
LES MATHÉMATIQUES, ECOLE DE LA RIGUEUR ?

Francis COUTURE (*)

Les mathématiques sont périodiquement l'objet de controverses dont l'enjeu est tantôt la place qu'elles doivent prendre ou plutôt conserver par rapport aux autres disciplines d'enseignement, tantôt la pédagogie elle-même quand la place est solidement assurée.

Aux heures favorables à leur hégémonie, les mathématiques sont l'avenir, on n'en fait jamais assez ; le débat, le problème, est de savoir comment les faire : ce sont les grandes heures de la pédagogie ; aux heures sombres, disons aux heures les moins claires car la raison ou la lumière restent ce qu'elles sont, même voilées, on fait trop de mathématiques ; il faut faire un peu de place aux pauvres, à la technologie en particulier, autrefois subordonnée, aujourd'hui maîtresse par la grâce de notre ministre qui semble avoir compris que cette pauvre-là est destinée à nous enrichir pourvu qu'on encourage un peu la dialectique maître-esclave (ce qui est un aspect du socialisme).

Il ne faut en conclure aucune déchéance véritable de l'ancien seigneur : même dans cette optique utilitariste qui appelle les mathématiques à servir avec plus d'application, si je puis dire, "les besoins économiques" de la nation (ainsi peut-on entendre la notion de mathématiques appliquées), **les mathématiques sont et restent par excellence l'école de la raison et de la rigueur.**

De cela, personne ou presque ne doute ; la controverse semble inexistante sur ce point : si sporadiquement les sciences et la technologie d'une part, les lettres et les arts d'autre part, demandent une meilleure part, en aucun cas ils n'osent revendiquer leur part de la raison pure ou de la rigueur ; c'est au nom de la complémentarité qu'est présentée la requête : pour les Lettres,

(*) F. Couture est professeur de Philosophie de l'éducation à l'Ecole Normale de Strasbourg. Il enseigne également au Département d'Informatique de l'I.U.T. Strasbourg III.

l'esprit de géométrie aurait tendance à négliger sa compagne, l'esprit de finesse (*) ; et pour la technologie, la géométrie oublierait tout simplement ses origines, l'arpentage. En ces temps de rigueur économique, on demande à la rigueur intellectuelle de bien vouloir coopérer ; en aucun cas on ne conteste son lieu d'élection, les mathématiques.

Les excellentes intentions de M. Chevènement de développer "l'esprit critique", "la pensée logique", "le sens de la rigueur" (**) chez les élèves (et pourquoi pas également chez les maîtres et un tout petit peu chez les ministres ?) ne s'accompagnent d'aucune analyse des notions en jeu, d'aucun appel à débattre de ce que signifient le raisonnement et la pensée critique qu'il tient si fort à promouvoir.

Dans le discours pédagogique comme dans le discours politique, on entretient à loisir la plus grande confusion entre mathématiques, pensée logique, raisonnement, rigueur, et pensée ou esprit critique, comme si les termes s'identifiaient de proche en proche, occultant par contiguïté les "petites différences".

Si l'on juxtapose les extrémités de la chaîne, personne n'osera identifier l'esprit critique aux mathématiques, et pourtant tout se passe comme si la notion de raisonnement réalisait le moyen terme idéalement symbolisé par le pôle "mathématiques".

PLUS ON "FAIT DE MATHS", MOINS ON RAISONNE

On ne peut pas dire que l'exercice scolaire des mathématiques soit sans danger pour l'éducation du raisonnement ; pour beaucoup d'élèves, "faire des maths" (***) équivaut à déraisonner : plus ils en font, moins ils raisonnent. Je ne vois pas l'intérêt de demander avec insistance aux mathématiques de se mettre au service des technologies quand elles sont déjà le plus souvent enseignées comme une technologie au service des technologies. Dans ce sens, il n'y a pire école du raisonnement que celle des mathématiques et l'on aurait beaucoup à prendre et à apprendre des anciennes classes de rhétorique.

(*) cf Pascal "L'esprit de géométrie et l'esprit de finesse", Pensées.

(**) cf "Le Monde" du 7/12/84 et du 30/1/85.

(***) "faire des maths" est pris ici au sens scolaire.

