

JEUX ET MATHÉMATIQUES

Miguel de GUZMÁN

Mathématiques, art et jeux

Les mathématiques sont une activité humaine aux mille facettes. Il s'agit, bien sûr, d'une science; mais qui plus est, c'est un exemple et un modèle de toute activité scientifique. C'est un instrument puissant pour l'exploration de l'univers et pour l'utilisation judicieuse des ressources naturelles qui sont à notre disposition. C'est un modèle de pensée qui tout au long des siècles a servi de champ privilégié pour l'étude des capacités de l'esprit humain.

Mais les mathématiques ont aussi été et continuent d'être un art et un jeu authentique et cette composante artistique ou ludique est tellement inhérente au développement des mathématiques que tout champ de travail mathématique qui n'atteint pas un niveau certain du point de vue esthétique reste instable jusqu'à l'obtention d'une expression mieux finie qui doit mener à une vision plaisante, intéressante, harmonieuse et unitaire de la même façon qu'un poème ou une symphonie inachevée tend, dans l'esprit de son auteur, à la plus belle des formes possible.

Dans ce qui suit nous analyserons rapidement les liens entre mathématiques et jeux en laissant de côté la composante artistique qui a été relevée par plusieurs auteurs parmi lesquels George David BIRKHOFF, Helmut HASSE, Andreas SPEISER, Hermann WEYL ...

La nature des jeux

Les jeux ont été analysés de façon approfondie par le sociologue Johann HUIZINGA dans son œuvre *Homo Ludens*. Il relève comme caractéristiques d'un jeu les traits suivants :

- Le jeu est une *activité libre*, libre au sens du grec "*paideia*" c'est-à-dire une activité que l'on développe pour elle-même et non pas pour en tirer un quelconque profit.
- Il a une *fonction certaine* dans le développement de l'individu. Le petit d'homme comme le petit animal, joue et se prépare ainsi de lui-même à la compétition et à la vie. L'homme adulte joue et ce faisant il obtient une sensation de libération, d'évasion et de délassement.

- Un jeu *n'est pas une plaisanterie*. Les jeux nécessitent une certaine ardeur. Il n'y a pire gâcheur que celui qui ne prend pas le jeu au sérieux.
- Le jeu, comme la création artistique, procure du *plaisir aussi bien au spectateur qu'au participant*.
- *Il est indépendant de la vie ordinaire*, dans le temps et dans l'espace.
- *Il contient des éléments de tension* dont la rupture et la libération sont source de plaisir.
- Le jeu permet la création de *liens spéciaux* entre les joueurs, une sorte de fraternité.
- A travers ses règles, le jeu crée un *nouvel ordre*, une nouvelle vie, pleine de rythme et d'harmonie.

Une analyse superficielle de l'activité mathématique nous permet de vérifier que tous ces traits sont présents dans bien de ses manifestations. Ainsi donc, les mathématiques sont, de part leur nature profonde, un jeu, bien que ce jeu recouvre d'autres aspects comme l'aspect scientifique, l'aspect "*instrument*", l'aspect philosophique, qui tous ensemble font des mathématiques un des piliers essentiels de la culture humaine.

La pratique des mathématiques et les jeux

Si jeux et mathématiques ont autant de points communs quant à leur finalité et leur nature, il n'en est pas moins vrai qu'ils partagent aussi les mêmes traits essentiels en ce qui concerne leur pratique. Ceci est particulièrement intéressant quand on se demande quelle est la méthode la plus adéquate pour transmettre à un large public le profond intérêt et l'enthousiasme que les mathématiques peuvent engendrer et pour amener ce même public à une première initiation sur les méthodes et les moyens utilisés en mathématiques.

Tout jeu commence par la donnée d'un ensemble de règles, d'un certain nombre d'objets ou de pièces dont la fonction est définie par ces règles de la même façon que les objets d'une théorie mathématique sont déterminés par une définition implicite : "*On se donne trois systèmes d'objets. Nous appellerons points les objets du premier système ...*".

