

# QUOI DE NEUF CONCERNANT LES TRIANGLES RECTANGLES ?

Alain ROBERT

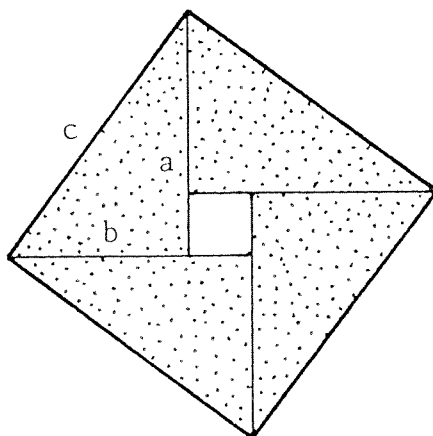
Les triangles rectangles ont été étudiés depuis la plus haute antiquité et le théorème de PYTHAGORE était connu des Chinois au deuxième millénaire avant Jésus-CHRIST. Par contre, le problème des nombres congruents, liés aux triangles rectangles rationnels ayant une aire entière, n'est étudié que depuis le XII<sup>e</sup> siècle de notre ère. Ce n'est que tout récemment (1983) que TUNNEL a pu donner une condition nécessaire pour qu'un entier soit congruent. La conjecture de BIRCH et SWINNERTON-DYER permettrait de démontrer que la condition donnée par TUNNEL est suffisante. Ainsi, l'histoire n'est encore pas terminée ...

## 1.— LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

Dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit  $a$  et  $b$  sont reliés à l'hypothénuse  $c$  par la relation :

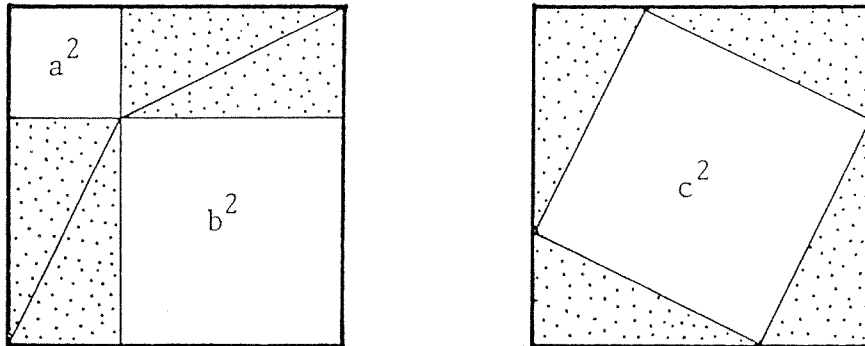
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Inversement, cette relation caractérise les triangles rectangles. Ce fait semble déjà avoir été connu des Chinois au deuxième millénaire avant Jésus CHRIST puisqu'on trouve une *démonstration* de cette relation dans le plus ancien manuscrit chinois mathématique connu, le Chon-peï. Du moins, on y trouve une preuve visuelle que le triangle rectangle de côtés 3 et 4 a une hypothénuse de 5 ... L'argument visuel a été repris dans le fameux Lilavati écrit par le mathématicien indien BHASKARA (1114-1158).



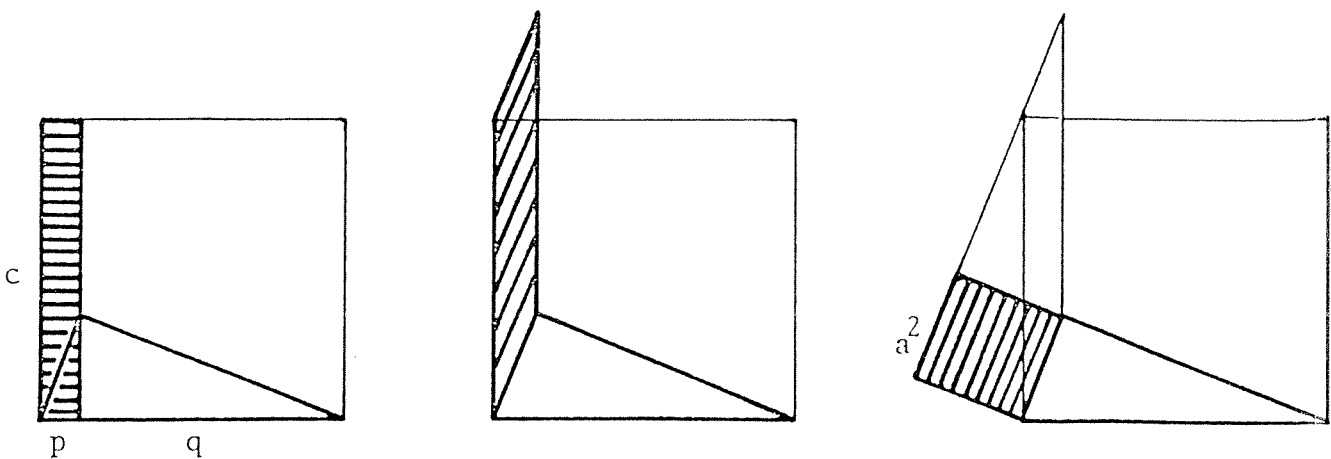
$$4\left(\frac{1}{2}ab\right) + (a - b)^2 = c^2 \implies a^2 + b^2 = c^2.$$

