RÉFLEXIONS AUTOUR D'UNE TASSE DE THÉ

Albert TROESCH

"Laissez tomber une goutte de thé non loin du centre de la tasse. Les ondes se rassembleront au point symétrique. La raison est qu'en vertu de la définition focale de l'ellipse, les ondes issues d'un foyer de l'ellipse se rassemblent dans l'autre."

Ce texte est extrait du livre d'ARNOLD : "*Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*" ([1] p. 45, note en bas de page). Son but est d'illustrer le fait qu'"une ellipse de faible excentricité ressemble beaucoup à un cercle", rôle qu'elle remplit à merveille! Mais étant donné sa nécessaire concision, elle comporte un certain nombre de sous-entendus. Nous commencerons donc par commenter successivement ces trois phrases, puis nous donnerons une autre explication du phénomène signalé.

1. COMMENTAIRES :

Commençons par examiner la première phrase : "*Laissez tomber une goutte de thé non loin du centre de la tasse*". Le fait d'avoir à distinguer entre points proches et non proches du centre suggère que le phénomène décrit n'est pas observable pour toutes les positions possibles du point d'impact de la goutte sur la surface du liquide. Faut-il alors comprendre que la convergence des ondes a lieu rigoureusement jusqu'à une distance maximale d et cesse brutalement d'être observée pour des distances plus grandes? Ou plutôt faut-il comprendre qu'elle n'a jamais lieu rigoureusement, mais que ce qui est observé est d'autant plus proche de la situation idéale décrite que la distance au centre est petite? Cette dernière interprétation signifierait que nous sommes en présence d'un phénomène asymptotique, c'est-à-dire d'une description idéale dont le phénomène réel s'approche d'autant mieux que certains paramètres sont petits. Comme les lois de réflexion des ondes de l'optique géométrique dont l'emploi est sous-entendu, ne sont valables que pour des distances de propagation grandes par rapport à la longueur d'onde (la propagation des ondes sous forme de rayons est aussi un phénomène asymptotique) la dernière explication est sans doute la plus probable!

Quel sens faut-il alors donner à l'expression en italique? Si nous voulons faire une analyse mathématique du phénomène de réflexion des ondes dans une tasse il nous faudra préciser ce sens. En effet, du point de vue de la mathématique classique les nombres résultant des mesures de longueur sous-entendues ne peuvent être classés qu'arbitrairement en *grands* et *petits*, classement qui seul pourrait donner un sens à "*non loin de*". Ce qui précède suggère que nous pourrions utiliser le langage des développements asymptotiques et supposer que la distance au centre

© L'OUVERT **58** (1990)

de la tasse est un paramètre qui tend vers 0, ainsi que la longueur d'onde, et de plus que le rapport entre la longueur d'onde et la distance au centre tend vers 0 ... Nous préfèrerons utiliser l'analyse non standard dont les concepts sont bien plus suggestifs et proches du langage utilisé dans le texte d'ARNOLD : nous traduirons *non loin* par *infiniment proche*.

L'apparente précision de la deuxième phrase : "*Les ondes se rassembleront au point symétrique*" n'est qu'illusoire d'après ce qui précède étant donné que le point de focalisation des ondes ne peut être déterminé qu'avec une précision de l'ordre de la longueur d'onde. Encore un argument qui milite pour le caractère asymptotique du phénomène.

La dernière phrase apparaît comme une tentative d'explication du phénomène de convergence des ondes après réflexion sur le bord de la tasse. Cette explication fait appel aux propriétés focales des ellipses, ce qui suppose que l'on assimile le bord de la tasse à une ellipse dont l'un des foyers serait le point d'impact. Cette *approximation* du bord par une ellipse est assez surprenante étant donné l'arbitraire de ce choix; on s'attendrait à une approximation par un objet plus symétrique, par exemple par un cercle. C'est une telle approximation que nous utiliserons par la suite. Mais peut-être ne faut-il voir dans cette phrase qu'une constatation : tout se passe comme si le bord de la tasse était une ellipse dont l'un des foyers est le point d'impact de la goutte sur le liquide.

