L'ALGÈBRE ARABE

A. DJEBBAR

On entend par algèbre arabe l'ensemble des ouvrages d'enseignement et de recherche, écrits en arabe, entre le VIII^e et le XVI^e siècle, et traitant de problèmes touchant à l'algèbre.

Malgré le silence des bio-bibliographes, il semble que l'algèbre arabe s'est constituée à partir d'un héritage babylonien constitué de problèmes et d'algorithmes de résolution des équations du premier et du second degré. Quant à l'héritage grec, dans ce domaine, il est quasi nul au moment de la naissance de cette nouvelle discipline. En effet, à la fin du VII^e siècle, la lecture des éléments d'Euclide reste géométrique et les arithmétiques de Diophante ne sont pas encore traduites (elles le seront au X^e siècle).

1. — La formation de l'école algébrique arabe a lieu à partir du IX^e siècle. Le principal personnage, dans l'état actuel de nos connaissances est : Al-Khwarizmi (780-850) qui écrit dans le cadre de la maison de la sagesse (Bayt-al-Hikma) qui est une sorte de petit CNRS ([1]). Il écrit un traité comportant environ un tiers de théorie pour deux tiers d'exercices d'application. Ce traité a pour but de répondre aux questions de tous les jours (héritage - commerce - arpentage ...). D'autres savants de son époque ont existé (malgré les controverses sur leurs apports), tels que Ibn Turk qui n'est connu qu'à partir de son petit-fils mais dont un ouvrage a été retrouvé récemment et édité par Sayili, et que Sanad Ibn Ali dont le livre a été perdu.

Cette école propose la résolution de l'équation du second degré suivant six cas modèles. Il faut en effet se souvenir que les nombres négatifs, pourtant connus et manipulés par les indiens, n'apparaîssent pas dans la tradition mathématique arabe. Ce que nous écririons :

$ax^2 = bx$ est écrit *les carrés égalent les choses,*
$ax^2 = c$ est écrit *les carrés égalent les nombres,*

a et b sont entiers puis très vite fractionnaires. Petit à petit, ils seront aussi irrationnels sous la forme $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$; $n \pm \sqrt{m}$ (appelés binômes quand il

([1]) Il a eu pour élève son propre calife : El Ma mun (813-833).

y a le signe + et apotomes quand il y a le signe -). Ce sont les nombres sourds. Il s'y ajoutera bientôt les racines de ces mêmes quantités (2).

2. — Après le travail de l'école d'Al-Kwarizmi qui avait donné les équations canoniques (pour le second degré), les algorithmes de résolution, les justifications théoriques et géométriques ainsi que les procédés de mathématisation (ce qui permet de se ramener à l'équation canonique par Al-Jabr (restauration) et Al-Mugābala (comparaison)), on assiste à un développement grâce à la tradition d'Abū Kāmil (Y 930).

L'oeuvre d'Abū Kāmil fut essentiellement connue en Europe grâce à une traduction en hébreu faite au XV^{e} siècle par Mordechaï Finzi.

Des nombres irrationnels quadratiques et biquadratiques interviennent désormais dans les équations, comme coefficients et comme racines.

Voici par exemple la méthode (traduite en notation moderne) de résolution du problème suivant :

$$\begin{aligned} a+b &= 10 \\ (a/b)^2-(b/a)^2 &= 2 \quad . \end{aligned}$$

On cherche a et b.

On pose $a=x$ et $b=10-x$. Alors $a/b=x/(10-x)$.

On pose $y=(10-x)/x$. Alors $1/y^2=y^2+2$ soit $y^4+2y^2=1$.

On pose $X=y^2$. Alors $X=\sqrt{2}-1$ puis $y=\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Donc $(10-x)/x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Une méthode de résolution directe conduirait ensuite à

$$x=\frac{10}{1+\sqrt{\sqrt{2}-1}}\simeq 6,0842$$

mais la division par un irrationnel biquadratique est difficile (mais connue). Par souci pédagogique il termine de la façon suivante :

$$\left(\frac{10-x}{x}\right)^2=\sqrt{2}-1$$

pour se ramener à une équation du 2^{e} degré.

---

(2) Notons toutefois que 1 acquière le statut de nombre chez Ibn Mun^{c}im (621 de l'Hégire) et que Ibn Al-Bannā (1256-1321) parle de base non décimale. Mais ces deux savants font exception et seront vivement critiqués par Ibn Hajdūr (Y 1403).