Quiconque débute dans la pratique d'un jeu doit acquérir une certaine familiarisation avec ces règles, avec les liens entre les différentes pièces, de la même façon que le novice en mathématiques compare et fait interagir les premiers éléments d'une théorie. Ce sont les exercices élémentaires d'un jeu ou d'une théorie mathématique.

Le joueur qui progresse dans la maîtrise du jeu peut acquérir quelques techniques pratiques simples qui, dans des circonstances qui apparaissent assez souvent, conduisent à une fin gagnante. Ce sont les lemmes de base et les faits de la théorie qui sont facilement accessibles dès qu'on se heurte à la résolution de problèmes simples du domaine considéré.

Une exploration plus approfondie d'un jeu qui possède une longue tradition donne à l'amateur une connaissance des procédures et méthodes particulières que les grands maîtres du jeu ont laissé à la postérité. Ce sont les mouvements et les stratégies à un niveau plus complexe et plus profond qui demandent une compréhension spécifique car ils sont fort éloignés des éléments initiaux du jeu. Cela correspond en mathématique à la phase dans laquelle l'étudiant essaye d'assimiler et de faire siens les grands théorèmes et les principales méthodes qui ont été créés au cours des âges sur le sujet. Ce sont les processus de pensée des esprits réellement créatifs qui sont maintenant à sa disposition lui permettant de se débrouiller au milieu de situations confuses et délicates.

Plus tard, dans les parties les plus sophistiquées là où le stock de problèmes ne sera jamais épuisé, le joueur chevronné essaye de résoudre de façon originale des situations de jeu qui n'avaient jamais été explorées auparavant. Ceci correspond à la recherche de problèmes ouverts d'une théorie mathématique.

Enfin quelques individus sont capables de créer de nouvelles parties, riches de situations et d'idées intéressantes qui font apparaître des stratégies originales et des styles novateurs. Ceci est parallèle à la création de nouvelles théories mathématiques fertiles en idées et problèmes et rendant possible des applications pour faire face à d'autres problèmes ouverts et pour explorer plus avant certains niveaux de la réalité qui jusqu'à maintenant étaient restés dans l'ombre.

L'impact des jeux sur les mathématiques

Très fréquemment dans l'histoire des mathématiques une question intéressante posée sous forme de jeu ou une observation astucieuse sur une situation apparemment sans mystère conduit à de nouveaux modes de pensée. C'est cet état d'esprit qui permet à la science de progresser fortement. Il faut des gens capables de porter un regard nouveau hors des contraintes et des modes habituelles, loin du cadre strict et rigoureux dans lequel la science officielle se place habituellement.

Les débuts de l'analyse combinatoire se trouvent dans le "*Livre des substitutions*" (I. CHING) avec la distribution des différents symboles divinatoires et la construction, également en Chine, des carrés magiques aux connotations mystiques.

Les jeux de calculs (*psefoi*) des pythagoriciens, donnèrent naissance à d'intéressants théorèmes de théorie des nombres. Les paradoxes de ZÉNON, doivent probablement être compris comme une satire des méthodes en vigueur parmi les mathématiciens de l'époque. EUCLIDE lui-même utilise une série de problèmes erronés dans un de ses livres, *Pseudaria*, comme motivation de ses étudiants pour les amener à penser correctement. ARCHIMÈDE, avec son *problème des bœufs* et l'*arénaire* fait face à une situation originale, à la façon d'un jeu, afin d'aiguiser ses instruments mathématiques.

La liste des objets mathématiques qui ont été créés par esprit de jeux est sans fin. Il suffit de relever quelques noms de célèbres mathématiciens auxquels on peut penser dans ce contexte : FIBONACCI, CARDAN, FERMAT, PASCAL, LEIBNIZ,

EULER, D. BERNOULLI, GAUSS, HAMILTON, HILBERT, von NEUMANN . . . Un résumé court mais très riche de l'évolution des récréations mathématiques se trouve dans l'article de W.-L. SCHAAF "*Number games and other mathematical recreations*" de l'Encyclopædia Britannica.

