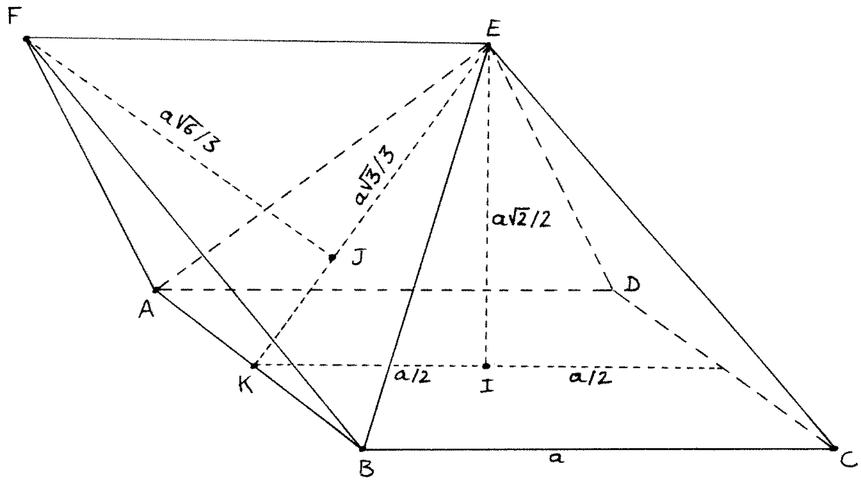
On obtient ainsi un polyèdre dont on demande le nombre de faces.

Les examinateurs avaient collé un zéro à tous les candidats qui n'avaient pas répondu 7. L'un d'entre eux avait protesté...

M. BAYARRI, de Cernay, nous a transmis son avis :

Le polyèdre en question a **cinq faces**. Plus précisément c'est un prisme oblique... assez régulier !

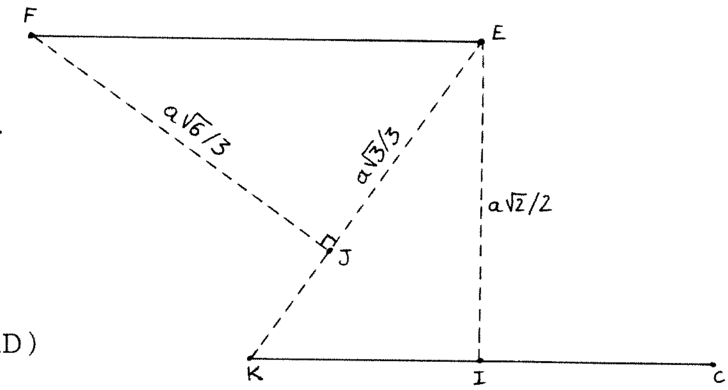




Ce schéma représente la situation : I est le centre du carré ABCD, [EI] est orthogonale au plan engendré par ce carré. J est le centre de gravité du triangle équilatéral AEB, [EK] est la médiane issue de E dans ce triangle ; [FJ] est orthogonale au plan AEB. Les mesures portées sur le schéma sont aisées à établir (T. de Pythagore, position du centre de gravité dans un triangle,...).

Le plan $\mathcal{P}$ contenant K e t orthogonal à (AB) contient I, E, J et F (I, E et J sont dans $\mathcal{P}$ car (IK), (EK) et (JK) sont orthogonales à (AB) ; de plus, (FJ), étant orthogonale au plan AEB, est forcément orthogonale à (AB), d'où F $\in \mathcal{P}$).

Représentons le polyèdre en coupe suivant le plan $\mathcal{P}$:



On a : tg $\widehat{FEJ} = \sqrt{2}$
et : tg $\widehat{JEI} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:
forcément l'angle $\widehat{FEI}$ est **droit** (pour deux angles α et β aigus, on a : "tg α tgβ = 1$\Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ "),
donc (FE) // (KI), or (KI)//(BC) d'où (FE) // (BC) et aussi (FE)//(AD) vu que (AD)//(BC).
Les plans FEB et BCE sont donc confondus, de même pour les plans FEA et AED ; **le polyèdre n'a donc que cinq faces.**

Mieux encore, remarquons que les quadrilatères FECB et FEDA sont des losanges (F, E, C et B sont coplanaires et FE = EC = CB = BF ; raisons analogues pour FEDA) ; le polyèdre est donc un prisme oblique, très régulier, car sa base est un triangle équilatéral de côté a, deux de ses faces latérales sont des losanges de côté a et la dernière est un carré de côté a !