2. LE PHÉNOMÈME DE RÉFLEXION DES ONDES DANS UNE TASSE D'UN POINT DE VUE NON STANDARD :

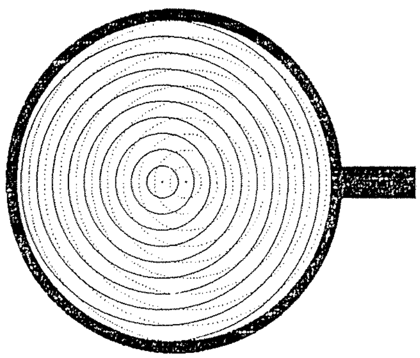


Figure 1

2.1. Quelques rappels d'analyse non standard (1).

• En analyse non standard il n'y a pas de définition d'un *objet standard*, tout comme dans la théorie des ensembles, le terme *ensemble* n'est pas défini : il ne prend son sens que par l'intermédiaire d'une série d'axiomes. De la même manière le terme standard ne prend son sens que par l'intermédiaire d'axiomes (ajoutés à ceux de la théorie des ensembles) qui régissent son emploi. Ceux-ci sont au

(1) Que le lecteur ne se laisse pas impressionner par ces mots et poursuive la lecture.

nombre de trois. Nous ne les donnerons pas. Le lecteur peut très bien se passer de leur énoncé technique, tout comme il peut se passer de l'énoncé des axiomes de la théorie des ensembles, sans préjudice pour son activité mathématique. Nous en donnerons seulement quelques conséquences simples et immédiates qui nous seront utiles par la suite et qu'on pourra considérer comme des axiomes.

• Tout objet mathématique qui est caractérisé de manière unique dans la mathématique usuelle est standard.
Exemples : $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \ldots 0, 1, 2 \ldots \sqrt{2}, e, \pi \ldots$

• Tout ensemble standard non vide a des éléments standard.

• Deux ensembles standard ayant les mêmes éléments standard sont égaux.

• Tout ensemble infini a des éléments non standard.

• Il existe des nombres réels *infiniment petits* c'est-à-dire dont la valeur absolue est inférieure à tout nombre standard strictement positif. Deux nombres réels x et y sont *infiniment proches* (ce qui se note $x \simeq y$) si leur différence est infiniment petite.

• Il existe des nombres réels *infiniment grands* c'est-à-dire dont la valeur absolue est plus grande que tout nombre standard. Un nombre non infiniment grand est appelé *limité*. En particulier tout nombre standard est limité.

• La somme et le produit de deux nombres standard sont standard. La somme et le produit de nombres limités sont limités.

• Pour tout nombre limité x de $\mathbb{R}$ il existe un unique nombre standard ${}^\circ x$ de $\mathbb{R}$ tel que $x -^\circ x$ est infiniment petit. Ce nombre standard est appelé la *partie standard* de x.

• Propriétés : ${}^\circ(xy) =^\circ x^\circ y^\circ(x + y) =^\circ x +^\circ y$.

• Pour tout point limité x de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire dont les coordonnées sont limitées) il existe un unique point standard ${}^\circ x$ infiniment proche de x et appelé *partie standard* de x. Ses coordonnées sont les parties standard des coordonnées de x.

• Pour toute partie A de $\mathbb{R}^2$ il existe un ensemble standard unique ${}^\circ A$ dont les éléments standard sont les parties standard des points limités de A. Cet ensemble standard est appelé l'ombre de A (axiome de standardisation cf. [2] et [3]). Si nous convenons que notre champ de vision se limite aux points limités de $\mathbb{R}^2$ et que notre acuité visuelle ne permet pas de distinguer des points infiniment proches (ce qui dépasse de très loin les qualités de notre vision réelle), nous devons en conclure que nous ne pouvons pas distinguer un ensemble A de son ombre ${}^\circ A$.