On remarquera également, à travers cet exemple, l'utilisation par Abu Kamil du changement d'inconnue, méthode que l'on retrouve dans d'autres domaines des mathématiques arabes.

Dans la même école, on trouve le *livre des carrés, des cubes, et de ce qui est au-delà* par Sinan Ibn Al-Fath qui signale qu'il a lu le livre d'Al Khwarizmi, qu'il l'a commenté et qu'il tient à faire la théorie des nouveaux objets que certains mathématiciens utilisent. Il s'agit essentiellement du travail sur les monômes. Il introduit x^3 (cube), x^4 (carré-carré), x^5 (Midad) et généralise les six équations canoniques. C'est ainsi que l'équation $ax^2 + bx = c$ est généralisée par $ax^{2n+p} + bx^{n+p} = cx^p$, $n \in \mathbf{N}$; $p \in \mathbf{N}$.

Compte tenu des outils mathématiques de l'époque et de l'absence de symbolisme, cette généralisation n'est pas *évidente* au X^e siècle.

La notation et le symbolisme resteront d'ailleurs des problèmes difficiles. A partir des XII^e et XIII^e siècles, on note l'apparition d'abréviations.

جذر (racine) conduit à ـجـ qui est peut-être l'ancêtre de notre $\sqrt{\ }$.

شيء (chose) conduit à ـش pour l'inconnue x.

مال conduit à ـمـ pour le carré x^2.

كعب (le cube-objet) donne ـكـ pour le cube x^3. (On notera que كعبة est la Kaaba qui a justement la forme d'un cube). Ainsi, par exemple, $12x^5$ se noterait $\overset{\text{مك}}{12}$.

3. — Avec la tradition d'Al-Karaji (٧ 1029) apparaît la manipulation des polynômes : addition, soustraction, multiplication et surtout division. Cette même tradition fera une place importante au contenu des *Arithmétiques de Diophante* (dont certains chapitres sont même reproduits dans le livre al-Fakhri d'al-Karaji). C'est à son école que l'on doit *le livre splendide* (al-Bahir) de As-samaw'al (٧ 1175). As-samaw'al introduit la division des polynômes, quels que soient les coefficients, et fournit une méthode de calcul de $\sqrt{P(x)}$ ... où $P(x)$ est toutefois un carré parfait.

On trouvera même plus tard (au XIV^e siècle) chez Al-Qatrawani une méthode de calcul de $\sqrt[3]{P(x)}$. Cela permet d'introduire de façon assez naturelle le triangle de Pascal sous forme des coefficients du binôme mais pas sous forme combinatoire. Au XIII^e siècle, un mathématicien du Maghreb, Ibn Mun^c im construira le même triangle mais en suivant une démarche strictement combinatoire. Il ne fera d'ailleurs pas le lien entre les C_n^p qu'il a obtenus et les coefficients du binôme.

4. — Avec la tradition de ᶜUmar Al-Khayyām († 1139), s'élabore la théorie géométrique des équations cubiques, après que l'on se soit intéressé aux problèmes de duplication du cube et de trisection de l'angle, problèmes qui seront résolus grâce aux coniques d'Appolonius.

Cette tradition commence par la tentation de résolution algébrique d'un problème grec :

Dans le livre II de la sphère et du cylindre d'Archimède, la 4ᵉ proposition étudie le rapport des volumes des calottes sphériques déterminées par l'intersection d'un plan et d'une sphère. Pour cela, il utilise un lemme dont il reporte la démonstration à plus tard mais qu'il ne démontre pas dans son livre. Al-Māhānī (888) essaie une reconstitution de cette démonstration. Il ramène le problème d'Archimède à la résolution de l'équation du 3ᵉ degré : $x^3 + ax^2 = b$. *Ayant échoué dans la résolution par radicaux, il conclut à l'impossibilité de ce problème.*

C'est Abul Jūd (Xᵉ et début du XIᵉ siècle) qui résout géométriquement un certain nombre d'équations du 3ᵉ degré mais c'est à Umar Al-Khayyām que l'on doit la résolution des 25 types d'équation du 3ᵉ degré (n'oublions pas que les nombres négatifs ne sont toujours pas utilisés).

Plus tard, Sharaf ad-Dīu at-Tūsī, reprendra l'étude de ces 25 équations en adoptant une démarche nouvelle où les propriétés algébriques des coniques sont systématiquement utilisées et où les solutions géométriques sont accompagnées de solutions approchées obtenues par la méthode dite de Hörner.