

A VOS STYLOS

PROBLÈME 6

Énoncé

Pour $\varepsilon > 0$, soit \mathcal{M}^ε l'ensemble des matrices 3×3 , à coefficients positifs ou nuls, telles que la somme de chaque colonne soit 1 et que l'une au moins des lignes ait tous ses coefficients plus grands que ε . Montrer que si $(M_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans \mathcal{M}^ε , le produit infini

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \times \dots$$

converge. La limite est-elle toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} ?$$

Solution de Pierre RENFER (nous avons également reçu une solution de Jacques MULLER et une de Christian CUVIER).

Soit

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

une matrice de \mathcal{M}^ε .

Il lui correspond un endomorphisme f de l'espace vectoriel R^3 .

Comme la somme des colonnes est 1, l'application f conserve le plan affine p de R^3 , d'équation : $x + y + z = 1$.

Soient $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$, $A_3 = (0, 0, 1)$. L'application f transforme A_1 en A'_1 , barycentre des points pondérés :

$$(A_1, a_{11}), (A_2, a_{21}), (A_3, a_{31}).$$

Soit T l'intérieur du triangle $A_1A_2A_3$ (arêtes comprises). L'image de T par f est l'intérieur T' du triangle $A'_1A'_2A'_3$. Si les coefficients de la ligne i sont tous supérieurs à ε , alors T' est inclus dans le transformé de T par l'homothétie de centre A_1 , de rapport $(1 - \varepsilon)$.

Donc : aire $(T) \leq (1 - \varepsilon)^2$ aire (T') .

A VOS STYLOS

Soit T_n le transformé de T par la composée de n applications associées à des matrices de \mathcal{M}^ε . Alors : aire $(T_n) \leq (1 - \varepsilon)^{2n}$ aire (T) . La limite de l'aire de T_n est donc nulle et la composée a pour limite une application constante de matrice :

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) est l'unique point commun à tous les triangles T_n .

PROBLÈME 7

Énoncé

Soit une fonction de deux variables $f(x, y)$ telle que, pour tout x , $P_x(y) = f(x, y)$ est un polynôme en y et, pour tout y , $Q_y(x) = f(x, y)$ est un polynôme en x . Est-ce que f est un polynôme à deux variables ?

Indication

Oui dans \mathbb{R} , non dans \mathbb{Q} .

PROBLÈME 8

Énoncé

Appelons \mathbb{Q} rectangle, tout rectangle dont le rapport des côtés est rationnel. Démontrer que tout rectangle pavé par des \mathbb{Q} rectangles est lui-même un \mathbb{Q} rectangle.

MATHÉMATIQUES À VENIR Actes du colloque

Enfin édités comme supplément au bulletin de la S.M.F. (Société Mathématique de France) (*), les actes du colloque "*Mathématiques à venir*" méritent le détour. Trois grands thèmes y sont abordés et débattus :

- les mathématiques et les sciences;
- mathématiques et industrie;
- mathématiques et société.

On trouvera dans cette dernière partie de nombreuses études et statistiques sur la place des mathématiques et des mathématiciens (ou mathématiciennes) dans notre société.

Il ne faut pas cependant oublier les deux autres parties qui contiennent des comptes rendus de débats ou de conférences de très bonne facture, de haut niveau et qui restent toujours lisibles, même pour le non-spécialiste. Par exemple :

- modélisation et mathématiques dans le projet HERMES;
- débat sur l'analyse non-standard;
- concepts abstraits et quantités numériques (par A. CONNES).

(*) A commander chez Gauthier-Villars (400 pages, 200 F).