Il est utile de rappeler, non pas bien sûr aux théoriciens de la logique ou de l'argumentation, mais aux pédagogues et aux politiques qui ont en charge l'éducation de la pensée, que le raisonnement, dans son acception la plus générale, ne se limite pas aux procédures logico-déductives (ce qui rendrait d'ailleurs pléonastique l'expression "raisonnement logique"), mais qu'il désigne toute démarche discursive permettant d'enchaîner les idées : l'induction (sous ses formes non réductibles à la déduction analytique) et l'analogie sont deux formes particulièrement courantes de raisonnement, même si elles n'ont pas la validité formelle de la déduction, seule "rigueur" reconnue. On peut aussi rappeler aux pédagogues que les mathématiques ne sont pas LA logique, qu'elles-mêmes sont une mise en oeuvre, privilégiée il est vrai, de certaines procédures logiques.

C'est d'ailleurs cette notion de démarche rationnelle (ou raisonnement en général), plus large que celle de raisonnement hypothético-déductif, qui autorise à parler du raisonnement du physicien, de l'historien, du mathématicien et, au sein même des mathématiques, à parler du raisonnement du géomètre, de l'analyste, etc...

Alors je pose la question : n'y aurait-il d'autre rigueur, dans tous ces raisonnements, que celle du calcul ? Toutes ces disciplines ne tiendraient-elles leur rigueur que de la rigueur mathématique qu'il conviendrait de leur "appliquer" ? Les esprits les plus ouverts au développement des lettres et des sciences conçoivent constamment cette ouverture comme relevant de l'imagination ou de l'intuition (*) ; les mathématiciens-chercheurs (ou simplement intelligents) eux-mêmes revendiquent cette complémentarité irrationnelle, sorte de "complément d'âme" conférant à leur discipline une dimension artistique ou esthétique.

Si la notion de rigueur qualifie très légitimement la procédure hypothético-déductive (ou démonstrative), dite aussi formelle dans la mesure où sa validité est indépendante du sens des objets sur lesquels elle porte, elle peut tout aussi légitimement prétendre à qualifier l'exigence qui s'attache au sens de ces objets. A ce niveau interviennent les notions en jeu appartenant à la

(*)

"Pour le professeur de philosophie, l'esprit scientifique n'est pas seulement rigueur, objectivité, logique, mais implique aussi curiosité, imagination, inquiétude, généralement considérées par les pédagogues comme caractéristiques de l'"esprit littéraire". *"Il faudrait que l'on cesse d'opposer dans l'école ces deux types d'aptitudes"* remarque Mme Rollin. Certes, les enseignants doivent transmettre l'esprit de rigueur à tous les élèves, mais ils doivent amener ceux-ci à appliquer, dans les autres disciplines, les relations logiques apprises en cours de maths. *"Opérer ce transfert est la condition-clé de la réussite des études".*

sémantique du domaine considéré, sortes d'objets ou de matériaux de base qui seront traités selon les figures rationnelles du niveau logique (déduction mais aussi induction et analogie comme je l'ai dit plus haut) : le point, la droite par exemple sont de tels objets non sémantiquement neutres, sauf à leur conférer éventuellement cette neutralité par convention dans une axiomatique formalisée (géométrie axiomatisée).

"PRENEZ SOIN DU SENS, ET LES SONS PRENDRONT SOIN D'EUX-MÊMES"

C'est sur la nature de ces objets ou notions que je voudrais insister : c'est là précisément que réside le danger de l'exercice scolaire (et universitaire dans une large mesure) des mathématiques pour le raisonnement en général, c'est-à-dire pour le raisonnement s'exerçant dans d'autres domaines que celui des mathématiques : je pense particulièrement à la vie courante, quotidienne, où, à partir de notions empiriques, nous faisons un usage constant du raisonnement.