Mathématiques dans les jeux

La richesse des thèmes mathématiques dans les jeux classiques et modernes est impressionnante. La meilleure façon de s'en rendre compte est de parcourir les œuvres de LUCAS ou de BALL (BALL et COXETER) et aussi la compilation bibliographique faite par W.-L. SCHAAF sur la littérature actuelle sur les jeux et publiés par "*The National Council of Teachers of Mathematics*" (*).

A côté de l'arithmétique, de la géométrie, de la théorie des nombres, comme sources traditionnelles de récréations il faut citer la topologie, la géométrie combinatoire, la théorie des graphes, la logique, les probabilités, . . . Dans tous ces domaines nouveaux ou anciens, il y a un nombre incalculable de problèmes ouverts d'aspect amusant ou attirant qui sont sans doute aussi faciles à énoncer que difficile à résoudre, comme par exemple le dernier "théorème" de FERMAT et qui, comme lui, attendent probablement la création de nouveaux processus de pensée qui pourront jeter quelque lumière sur leur solution. A propos de beaucoup d'entre eux, personne ne saurait dire s'ils doivent être classés dans le domaine des mathématiques sérieuses ou dans celui des puzzles ou des bizarreries sans intérêts. On peut sûrement affirmer que n'importe quel jeu ou puzzle suffisamment profond peut avoir de très importantes répercussions sur des aspects intéressants des mathématiques. Dans la création de jeux ou de puzzles, l'homme peut laisser courir son imagination en toute liberté sans être contraint par des liens conceptuels ou méthodologiques de la théorie traditionnelle.

L'esprit des jeux dans les mathématiques

Il y a beaucoup de mathématiques profondes qui ont la saveur des jeux. Parmi les exemples modernes, on peut en choisir quelques uns pour lesquels cela est évident. Certains d'entre eux peuvent servir de base à des jeux d'entraînements et d'amusements :

- Le théorème des 4 couleurs : toute carte plane peut être coloriée selon certaines règles à l'aide de 4 couleurs.
- Théorème de RAMSEY (version élémentaire) : on se donne six points sur une circonférence et on joint tous les couples par un segment soit bleu soit rouge. Alors à la fin il y a toujours un triangle dont les côtés ont la même couleur.
- Le lemme de SPERNER : on triangule un triangle ABC , c'est-à-dire qu'on effectue une partition du triangle ABC en triangles plus petits de telle façon que deux d'entre eux sont soit disjoints soit n'ont qu'un côté ou qu'un sommet en commun. On donne aux sommets de la triangulation les nombres A, B, C . En imposant la

(*) N.D.L.R. : Les fascicules JEUX 1 et JEUX 2, publiés par l'A.P.M.E.P. sont une excellente introduction pour les francophones.

seule condition de n'y avoir aucun sommet de nom C sur le côté AB du grand triangle de nom A sur BC et de nom B sur CA , alors il y a toujours au moins un triangle de la triangulation dont les sommets sont A, B, C .

- Problème de KAKEYA : trouver la borne inférieure des aires de toutes les figures planes à l'intérieur desquelles une aiguille de longueur unité peut être retournée de façon continue (de manière à échanger la position de ses extrémités).
- Les théorèmes du point fixe.
- Les billards triangulaires.
- Le théorème de HELLY.
- La conjecture de HADWIGER.
- La conjecture de BORSUK.

Les jeux mathématiques comme instrument d'enseignement et de vulgarisation des mathématiques.

Martin GARDNER à évalué la situation très correctement : *“La meilleure façon d'intéresser un étudiant est sûrement de lui présenter un jeu mathématique intrigant, un puzzle, un tour de magie, une plaisanterie, un paradoxe, un modèle concret, un petit poème ou n'importe lequel d'une vingtaine de choses que les professeurs obtus essayent d'éviter parce que cela leur paraît frivole (préface de “Carnaval mathématique”)*.