Voici un argument visuel probablement encore plus simple!



Contemplez!

Celui d'EUCLIDE est légèrement plus complexe, mais aussi plus précis.



$$a^2 = pc \text{ et } b^2 = qc \implies a^2 + b^2 = (p + q)c = c^2.$$

Pour construire des triangles rectangles à côtés entiers, PYTHAGORE avait déjà découvert une méthode : partons d'un nombre impair  $a$ , de sorte que  $a^2 = 2n + 1$  est aussi impair et  $b = n$  conduit au triangle rectangle

$$a^2 + b^2 = (2n + 1) + n^2 = (n + 1)^2.$$

On trouve ainsi les triangles rectangles :

3, 4, 5  
 5, 12, 13  
 7, 24, 25  
 9, 40, 41  
 etc.

Cette méthode ne fournit que des triangles rectangles ayant un côté de l'angle droit d'une unité inférieure à l'hypoténuse. Il y en a d'autres, par exemple le

QUOI DE NEUF CONCERNANT LES TRIANGLES RECTANGLES?

triangle de côtés 20, 21 et 29 est rectangle et ne s'obtient pas par la méthode de PYTHAGORE.

Voici quelques résultats généraux concernant les triangles rectangles à côtés entiers.

**Observation 1.**

*Dans un triangle rectangle à côtés entiers, un côté de l'angle droit au moins est pair.*

**Preuve :** Une simple considération de parité ne suffit pas puisque dans la relation  $a^2 + b^2 = c^2$ , on pourrait imaginer a priori que  $a$  et  $b$  sont impairs, avec  $c$  pair. Il faut effectuer un calcul modulo 4 pour s'apercevoir de l'impossibilité de cette situation.

Si  $x \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ , on a resp.  $x^2 \equiv 0, 1, 0, 1 \pmod{4}$  et par conséquent, si  $x$  et  $y$  sont impairs, on a  $x^2 \equiv 1 \equiv y^2 \pmod{4}$  d'où  $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$  prouvant que  $x^2 + y^2$  n'est pas un carré parfait!

**Observation 2.**

*L'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers est entière.*

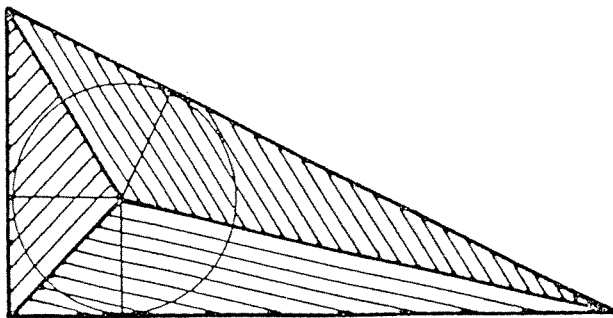
**Preuve :** En effet, l'aire est donnée par  $S = \frac{1}{2}ab$  et nous venons de montrer que le produit  $ab$  est pair.

Nous verrons même dans la section suivante que l'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers est **paire**.