• Une fonction standard f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est continue au point standard ${}^\circ x$ si pour tout y infiniment proche de ${}^\circ x$ on a : $f(y) \simeq f({}^\circ x)$.

2.2. Hypothèses et formulation non standard :

Pour décrire le phénomène asymptotique, nous utilisons à présent quelques éléments très simples d'analyse non standard (2) (cf. [2] et [3]). Pour cela nous ferons les hypothèses suivantes :
1) La distance du point d'impact au centre de la tasse est un infiniment petit.
2) Le rapport de la longueur des ondes de liquide à cette distance est un infiniment petit.

L'hypothèse 1) idéalise le fait que le point d'impact est *non loin du centre* : ici cette expression prend donc un sens précis.

L'hypothèse 2) garantira que les lois de l'optique géométrique seront valables à toutes les échelles d'observation que nous utiliserons.

En examinant le centre de la tasse avec une loupe sous laquelle le point d'impact est par exemple à la distance 1 du centre, il suffira de montrer que les lois de l'optique géométrique ont pour conséquence que tout rayon issu du point d'impact passe en un point infiniment proche du point symétrique. Le lecteur se convaincra facilement que cette situation presque idéale pour des distances infiniment petites restera approximativement vraie pour des distances standard mais "assez petites" et que cette propriété non standard décrit parfaitement le phénomène asymptotique de réflexion dont parle ARNOLD. Nous pourrions évidemment traduire cette propriétés en termes de mathématique classique, nous n'en ferons rien, estimant que la propriété non standard est bien plus parlante que sa traduction compliquée.

2.3. Quelques remarques et rappels :

Notre étude de la réflexion des ondes dans une tasse repose sur les trois remarques suivantes :

Remarque 1 :
Deux droites passant par des points limités et ayant un point d'intersection infiniment grand ont des ombres parallèles.

Remarque 2 :
Deux droites passant par des points limités et dont les ombres ne sont pas parallèles se coupent en un point limité dont la partie standard est le point d'intersection des ombres des deux droites.

Remarque 3 :
Soient D et D' deux droites passant par des points limités, et ayant un point d'intersection infiniment grand. Soit B la bissectrice de l'angle infiniment petit formé par ces deux droites. Les ombres des droites D, B et D' sont des droites parallèles équidistantes.

Les deux premières sont des conséquences immédiates des remarques suivantes :

---

(2) Non, cher lecteur n'abandonnez pas la lecture ici, encore un petit effort S.V.P.

Remarque 4 :
L'ombre d'une droite D passant par un point limité est une droite ${}^\circ D$. De plus l'ombre d'un vecteur unitaire de D est un vecteur unitaire de ${}^\circ D$.

En effet, soit X un point limité de D et u un vecteur directeur unitaire de D. Alors les points limités de D sont les points $x + tu$ où t est un réel limité. L'ensemble ${}^\circ D$ est l'ombre de la droite D donc les points standard de ${}^\circ D$ sont les points ${}^\circ(x + tu) ={}^\circ x +{}^\circ t^\circ u$ (pour t limité). Les points standard de ${}^\circ D$ sont donc les points standard de la droite standard passant par ${}^\circ x$ et de vecteur directeur ${}^\circ u$. Ces deux ensembles standard ayant les mêmes éléments standard sont donc égaux. De plus (continuité de la norme) $\|{}^\circ u\| \simeq \|u\| = 1$ et comme $\|{}^\circ u\|$ est standard $\|{}^\circ u\| = 1$.

Remarque 5 :
Si D est une droite passant par des points limités, et si z est un point infiniment grand de D alors ${}^\circ(z/\|z\|)$ est un vecteur unitaire de ${}^\circ D$.

