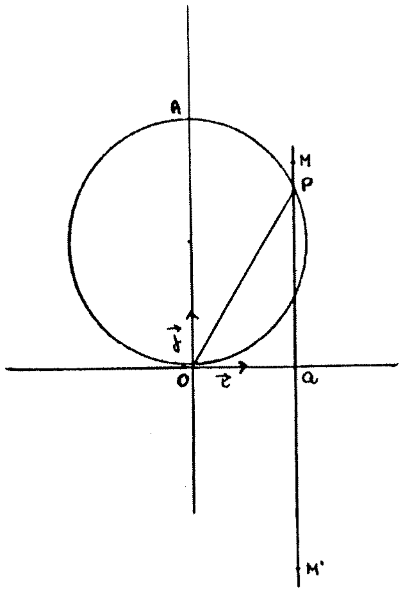
CONNAISSEZ-VOUS CETTE BROCHURE ?

Un florilège de constructions géométriques, quelques exercices de réflexion, des passages relatifs à l'Histoire des Mathématiques dans

"ACTIVITES GEOMETRIQUES de la Sixième à la Terminale"

Actuellement épuisée, cette brochure dont suivent quelques extraits, sera prochainement rééditée.

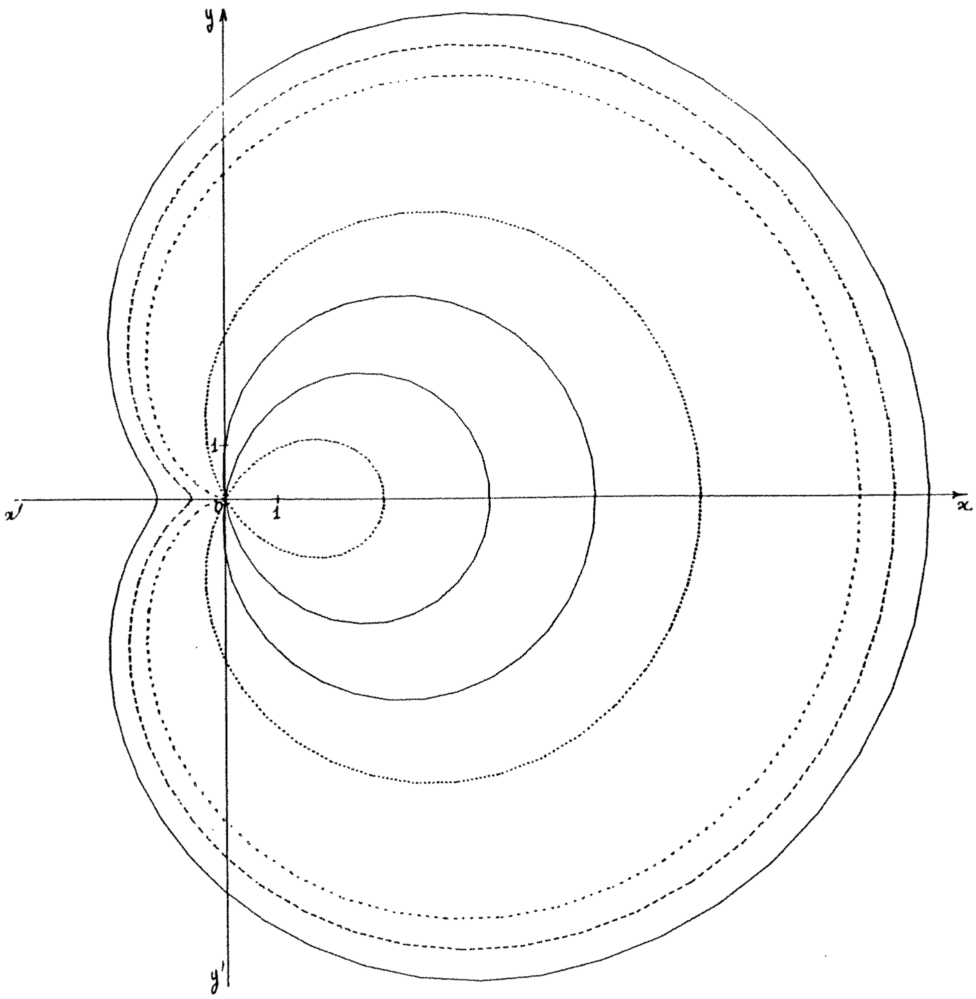
HUIT



Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on fixe un point A sur l'axe des ordonnées. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$. Une droite passant par O coupe le cercle $\mathcal{C}$ en P que l'on projette orthogonalement en Q sur l'axe des abscisses. Sur la droite (QP) on place les points M et M' tels que OP = QM = QM'.