**Observation 3.**

*Dans un triangle rectangle à côtés entiers, le rayon du cercle inscrit est entier.*

**Preuve :** L'aire d'un triangle de côtés  $a, b, c$  et de rayon de cercle inscrit  $r$  se calcule facilement par décomposition du triangle initial en trois sous-triangles ayant leurs sommets en le centre du cercle inscrit.



$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{r}{2}(a + b + c)$$

On trouve

$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c).$$

Pour un triangle rectangle, on a aussi

$$S = \frac{1}{2}ab$$

d'où par comparaison,

$$r(a + b + c) = ab \implies r = \frac{ab}{a + b + c}$$

Il s'agit donc de montrer que  $a + b + c$  divise  $ab \dots$

Amplifions la fraction par  $a + b - c$ . On trouve :

$$r = \frac{ab(a + b - c)}{(a + b)^2 - c^2} = \frac{ab(a + b - c)}{2ab} = \frac{a + b - c}{2}$$

en vertu de l'égalité de PYTHAGORE  $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ .

Il ne reste plus qu'à prouver que  $a + b - c$  est pair!

Voici une façon élégante de le montrer : pour tout entier  $x$ ,  $x$  et  $x^2$  ont la même parité

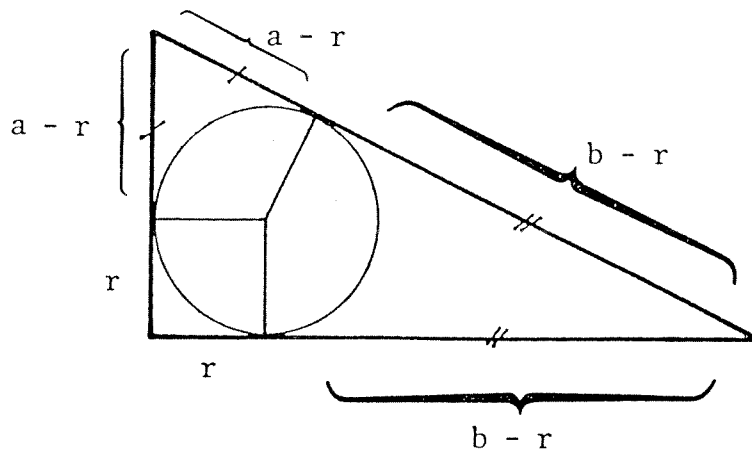
$$x \equiv x^2 \pmod{2}$$

d'où

$$a + b - c \equiv a^2 + b^2 - c^2 = 0 \pmod{2}.$$

**Remarque 1.** La relation reliant le rayon du cercle inscrit aux côtés d'un triangle rectangle possède aussi une démonstration visuelle

$$c = (a - r) + (b - r) \implies 2r = a + b - c.$$



**Remarque 2.** La construction pythagoricienne partant d'un entier impair  $a$ ,  $b = \frac{1}{2}(a^2 - 1)$  et  $c = \frac{1}{2}(a^2 + 1)$  fournit un rayon de cercle inscrit  $r = \frac{1}{2}(a - 1)$ . Tous les entiers naturels apparaissent donc comme rayons de cercles inscrits à de tels triangles.

**Remarque 3.** Nous avons utilisé la congruence  $n^2 \equiv n \pmod{2}$ . Elle a été généralisée par FERMAT sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\text{si } p \text{ est un nombre premier,} \\ &\text{alors } n^p \equiv n \pmod{p}. \end{aligned}$$

Lorsque  $n$  n'est pas divisible par  $p$ , on peut écrire cette congruence  $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Sous cette forme, elle a été généralisée par EULER. Dénotant par  $\varphi(m)$  le nombre d'entiers relativement premiers à  $m$  parmi les représentants  $1, 2, \dots, m - 1$ , on a

$$n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \text{ si } n \text{ et } m \text{ sont relativement premiers.}$$

## QUOI DE NEUF CONCERNANT LES TRIANGLES RECTANGLES ?

A son tour, cette congruence est un cas particulier du théorème de LAGRANGE qui affirme que dans un groupe fini, l'ordre d'un élément est un diviseur de l'ordre du groupe :

$$\begin{aligned} G \text{ groupe fini d'ordre } g > 1 \\ \implies x^g = 1 \quad \forall x \in G. \end{aligned}$$