Soient x et u respectivement un point limité et un vecteur unitaire de D. Il existe alors un t infiniment grand tel que $z = x + tu$. De plus

$$\frac{z}{\|z\|} = \frac{x}{\|z\|} + \frac{tu}{\|z\|} \simeq \frac{tu}{\|z\|} \simeq \text{signe}(t)u.$$

Il en résulte que les vecteurs unitaires $z/\|z\|$ et signe$(t)u$ ont pour ombre le vecteur directeur unitaire signe$(t)^\circ u$ de ${}^\circ D$.

Démonstration de la remarque 3 :
D'après la remarque 1 les trois droites D, B et D' sont parallèles. Il reste à montrer qu'elles sont équidistantes.

Considérons le cercle de centre le point d'intersection z de D et D' et passant par l'origine. L'ombre de C est la droite orthogonale aux ombres des trois droites D, D' et B, et passant par l'origine. En effet soient (z_1, z_2) les coordonnées de z et $x = (x_1, x_2)$ un point limité non infiniment petit de C. Nous avons alors la relation

$$(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2.$$

Il en résulte après division par $\|z\|$:

$$x_1\Big(\frac{x_1}{\|z\|} - \frac{2z_1}{\|z\|}\Big) + x_2\Big(\frac{x_1}{\|z\|} - \frac{2z_1}{\|z\|}\Big) = 0.$$

Par conséquent

$${}^\circ x_1 \overset{\circ}{\Big(\frac{z_1}{\|z\|}\Big)} + x_2 \overset{\circ}{\Big(\frac{z_2}{\|z\|}\Big)} = 0,$$

ce qui montre que x est orthogonal à ${}^\circ D,{}^\circ D'$ et ${}^\circ B$.

Soient d, d' et b les points d'intersection limités de C avec D, D' et B. Les parties standard de ces trois points sont alignées sur ${}^\circ C$, de plus

$$\|d - b\| = \|d' - b\|.$$

Il résulte de la continuité de la norme

$$\|d - b\| \simeq \|^\circ d -^\circ b\|$$
$$\|d' - b\| \simeq \|^\circ d' -^\circ b\|.$$

Par conséquent les réels standard (infiniment proches) $\|^\circ d -^\circ b\|$ et $\|^\circ d' -^\circ b\|$ sont égaux.

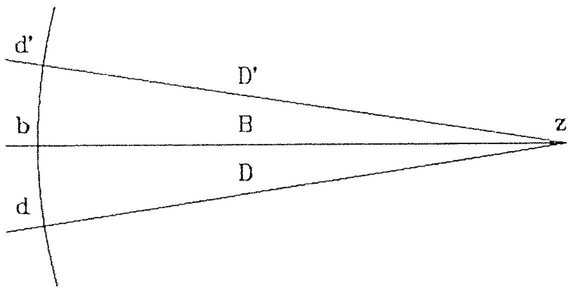


Figure 2

2.4. Cas d'une tasse à bord circulaire :

Nous assimilerons la surface libre du liquide au repos à un sous ensemble de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$.

Nous supposerons que le bord de la tasse est un cercle standard, par exemple le cercle de rayon 1 centré à l'origine, et que la goutte tombe à une distance infiniment petite ε du centre O.

Un rayon issu du point d'impact I (normale au front d'onde) se réfléchit sur le bord de la tasse selon la loi usuelle de la réflexion. Appelons x et y les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$.

Pour étudier de façon plus précise le rayon réfléchi nous faisons le changement de coordonnées suivant :

$$\varepsilon X = x, \varepsilon Y = y.$$

C'est-à-dire que nous observons le centre de la tasse à l'aide d'une "loupe" de grossissement infiniment grand $1/\varepsilon$.