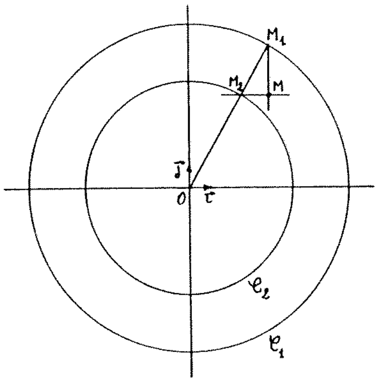
Lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$, M et M' décrivent un huit ou lemniscate de GERONO.

Cette courbe admet pour équation cartésienne $y^4 = a^2(y^2 - x^2)$



Quelques limaçons de PASCAL
La cardioïde figure parmi ces courbes.

10 Construction d'une ellipse à l'aide de deux cercles :



Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon r = 8 cm. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon r' = 5 cm. Une demi-droite d'origine O coupe le cercle $\mathscr{C}_1$ en M_1 et le cercle $\mathscr{C}_2$ en M_2. L'intersection de la parallèle à l'axe des abscisses passant par M_2 et de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M_1 est le point M.

Reprendre la construction précédente pour un certain nombre de demi-droites d'origine O. Tous les points M sont situés sur une ellipse.

Au XVIIIe siècle, la noblesse éclairée faisait souvent appel à des savants et des artistes pour meubler des loisirs d'une façon studieuse. Voici un passage de la correspondance d'Euler (1707 - 1783) à une princesse l'Allemagne.

La différence entre les méridiens de Berlin et de Magdebourg est d'1 degré 14 min. dont Berlin est plus oriental que Magdebourg: cette différence réduite en tems, donne 6 minutes 40 secondes, que les horloges de Berlin doivent marquer plus que celles de Magdebourg. Par conséquent s'il est midi à Magdebourg, ou si les horloges, que je suppose être bien réglées, y marquent XII heures, les horloges de Berlin doivent marquer au même instant 12 heures 6 min. 40 sec. de sorte qu'il y fasse déjà après midi.

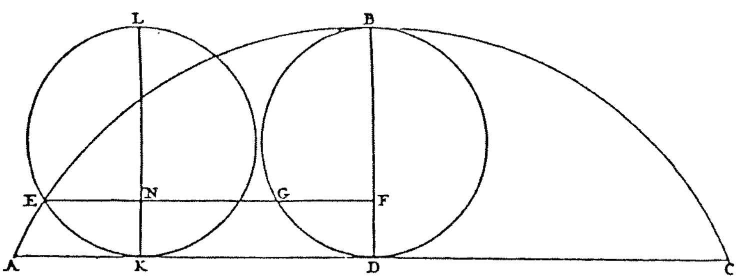
V.A. voit de là qu'à mesure que les lieux different en longitude, ou qu'ils sont situés sous des méridiens différens, les horloges bien réglées y doivent aussi marquer des heures différentes au même instant, et que cette différence doit être d'une heure entiere, lorsque la différence en longitude est de 15 degrés: chaques 15 degrés en longitude produisant une heure de tems pour la différence que des horloges bien réglées doivent marquer dans ces différens endroits au même moment.

Si l'on vouloit donc se servir d'une horloge pour trouver la longitude des endroits par lesquels on passe, il faut d'abord la bien régler en quelque endroit qu'on se trouve: ce Réglement se fait sur l'observation du midi, qui est le moment, où le Soleil passe par le méridien de ce lieu, et alors l'horloge doit montrer précisement XII heures.

PROPOSITION XIV.