### 2.— TRIPLES PYTHAGORICIENS

Nous allons déterminer **tous** les triangles rectangles à côtés entiers. Lorsque  $a, b$  et  $c$  sont trois entiers strictement positifs satisfaisant  $a^2 + b^2 = c^2$ , il est possible de les diviser par leur pgcd (plus grand commun diviseur)  $d$  et obtenir trois entiers  $a/d, b/d$  et  $c/d$  relativement premiers encore strictement positifs et dans la même relation

$$(a/d)^2 + (b/d)^2 = (c/d)^2.$$

Il suffit donc d'étudier les triples d'entiers  $> 1$  relativement premiers avec  $a^2 + b^2 = c^2$ . Permutant au besoin  $a$  et  $b$ , on peut supposer  $b$  pair.

**Définition.** Un triple pythagoricien est un triple  $(a, b, c)$  formé d'entiers  $> 1$ , relativement premiers avec  $b$  pair et  $a^2 + b^2 = c^2$ .

**THÉORÈME.** Les triples pythagoriciens  $(a, b, c)$  sont tous donnés par les formules (paramétrisation)

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

où  $m > n > 1$  sont deux entiers relativement premiers de parité différente.

De plus, deux couples  $(m, n) \neq (m', n')$  distincts satisfaisant aux conditions conduisent à des triples pythagoriciens différents.

**Corollaire.** L'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers est un nombre pair.

(En effet, les côtés d'un triangle rectangle entier sont multiples d'un triple pythagoricien, donc de la forme

$$d(m^2 - n^2), \quad 2d mn \quad \text{et} \quad d(m^2 + n^2)$$

et l'aire de ce triangle rectangle est

$$d^2 mn(m^2 - n^2) \text{ paire car } mn \text{ pair.})$$

Nous allons donner trois démonstrations (ou indications de démonstrations) du théorème.

**Démonstration arithmétique**

Nous supposons  $b$  pair et  $a, b, c$ , relativement premiers avec  $a^2 + b^2 = c^2$ . Donc  $a$  et  $c$  sont impairs, d'où  $c + a$  et  $c - a$  pairs. Ecrivons alors la relation de base  $b^2 = c^2 - a^2$  sous la forme

$$(b/2)^2 = \frac{c-a}{2} \times \frac{c+a}{2} \text{ (produit d'entiers).}$$

Tout diviseur commun de  $(1/2)(c+a)$  et  $(1/2)(c-a)$  doit diviser la somme  $c$  et la différence  $a$  de ces deux nombres, donc encore diviser  $b^2 = c^2 - a^2$ . Un tel diviseur commun ne peut être que 1, prouvant que  $(1/2)(c+a)$  et  $(1/2)(c-a)$  sont relativement premiers. Comme leur produit est un carré, chacun d'eux est un carré, disons

$$\frac{1}{2}(c+a) = m^2 \text{ et } \frac{1}{2}(c-a) = n^2.$$

On en tire bien  $c = m^2 + n^2$ ,  $a = m^2 - n^2$  puis  $b = 2mn$ . Tout diviseur commun de  $m$  et  $n$  doit diviser  $a, b$  et  $c$  :  $m$  et  $n$  sont donc relativement premiers. Finalement,  $b$  étant supposé pair,  $a$  est impair

$$m^2 - n^2 \text{ impair} \implies m \text{ et } n \text{ sont de parité différente.}$$

Les formules

$$m = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \text{ et } n = \sqrt{\frac{c-a}{2}}$$

montrent que le couple  $(m, n)$  est bien déterminé par le triple pythagoricien  $(a, b, c)$ .

**Démonstration algébrique**

Au lieu de résoudre  $a^2 + b^2 = c^2$  en entiers, résolvons l'équation  $x^2 + y^2 = 1$  en nombres rationnels ( $x = a/c$ ,  $y = b/c$ ). La paramétrisation du cercle unité par les fonctions trigonométriques

$$x = \cos t, y = \sin t \quad t \in [0, 2\pi[$$

ne conduit pas immédiatement (!) aux solutions rationnelles. Introduisons plutôt le corps de GAUSS

$$\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}[i] = \{x + iy : x \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}.$$