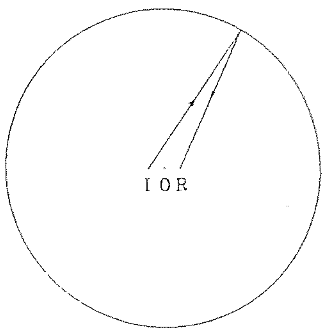


Figure 3

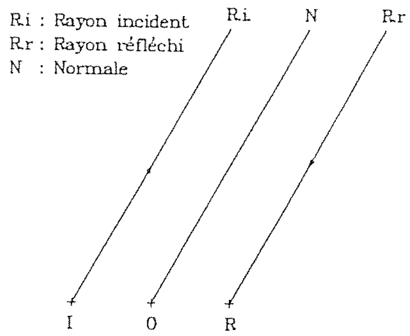


Figure 4

Dans ces nouvelles coordonnées le bord de la tasse est maintenant un cercle de rayon infiniment grand $1/\varepsilon$. Le rayon incident, la normale au bord de la tasse au point d'incidence et le rayon réfléchi forment donc trois droites concourantes en un point infiniment grand. La normale et le rayon incident passent par des points limités. De plus la normale est la bissectrice de l'angle infiniment petit formé par les deux autres droites. D'après la remarque 3 les ombres des trois droites sont parallèles et équidistantes. L'ombre du rayon réfléchi passe ainsi par le point R symétrique de I par rapport à O. Nous avons donc montré que *les ondes issues de I convergent, après réflexion sur le bord de la tasse, vers le point R symétrique de I par rapport à O.*

Remarque :
D'un point de vue physique ceci signifie que si ε est très petit, et si la longueur d'onde est très petite par rapport à ε alors la distance du rayon réfléchi au point R est très petite par rapport à ε. On remarquera la similitude des points de vue physique et non standard.

Dans la mathématique classique, ce que nous venons de montrer pourrait se traduire partiellement de la manière suivante :
Si ε désigne la distance du point d'impact au centre $O, \lambda(\varepsilon)$ une fonction représentant la longueur de l'onde issue de I, et si $d(\varepsilon)$ est la distance du rayon réfléchi au point symétrique R, alors si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda(\varepsilon)/\varepsilon = 0 \text{ on a } \lim_{\varepsilon \to 0} d(\varepsilon)/\varepsilon = 0.$$

2.5. Cas d'une tasse à bord elliptique de faible excentricité :

Le raisonnement précédent est encore valable pour une tasse qui n'est pas parfaitement circulaire, à condition que l'hypothèse (H) suivante soit vérifiée :

En tout point du bord de la tasse, la normale à celui-ci passe par un point dont la distance au centre est infiniment petite par rapport à la distance du point d'impact I au centre.

Dans ce cas, dans la loupe de grossissement $1/\varepsilon$, l'ombre de la normale passe par l'origine.

L'hypothèse (H) est vérifiée en particulier lorsque la tasse est elliptique mais que la distance focale est au plus de l'ordre de la distance de I à O. En effet, considérons un rayon issu de l'un des foyers. Soit ε la distance focale infiniment petite de l'ellipse. Prenons pour I le foyer F_1. Dans la loupe de grossissement $1/\varepsilon$, d'après les propriétés focales de l'ellipse et la remarque 3, le rayon incident F_1M, la normale au point d'incidence et le rayon réfléchi F_2M ont pour ombres trois droites équidistantes : l'ombre de la normale passe donc par le centre de l'ellipse dans la loupe de grossissement $1/\varepsilon$. Ainsi la distance de la normale au centre est infiniment petite par rapport à ε.

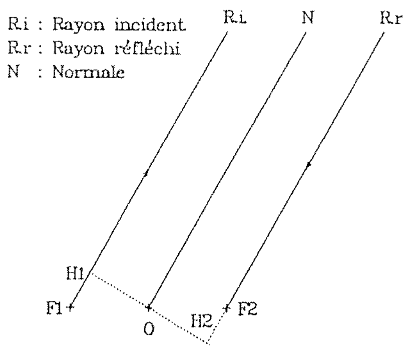


Figure 5

De plus il est facile de voir que

$$2OM = F_1M + F_2M + \delta$$

où δ est infiniment petit par rapport à $OF_1 = \varepsilon$.

