

A VOS STYLOS

Dix problèmes vous ont déjà été proposés dans cette rubrique. C'est certainement trop tôt pour un bilan, mais l'expérience acquise depuis deux ans et demi est une bonne occasion pour rectifier un peu le tir.

1) Nous recevons peu de réponses pour chaque problème. Ceci pouvant être dû au délai finalement assez court entre la parution d'un énoncé et l'impression de sa solution, nous allons vous laisser chercher un peu plus longtemps en différant de trois mois la solution de chaque problème. C'est pourquoi vous trouvez aujourd'hui deux nouveaux énoncés, le 11 qui sera corrigé selon l'ancien régime dans deux numéros et le 12 qui le sera seulement dans trois numéros.

2) Nous recevons encore bien moins de propositions d'énoncés. Vos contributions seraient pourtant d'autant mieux venues qu'elles élargiraient l'éventail des sujets proposés et seraient, sans doute, plus proches des préoccupations des lecteurs.

PROBLÈME 9

Énoncé

Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(0,0) = 0$ et que $f(x,y)$ soit le plus petit entier qui ne soit pas de la forme $f(x',y)$ avec $x' < x$ ou $f(x,y')$ avec $y' < y$. Fournir une méthode de calcul de f aussi simple que possible.

Solution

A partir des écritures binaires de x et y , on obtient celle de $f(x,y)$ en effectuant, chiffre à chiffre, l'addition sans retenue, c'est-à-dire suivant la table

	0	1
0	0	1
1	1	0

La démonstration peut se faire en vérifiant, par récurrence sur n , que

- pour $x, y < 2^n$, $f(x,y)$ existe, est unique et donnée par l'algorithme ci-dessus;

- $\forall x < 2^n \{f(x,y), y < 2^n\} = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$
- $\forall y < 2^n \{f(x,y), x < 2^n\} = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$.

C'est en effet vrai pour $n = 0$ (car $f(0,0) = 0$); et si c'est vrai pour n , alors pour x et y plus petits que 2^n ,

$$f(x + 2^n, y) = 2^n + f(x, y)$$

A VOS STYLOS

(appliquer l'hypothèse de récurrence à $g(x, y) = f(x + 2^n, y) - 2^n$)

$$f(x, y + 2^n) = 2^n + f(x, y)$$

(appliquer l'hypothèse de récurrence à $h(x, y) = f(x, y + 2^n) - 2^n$) et

$$f(x + 2^n, y + 2^n) = f(x, y);$$

d'où le résultat $n + 1$.

PROBLÈME 10

(proposé par D. DUMONT)

Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, \dots\}$ dont on propose trois définitions :

Définition 1 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 + xy + y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

Définition 2 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 - xy + y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

Définition 3 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 + 3y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

1°) Montrer que ces trois définitions sont bien équivalentes.

2°) Montrer que E est stable pour la multiplication, c'est-à-dire que $n_1 \in E$ et $n_2 \in E \Rightarrow n_1 n_2 \in E$.

3°) Soit $P = \{3, 7, 13, 19, 31, 37, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers appartenant à E . Montrer que P se compose de 3 et de l'ensemble des nombres premiers de la forme $6k + 1$, et que pour ces nombres premiers la représentation sous la forme $x^2 + 3y^2$ est unique. En outre, si p est de la forme $6k + 1$ alors $4p$ s'écrit de manière unique comme suit :

$$4p = x^2 + 27y^2 \quad (x, y \text{ entiers } > 0).$$

Indication Penser à FERMAT pour démontrer que p premier de la forme $6k + 1$ implique p est de la forme $x^2 + 3y^2$.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 11

Énoncé

Trouver le plus petit entier positif k pour lequel il existe un polynôme à coefficients entiers, de degré k , de la forme

$$P(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$$

et tel que, pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$, $P(x)$ soit divisible par un milliard.

PROBLÈME 12

Énoncé

Soit Ω un ouvert non vide du plan. Deux points C (chat) et S (souris) sont mobiles dans Ω et choisissent chacun à chaque instant leur vitesse, le module de cette dernière étant toutefois limité à un intervalle $[0, V]$, où la vitesse maximale V est la même pour C et S . On demande, selon la forme de Ω , si C a une stratégie imparable pour finir par rattraper S , si au contraire S a un moyen certain de toujours échapper à C , ou si ni l'un ni l'autre de ces deux cas ne se présente.

HOMMAGE AUX MATHÉMATIQUES

Ô chiffres, ô axiomes, ô théorèmes,
Je voudrais vous dire "Je t'aime" (ô hypocrisie!!)
Et pourtant j'ai souvenance
De quelques mémorables nuits blanches,
Où Thalès et son compère Pythagore
Se disputaient mon esprit tourmenté.
Les chiffres se livraient à une danse
aussi diabolique que frénétique.
Dans l'enfer de l'algèbre,
les suites se déchaînaient.
Ô combien j'ai souffert pour vous,
cruelles équations!
Mais je ne vous en tiendrai pas rigueur.
Mathématiques, je vous aime.

Camille HAUPTMANN
Annick ZECHEL
élèves du Lycée J. Monnet.