Soit ABC *une cycloïde* [Fig. 35], AC *sa base*, BD *son axe. Je pense qu'on voit avec évidence comment cette ligne est engendrée suivant ce qui a été exposé plus haut sur sa définition et sa description mécanique* [1]. *Soit de plus* BGD *un cercle symétrique par rapport à l'axe* BD. *Traçons* EF *parallèlement à la base* AC *par un point* E *arbitrairement choisi sur la cycloïde, laquelle parallèle coupe l'axe* BD *en* F *et la circonférence* BGD *en* G. *Je dis que la droite* GE *est égale à l'arc* GB [2].

[Fig. 35.]

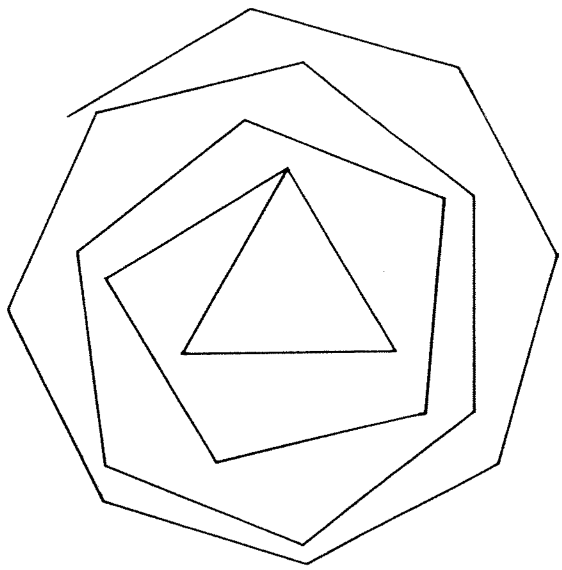


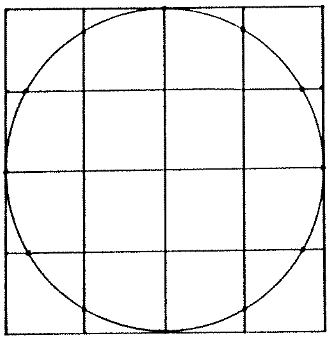
En effet, soit décrite par le point E une circonférence de cercle LEK égale à BGD et touchant la base de la cycloïde en K. Menons aussi le diamètre KL. La droite AK est donc égale à l'arc EK. Mais la longueur entière AD est égale à la demi-circonférence KEL; par conséquent KD est égale à l'arc EL ou GB. Or, KD ou NF est égale à EG, puisque EN = GF et que la partie NG leur est commune. Il est donc prouvé qu'on a aussi : GE = arc GB.

Christian HUYGENS (1629 - 1695) né à La Haye est célèbre par son ouvrage Horologium oscillatorium publié à Paris en 1673. Cet ouvrage présente ses découvertes sur le pendule qui s'étale sur une vingtaine d'années. Il veut adapter le pendule au réglage des horloges ce qui l'amène à innover en horlogerie et indirectement en mathématiques.

Dessin inspiré de tableaux de Max BILL

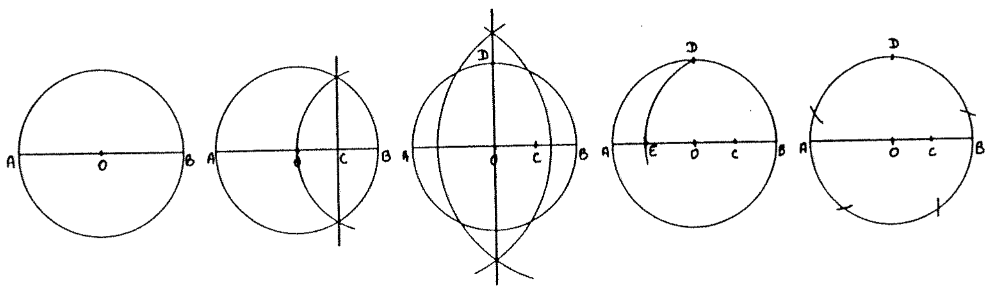
Reproduire ce dessin après avoir étudié les deux premiers paragraphes de ce chapitre.





Reproduire le dessin suivant .
Les points d'intersection du cercle et du quadrillage sont les sommets d'un dodécagone régulier.
Joindre ces points de 2 en 2, puis de 3 en 3 , de 4 en 4, de 5 en 5.
Quelles sont les figures obtenues ?