3. REMARQUES FINALES :

1. Pour une ellipse d'excentricité infiniment petite, le rayon de courbure est infiniment proche du rayon du cercle qui est son ombre. Mais en général la condition (H) n'implique pas la proximité infinitésimale des rayons de courbure, ainsi que le montre l'exemple suivant :

Considérons la courbe définie par

$$x = (1 + \alpha \cos \omega\theta) \cos \theta$$
$$y = (1 + \alpha \cos \omega\theta) \sin \theta$$

avec α et $\omega\alpha/\varepsilon$ infiniment petits, ω et $\omega^2\alpha$ infiniment grands.

Nous avons

$$x' = -(1 + \alpha \cos \omega\theta) \sin \theta - \alpha\omega \sin \omega\theta \cos \theta$$
$$y' = (1 + \alpha \cos \omega\theta) \cos \theta - \alpha\omega \sin \omega\theta \sin \theta.$$

Le vecteur normal est alors infiniment proche du vecteur de composantes $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ à un infiniment petit près de l'ordre de $\alpha\omega$. Il en résulte que la normale passe à une distance du centre infiniment petite par rapport à ε.

D'autre part

$$x'' \simeq -(1 + \alpha\omega^2 \cos\omega\theta)\cos\theta$$
$$y'' \simeq -(1 + \alpha\omega^2 \cos\omega\theta)\sin\theta.$$

ce qui montre que le rayon de courbure présente de grandes variations. Pour $\alpha\omega^2 = 1$, il oscille entre 0 et 2.

2. Nous avons montré précédemment que pour une ellipse de faible excentricité, non seulement les ondes issues d'un foyer se focalisent dans l'autre foyer après réflexion, mais encore, toute onde issue d'un point dont la distance au centre est infiniment petite et au moins de l'ordre de la distance focale, se focalise en un point symétrique. Cela a pour conséquence qu'un miroir elliptique de faible excentricité peut donner des images réelles (resp. virtuelles) d'objets réels (resp. virtuels).

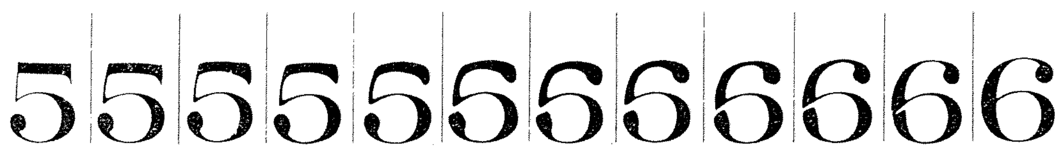
3. Le titre volontairement à double sens de cet article est une invitation à faire l'expérience amusante que décrit ARNOLD. On peut s'amuser à observer plusieurs réflexions successives : sans une dissipation d'énergie inévitable, les ondes oscilleraient périodiquement d'un foyer à l'autre pendant un temps assez long. Comme la focalisation n'est qu'approximative, il y a une dégénérescence des ondes et au bout d'un certain temps le mouvement deviendra chaotique. Terminons donc par la question que tous les lecteurs sont sans doute en train de se poser : peut-on donner une estimation de la durée du mouvement approximativement périodique?

Bibliographie

[1] V. ARNOLD : *Méthodes mathématiques de la mécanique classique.*– Editions Mir 1976.

[2] E. NELSON : *Internal Set Theory.*– BAMS n° 83, Nov. 1977.

[3] E. URLACHER : *L'OUVERT* (Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg), n° 55, Juin 1989, p. 12-20.



Le bas de cette page est un fac simile d'une carte de vœux pour l'année 1966 du graphiste Alfred MATTAUCH (reproduction extraite du livre de MASSIN).