Le domaine scientifique et plus spécialement celui des mathématiques, non seulement exige l'univocité des notions et leur stabilité sémantique (ou permanence) le long de la chaîne discursive, ce qui est parfaitement légitime en même temps qu'absolument nécessaire pour la validité de tout raisonnement ("scientifique" ou non) mais encore et surtout **habitue** l'esprit à cette univocité : sur le plan, si capital pour le raisonnement, de la réflexion sur le sens des notions utilisées, l'entraînement mathématique est particulièrement stérile, voire dangereux ; habituée à ne considérer dans les raisonnements que des objets monosémiques (univoques), la pensée est très tôt conditionnée à privilégier de façon quasi-exclusive l'aspect syntaxique formel au détriment de l'aspect sémantique. Dans le meilleur des cas, quand il y a ambiguïté sémantique, quand un même symbole désigne au moins deux réalités mathématiques différentes, l'attention est attirée sur le danger de la confusion et ce, préalablement à la "mise en route" du processus "logique". En aucun cas le raisonnement lui-même ne produit ses objets par différenciation des notions floues, sauf précisément dans la recherche ; on peut citer comme exemple d'un tel travail de production conceptuel la réflexion menée par Russell sur la notion d'ensemble, le raisonnement sur cette notion ayant conduit au célèbre "paradoxe des classes".

On peut d'ailleurs considérer le paradoxe en général comme le lieu privilégié du raisonnement réflexif, aussi bien dans le domaine de la pensée empirique quotidienne que dans le domaine scientifique ; il est par excellence le révélé-

lateur des ambiguïtés notionnelles.

Je donnerai ici un exemple de cette carence réflexive et rationnelle, tiré de ma pratique d'enseignant, essentiellement consacrée à l'éducation du raisonnement :

A la question : *"Comment entendez-vous cette opinion attribuée à Fouché, à propos de l'assassinat du duc d'Enghien :*

"c'est plus qu'un crime, c'est une faute",

plus des 2/3 des étudiants de 1^{ère} et 2^{ème} année en informatique à l'I.U.T. ont affirmé que la phrase ne signifiait rien, qu'elle était absurde parce que le crime appartenait à l'ensemble des fautes ; l'un d'entre eux a même déclaré que l'auteur de cette opinion ne savait pas raisonner ! Un seul a montré qu'il avait parfaitement compris le propos en le transposant au cas d'Eloi Machoro (indépendamment de la véracité des affirmations selon lesquelles Enghien ou Machoro auraient effectivement été assassinés). Très peu ont compris dans ce propos de Fouché que le crime se référait à l'ordre moral des particuliers et que la faute se référait à l'ordre politique, que l'ordre politique transcendait de fait et de droit l'ordre moral des particuliers, ce qui est d'ailleurs contestable : la peine de mort infligée par l'état n'est pas un crime (juridiquement parlant), encore qu'elle puisse être considérée comme tel au regard de la morale individuelle.

Je pourrais proposer un très grand nombre de raisonnements du même genre qui témoignent tous de l'application mécanique de modèles mathématiques inadéquats, avec en prime l'assurance chez leurs auteurs de raisonner avec "rigueur". Je n'ajouterai qu'un exemple pour la saveur et l'humour : Alfred Polgar, écrivain et journaliste autrichien, déclarait : *"A Salzbourg, il y a plus d'antisémites que d'habitants"* ! J'ai obtenu, pour interpréter ce mot d'esprit le même type de raisonnements "logiquement corrects", renvoyant A. Polgar à ses études de mathématiques (ou l'invitant à les entreprendre).

Peut-être objectera-t-on que ce ne sont pas les meilleurs étudiants en mathématiques qui raisonnent ainsi ; 1/3 des étudiants environ ont interprété les énoncés de façon souple sinon de façon toujours pertinente. Je me propose d'ailleurs de faire une étude de corrélation entre les résultats en mathématiques des étudiants (tous de niveau Bac C) et leurs résultats dans ce genre d'exercice ; mais de toute façon, les "meilleurs" étudiants en mathématiques sont peut-être aussi ceux qui ne limitent pas leur raisonnement à l'application

mécanique des procédures et des modèles. Dans tous les cas cela prouve la prégnance des modèles mathématiques et du formalisme mal assimilés chez l'étudiant moyen. Or les raisonnements de l'étudiant moyen m'intéressent et devraient intéresser les pédagogues et les politiques.

J'insiste sur le fait que les raisonnements incriminés plus haut ne le sont pas du point de vue de la validité formelle, compte tenu de l'interprétation des notions. Un raisonnement peut à la fois être non-contradictoire et idiot. Sous prétexte que la pertinence de l'interprétation est impossible à établir sur des critères mécaniques, l'interprétation elle-même est reléguée dans les eaux troubles du subjectif ; je pense au contraire qu'elle constitue un excellent objet d'étude (sinon un excellent objet scientifique) et qu'une certaine rigueur peut y être associée. La "rigueur de l'interprétation" ne me semble pas être une notion inconvenante, si différente soit-elle de la rigueur formaliste qui sévit dans l'enseignement, en France tout particulièrement (Descartes a été, à cet égard, une véritable catastrophe nationale).