Construction à la règle et au compas du pentagone régulier

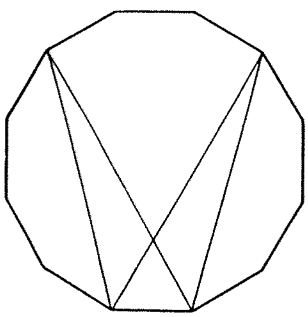


Puzzle

Here is an interesting puzzle. It is called a *dissection* puzzle and the problem is to cut a regular dodecagon up into pieces that can be rearranged to form a square. Some dissection puzzles were discovered by the Greeks, and in the 10th century a Persian mathematician wrote an entire book about them. Another book has been written recently by the world's current expert on dissection puzzles, a man who lives in Australia.*

Place a sheet of paper underneath the large dodecagon you constructed in Set I and poke a hole with the metal point of your compass at each of the 12 corners. Now join the 12 holes on your new sheet of paper to form another dodecagon and then draw in 4 more line segments like those shown in the figure at the top of this page to divide it into 6 parts. Notice that the resulting figure has line symmetry and that one of the 6 parts seems to be an equilateral triangle.

Cut the 6 pieces apart with scissors and try to rearrange them to form a square. If you can, make a sketch to show what the arrangement of the pieces looks like.



Le mathématicien a laissé nombre d'études qui nous sont parvenues telles : "De l'Equilibre des plans"... "Sur la Sphère et le Cylindre"... "L'Arénaire", où Archimède expose un système de numération des grands nombres (calcul des grains de sable pouvant être enfermés dans la Sphère du Monde ; mais calculs limités à un ensemble fini), le "Traité de la méthode" (texte retrouvé en 1906 où Archimède communique à Eratosthène comment il conduit ses recherches ; ce palimpseste découvert parmi les manuscrits du Patriarcat grec de Jérusalem, reconnu puis traduit par Heiberg comme fragment de l'œuvre d'Archimède, contient la majeure partie du texte grec sur ce Traité de la méthode), "Des corps flottants" où apparaît le très célèbre "Principe d'Archimède" et qui peut toujours être considéré comme le manuel de base de tout ingénieur naval, et essentiellement pour ce qui nous intéresse "La mesure du cercle" (voir suite) où Archimède exhibe l'encadrement célèbre $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

L'ingénieur en chef de Syracuse sut en effet merveilleusement défendre sa ville assaillie par les Romains (2ème guerre punique). Divers historiens : Polybe (IIe siècle avant J.-C.), Tite-Live (Ier siècle avant J.-C.) ou Plutarque (Ier siècle après J.-C.), nous rapportent (voir Ver Eecke qui nous fournit des extraits significatifs de ces auteurs) avec une grande précision les inventions toujours renouvelées d'Archimède : balistes ou catapultes permettant aux Syracusains de "bombarder" la flotte ennemie depuis le haut des murailles, mains de fer attachées à une chaîne et qui jetées sur les navires ennemis les saisissent alors par la proue, les élèvent à la verticale en utilisant un levier et un énorme contrepoids pour les laisser brutalement retomber,...

XLI

Puisqu'il ne s'agit donc que de mesurer une seule pyramide, pour savoir mesurer toutes les autres pyramides imaginables, proposons-nous en une extrêmement simple, qu'on peut former en tirant des quatre angles A, B, C, H (Fig. 58), d'une des faces d'un cube ABCDEFGH, quatre lignes au point O, centre de ce cube ; c'est-à-dire, le point également distant de A, D, B, E etc. On voit, sans peine, que la pyramide est la sixième partie du cube, puisqu'on peut décomposer le cube en six pyramides pareilles, en prenant chaque face pour base. Or, la valeur du cube est le produit de la hauteur AF par la base ABCH. Donc, pour avoir la valeur de la pyramide, il faudra partager le produit de AF par ABCH, en six parties égales, ou ce

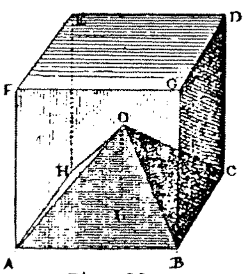


Fig. 58

qui revient au même, il faudra multiplier la sixième partie de la hauteur AF par la base ABCH ; et comme la sixième partie de la hauteur AF est le tiers de la hauteur OL de la pyramide OABCH, puisque sa hauteur OL est la moitié du côté du cube, il s'ensuit que la mesure de la pyramide OABCH est le produit du tiers de sa hauteur par sa base.