La norme d'un tel nombre  $z = x + iy$  est définie par

$$N(z) = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}.$$

Nous cherchons donc les solutions de

$$z \in \mathbb{Q}(i) \text{ et } N(z) = 1.$$

On en devine les solutions

$$z = u/\bar{u} \text{ où } u \in \mathbb{Q}(i)$$

QUOI DE NEUF CONCERNANT LES TRIANGLES RECTANGLES?

puisque dans ce cas

$$N(z) = N(u)/N(\bar{u}) = 1$$

(la norme jouit des propriétés  $N(uv) = N(u)N(v)$  et  $N(\bar{u}) = N(u)$ ). Nous allons démontrer ci-dessous que ces solutions particulières fournissent **toutes** les solutions du problème proposé. Supposons acquis ce fait et continuons en écrivant  $u = m + in$ ,  $\bar{u} = m - in$  avec  $m$  et  $n \in \mathbb{Q}$ . En amplifiant par un dénominateur commun à  $m$  et  $n$  (le plus économique possible) on peut supposer que dans la représentation

$$z = \frac{m + in}{m - in}, m \text{ et } n \text{ sont entiers relativement premiers.}$$

On a donc :

$$x + iy = \frac{(m + in)(m + in)}{m^2 + n^2} = \frac{m^2 - n^2 + 2imn}{m^2 + n^2}.$$

Séparant les parties réelles et imaginaires, on trouve

$$x = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \quad (= \frac{a}{c}), \quad y = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad (= \frac{b}{c})$$

d'où il est facile de déduire une nouvelle démonstration du théorème. En cours de route, nous avons admis le **résultat**

$$Z \in \mathbb{Q}(i), N(z) = 1 \implies \exists u \in \mathbb{Q}(i), z = u/\bar{u}.$$

Voici comment on vérifie ce résultat. Calculons

$$z(1 + \bar{z}) = z + z\bar{z} = z + N(z) = z + 1.$$

Ainsi  $u = 1 + z$  fera l'affaire :  $z = (z + 1)/(1 + \bar{z}) = u/\bar{u}$ .

Signalons simplement que la méthode algébrique a connu d'importantes généralisations. Par exemple, le résultat démontré à la fin du raisonnement a été généralisé par LAGRANGE sous la forme suivante :

Lorsque  $K/k$  est une extension galoisienne de corps avec groupe de GALOIS cyclique fini engendré par un automorphisme  $\sigma$  de  $K$

$$z \in K, N(z) = 1 \implies \exists u \in K, z = u/\sigma(u)$$

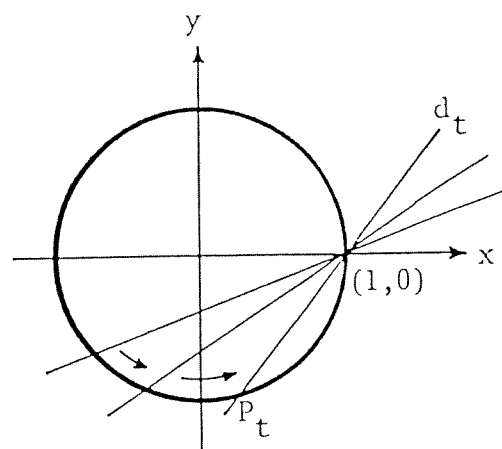
(rappelons que la norme dans ce contexte est définie par  $N(z) = z\sigma(z)\sigma^2(z)\dots$  produit des conjugués de  $z$  de sorte que  $N(z) \in K$  pour tout  $z \in K$ ; l'expression  $1 + \bar{z}$  de ci-dessus étant remplacée par une "résolvante" de LAGRANGE). Ce résultat a encore été généralisé par HILBERT à toutes les extensions galoisiennes finies : son fameux théorème 90 s'écrit aujourd'hui sous forme cohomologique

$$H^1(\text{Gal}(K/k), K^x) = \{0\}.$$

**Preuve géométrique.**

Pour trouver les solutions rationnelles de  $x^2 + y^2 = 1$ , considérons le faisceau de droites issues du point rationnel  $(1,0)$ .

L'équation de la droite  $d_t$  de pente  $t$  est  $y = t(x - 1)$ . Cette droite coupe le cercle en un deuxième point  $p_t$  dont les coordonnées seront rationnelles précisément si la pente  $t$  de  $d_t$  est rationnelle.