Je répète que cet apprentissage forcené du formalisme me semble hautement préjudiciable à la formation du raisonnement et que, réduire l'exercice de la pensée aux procédures formelles, technicistes ou algorithmiques, c'est oublier un aspect tout aussi capital, tout aussi essentiel : le sens ; c'est confondre le raisonnement logique et la réflexion : c'est aussi se préparer à vivre dans une société d'experts spécialisés dans la fabrication de pensées séquentielles unidimensionnelles.

"Take care of the sense, and the sounds will take care of themselves" dit la Duchesse à Alice (*). Lewis Carroll, logicien du XIXème siècle pose ainsi le primat du signifié sur le signifiant.

LA SUBTILITÉ COMME RIGUEUR

Cette attention portée au sens, on pourrait l'appeler "subtilité" : la subtilité ne se confond ni avec l'intuition (créatrice, irrationnelle, etc...), ni surtout avec l'exigence mécanique et naïve qui prétend fixer le sens des mots ou notions au départ d'un raisonnement ou d'une discussion.

(*) "Prenez soin du sens, les sons prendront soin d'eux-mêmes". Lewis Carroll, Alice au Pays des Merveilles, chapitre IX.

Cette façon d'entendre l'attention au sens ramène une fois encore le raisonnement au raisonnement déductif ; elle ignore que le raisonnement, en tant que pensée et non en tant que simple calcul, est autant un travail de production du sens (d'élucidation, d'explicitation et de dévoilement du sens) qu'une mise en oeuvre syntaxique de significations préétablies.

Sans doute, s'entendre au départ sur le sens de certains mots, peut servir la communication rationnelle jusqu'à un certain point ; mais ce n'est pas là l'essentiel d'une démarche rationnelle : si l'on pouvait s'entendre ainsi, le débat pourrait sans inconvénient majeur s'arrêter à cette entente préalable.

On peut ainsi développer une conception de la subtilité comme rigueur intellectuelle. Les tenants de la rigueur déductive demanderont si la subtilité peut s'enseigner, auquel cas elle-même n'éviterait pas le piège des procédures mécaniques.

Je répondrai que la subtilité peut s'éduquer et que, en tant que rationnelle, elle n'est pas étrangère à une démarche méthodique, en rappelant que toute méthode n'est pas calcul ; cependant comme toute méthode, elle risque effectivement la dégradation. Dans le cadre de cet article, j'indique simplement la direction des recherches que j'entreprends sur cette question.

Si le problème pédagogique du raisonnement n'est pas "d'appliquer" les règles logiques apprises en cours de mathématiques et ce, dans la mesure où cette "application" reste nécessairement entachée des procédures et des conditionnements propres à l'activité mathématique, le problème pédagogique urgent est alors d'initier à la logique pour elle-même, en entendant par Logique non seulement l'étude du calcul, propositionnel ou fonctionnel, mais aussi et

surtout l'étude des problèmes d'interprétation sémantique que la logique soulève. La "méthode" particulière que je propose est une approche de ces problèmes d'interprétation par le paradoxe et le non-sens.

Paradoxe et non-sens me semblent être par excellence, les vecteurs de cette subtilité rationnelle que je tiens pour une forme authentique de la rigueur intellectuelle.

N.B. : Cet article vise essentiellement le mythe de la "bonne formation mathématique" en tant que légataire exclusif des biens rationnels ; il ne met en cause ni l'intérêt d'une formation en mathématiques, ni la nécessité d'une formation logique formaliste à laquelle l'étude des mathématiques contribue effectivement.

J'ai par ailleurs conscience d'avoir avancé plusieurs affirmations de façon un peu elliptique ; je suis disposé à apporter des compléments d'analyse sur certains points du texte si le voeu en est exprimé.

Je souhaiterais enfin que s'instaure un débat sur les questions soulevées par cet article et sur la nécessité notamment de développer en France un enseignement spécifique de la logique et d'argumentation.