π SUR PIERRE TOMBALE

Les travaux d'Archimède auraient légitimé que π soit appelé le nombre d'Archimède. Il n'en est rien. Mais π sera appelé nombre de Ludolf. Citons Minois [MIN].

"En 1596, Ludolf van KEULEN (= Louis de Cologne) calcule 20 chiffres décimaux. Sa renommée est tellement grande qu'en Europe Centrale, π est appelé le nombre de Ludolf et la découverte est tellement admirée qu'une copie de ce π l'accompagne sur son tombeau, à Leyde :

HIC IACET SEPULTUS MR. LUDOLFF VAN CEULEN, PROFESSOR BELGICUS, DUM VIVERET MATHEMATICARUM SCIENTIARIUM IN ATHENAEO HUIUS URBIS, NATUS HILDESHILMIA ANNO 1540, DIE XXVIII IANUARII, ET DENATUS XXXI DECEMBRIS, 1610, QUI IN VITA SUA MULTO LABORE CIRCUMFERENTIAE CIRCULI PROXIMAM RATIONEM AD DIAMETRUM INVENIT SEQUENTEM. QUANDO DIAMETER EST 1, TUM CIRCULI CIRCUMFERENTIA PLUS EST QUAM

314159265358979323846264338327950288
1000000000000000000000000000000000000

ET MINUS QUAM
314159265358979323846264338327950289
1000000000000000000000000000000000000;

SED QUANDO DIAMETER EST
1000000000000000000000000000000000000,

TUM EST CIRCULI CIRCUMFERENTIA PLUS QUAM
314159265358979323846264338327950288

& MINUS QUAM
314159265358979323846264338327950289."

Alexis Claude CLAIRAUT participe à l'expédition en Laponie consacrée à la mesure de la longueur d'un degré de méridien. A son retour il brille dans les salons littéraires et scientifiques. Sa réputation lui vaut de donner des leçons de mathématiques à la Marquise du Chatelet pour qui il rédige les Eléments de Géométrie (1741).

Voici enfin, à titre de curiosité, comment ÉDOUARD LAGOUT, dans ses leçons de « tachymétrie » (1876), arrive à déterminer le volume de la sphère : son procédé est inspiré de celui de BHASKARA. « Une graine de platane est formée d'une grande quantité de pyramides hérissées autour du noyau central. De la réalité à la science, on doit supposer ce noyau très petit, se réduisant à un point invisible dans lequel se joindraient tous les sommets des pyramides.

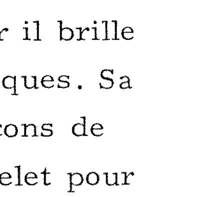
L'enveloppe de la sphère, étant égale à 4 cercles faits sur le rayon, sera uniformisée par un plateau formé de 4 planches jointives égales chacune à l'aire d'un cercle. Il ne restera plus qu'à uniformiser toutes les pyramides en hérisson, et pour cela je les implante sur le plateau. Elles seront jointes par les bases et ne laisseront aucun vide.

Ainsi implantées, elles présentent l'aspect d'une mâchoire de crocodile sur laquelle il faut hardiment mettre la main (de l'esprit) pour les aplatir uniformément au *tiers de la hauteur*. Alors la mâchoire, c'est-à-dire la sphère, est changée en un plateau, et ce plateau a pour hauteur le tiers du rayon. On aura donc par les opérations de l'*Algèbre tachymétrique* :

$$\text{Sphère, volume} \begin{cases} = \text{plateau} \times 1/3 \text{ du rayon} \\ = 4 \text{ aires de cercle} \times 1/3 \text{ rayon} \\ = 1/3 \times (4 \text{ aires de cercle} \times \text{rayon}) \end{cases}$$

N'oubliez pas les 4 planches faisant chacune l'aire du cercle ; la mâchoire de crocodile vous fera souvenir des pointes que l'on uniformise en les aplatissant au tiers. »

Pyramide de base S, de hauteur h, de volume V



Parallélépipède de base S, de hauteur $\frac{R}{3}$, de même volume V.