Explicitement, les points d'intersection de  $y = t(x - 1)$  avec le cercle  $y^2 = 1 - x^2$  conduisent aux valeurs d'abscisses

$$t^2(x - 1)^2 = 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$$

d'où

$x = 1$  (abscisse du point  $(1,0)$  sur  $d_t$ ) et

$$t^2(x - 1) = -(1 + x),$$

$$x(t^2 + 1) = t^2 - 1.$$

Les valeurs rationnelles de  $t$  conduisent bien à des coordonnées rationnelles et en posant  $t = m/n \in \mathbb{Q}$ , on retrouve bien

$$|x| = \frac{|m^2 - n^2|}{m^2 + n^2}, \quad |y| = \frac{|2mn|}{m^2 + n^2}.$$

Cette méthode de paramétrisation rationnelle permet de même de trouver les points à coordonnées rationnelles sur l'hyperbole  $x^2 - y^2 = 1$  ou plus généralement sur toute courbe de "genre 0". Une modification convenable de la méthode permet aussi de trouver les points rationnels sur la lemniscate de BERNOULLI d'équation  $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ .

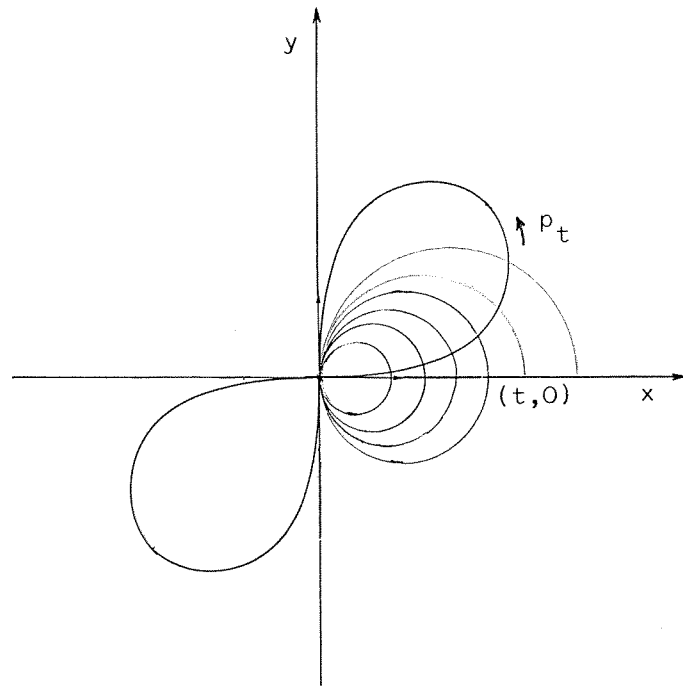


QUOI DE NEUF CONCERNANT LES TRIANGLES RECTANGLES?

Ici, on choisira des cercles tangents à une branche du point singulier (point double). Chacun de ces cercles recoupe la lemniscate en un point  $p_t$  de coordonnées

$$x = \frac{2t}{1+t^4}, \quad y = \frac{2t^3}{1+t^4}$$

rationnelles pour les valeurs rationnelles de  $t$  (le paramètre  $t$  est tout simplement le rayon du cercle centré sur l'axe  $Ox$  coupant la lemniscate).



— à suivre . . . —

*Tu sais que la bombe atomique a été utilisée pendant la guerre. A ton avis est-ce que les chercheurs scientifiques qui l'ont inventée sont responsables de cette utilisation ?*

<i>Oui tout à fait</i>	32
<i>Oui un peu</i>	37
<i>Non assez peu</i>	13
<i>Non pas du tout</i>	17
<i>SR</i>	1

*Imagine que tu fasses de la recherche scientifique. Tu as besoin d'argent pour faire tes recherches, les militaires t'en proposent pour travailler pour eux, que fais-tu ?*

<i>Tu acceptes</i>	43
<i>Tu refuses</i>	47
<i>Ça dépend des cas</i>	7
<i>SR</i>	3

Pour les adultes, le texte de la question [a été] le suivant : "Les chercheurs scientifiques qui ont découvert le principe de la bombe atomique ont une grande part de responsabilité dans l'utilisation qui en a été faite" ; 55% des personnes interrogées sont tout à fait ou plutôt d'accord, 39 % plutôt pas ou pas du tout d'accord, 7% sans réponse.