L'expert mathématicien commence son approche d'une question dans le même esprit que celui d'un enfant commençant à manipuler un nouveau jouet, prêt à la surprise, ayant une profonde curiosité face au mystère qu'il espère éclaircir, faisant un effort agréable vers la découverte. Pourquoi n'aurions nous pas le même esprit de jeu dans notre approche pédagogique des mathématiques? Un jeu mathématique bien choisi peut conduire l'étudiant de n'importe quel niveau au meilleur point d'observation pour chacun des sujets qu'il doit affronter. Les bénéfices en seront nombreux : punch, ouverture, motivation, intérêt, enthousiasme, amusement.

D'un autre côté la similitude de structure entre mathématiques et jeu nous permet de commencer à exercer par le jeu les mêmes outils, les mêmes stratégies de pensée que celles qui sont utiles dans les situations mathématiques. En particulier l'apprentissage des capacités heuristiques en mathématiques peut être réussi par la pratique de bien des jeux comme cela a été magnifiquement montré dans le travail d'AVERBACH et CHEIN *“Problem solving through mathematical games”* a travers une très riche collection de jeux.

Mais par dessus tout cette approche ludique des sujets mathématiques les plus sérieux peut bénéficier profondément à l'étudiant et influencer de façon positive toute son attitude envers les diverses situations mathématiques pour le restant de sa vie en lui montrant comment se placer dans un état d'esprit correct pour affronter des problèmes mathématiques.

Du point de vue de la vulgarisation des mathématiques l'efficacité des jeux mathématiques est tellement évident que je n'ai pas besoin de m'y étendre. Dans la dédicace du récent ouvrage de BERLEKAMP, CONWAY et GUY "*Winning ways for your mathematical games*" les auteurs écrivent, de façon tout à fait justifiée : "A *Martin GARDNER qui a révélé plus de mathématiques à plus de gens que quiconque*". Mathématiques et jeux comme nous l'avons vu, sont souvent indiscernables quant à leur contenu, mais qui plus est dans l'état d'esprit avec lequel on doit les approcher.

Les mathématiques sont un grand jeu sophistiqué qui, d'un autre côté, peuvent être un travail d'art intellectuel apportant en même temps une lumière intense pour explorer l'univers et ayant de grandes répercussions pratiques. Les essais de vulgarisation des mathématiques à travers ses applications, son histoire, la biographie des mathématiciens les plus intéressants, à travers ses liens avec la philosophie ou d'autres aspects de l'esprit humain peuvent très bien servir à faire connaître les mathématiques à beaucoup de gens. Mais sans doute aucune autre méthode ne peut mieux montrer ce qui signifie faire des mathématiques qu'un jeu bien choisi.

Je vais te lire une liste de choses, pour chacune dis-moi si à ton avis elle est scientifique ou pas scientifique :

	<i>Scientifique</i>	<i>Pas scientifique</i>	<i>SR</i>
<i>La physique</i>	94	6	0
<i>La médecine</i>	90	10	0
<i>La météo</i>	60	39	1
<i>Les horoscopes</i>	39	60	1
<i>Les mathématiques</i>	74	25	1
<i>La biologie</i>	87	13	0
<i>L'histoire</i>	22	77	1
<i>L'informatique</i>	71	28	1
<i>La politique</i>	8	90	2

Les sciences majeures, reconnues comme telles par la grande majorité des enfants [sont] : la physique, la médecine, la biologie, les mathématiques. La réponse positive augmente généralement avec l'âge et avec l'avancement dans le cycle scolaire; toutefois le statut scientifique des mathématiques s'affirme plus tardivement que les autres disciplines sans doute parce que l'existence à l'école de cours de mathématiques distincts des cours de sciences maintient pour les plus jeunes une certaine ambiguïté.