

# MAXIMALISATIONS D'AIRES DE POLYGONES

Albert LENTZ

Dans toute l'étude, les polygones envisagés ont des côtés dont les longueurs sont fixées dans l'ordre.

Nous nous posons la question suivante : les polygones étant "articulés", comment les déformer pour rendre leur aire maximale s'il y a lieu.

La résolution du problème nécessite seulement des notions de 1<sup>ère</sup> S et peut donner lieu à des T.P. (relations métriques dans le triangle, variation de fonctions, etc. . . ) dans cette classe.

## I. — PROBLÈMES D'HEXAGONES

Au cours d'une journée pédagogique de professeurs de seconde, il y a quelques années, il nous a été proposé à titre d'exemple de thème de recherche, le problème de la maximalisation de l'aire d'un **hexagone articulé à côtés égaux**.

### A. Recherche d'une solution

Plusieurs démarches sont possibles. En voilà une parmi d'autres, accessible à un élève de seconde.

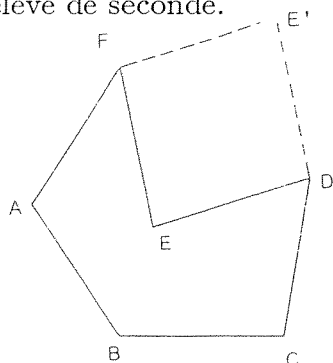


Figure 1

A partir d'un hexagone à côtés égaux et à angles quelconques :

1. Par symétries le rendre convexe; cela augmentera l'aire (fig. 1).

2. Choisir une diagonale : elle partage l'hexagone en deux quadrilatères d'aires différentes. Remplacer celui qui est d'aire la plus petite par le symétrique de l'autre par rapport au milieu de la diagonale (fig. 2).

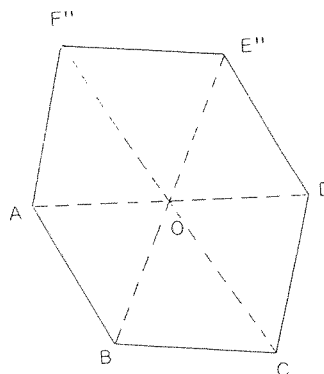


Figure 2

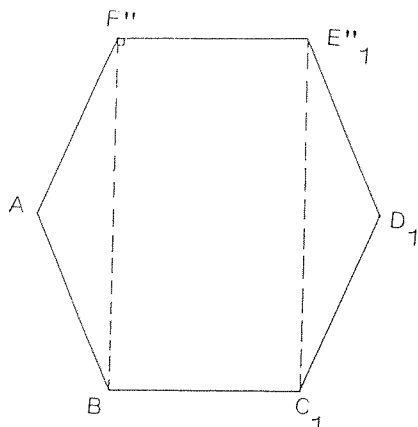


Figure 3

### B. Etude des déformations successives envisagées (A.3)

1. Etudions une telle suite de transformations en considérant alternativement les parallélogrammes  $ACDF$  et  $BCEF$ . Supposons qu'on ait initialement :

$$\widehat{BAF} = a, \widehat{ABC} = b \text{ et } \widehat{FBC} = \pi/2.$$

Comme  $ABF$  et  $ABC$  sont isocèles, on a toujours :

$$a + 2\widehat{ABF} = \pi \text{ et } b = \pi/2 + \widehat{ABF}$$

soit

$$b = \pi - a/2.$$

Dans la suite de transformations soient

$u_0, u_2, \dots, u_{2n}, \dots$  les valeurs successives de  $a$ ,

$u_1, u_3, \dots, u_{2n+1}, \dots$  les valeurs successives de  $b$ .

On a alors une suite  $u$  définie par :

$$u_{n+1} = -0,5u_n + \pi$$

convergeant vers  $2\pi/3$  et telle que :

$$u_{n+2} = 0,25u_n + \pi/2$$

relation entre les valeurs de  $a$  (et celles de  $b$ ).

Les suites des valeurs de  $a$  et de  $b$  sont l'une croissante, l'autre décroissante, suivant qu'au départ  $a > 2\pi/3$  ou non. Les limites de  $a$  et de  $b$  sont donc effectivement  $2\pi/3$ .

3. On peut obtenir des hexagones dont les aires vont en croissant, en déformant, successivement, l'un des parallélogrammes formés par deux côtés opposés pour obtenir le rectangle dont les côtés ont même longueur que ceux du parallélogramme (fig. 3).

**L'hexagone sera maximalisé** si toutes les paires de côtés opposés définissent des rectangles, donc **s'il est inscrit dans un cercle, donc régulier**; on s'y attendait!

2. Il y a plus court!

L'hexagone, avant maximalisation, a nécessairement au moins un angle supérieur à  $2\pi/3$ . Supposons que cela soit  $a$ . Déformons alors  $ACDF$  en  $ACD'F'$  pour que l'angle  $BAF'$  mesure  $2\pi/3$  : l'aire a augmenté car  $\sin a < \sin 2\pi/3$ .

Une seule autre transformation suffit maintenant à obtenir l'hexagone maximal.

II. — GÉNÉRALISATIONS

1. La généralisation est à envisager de deux manières :

- a) Peut-on généraliser ce résultat à tout polygone à  $n$  côtés égaux?
- b) Pour un polygone à  $n$  côtés éventuellement inégaux quelle forme prendra la réponse, puisqu'il ne sera plus question de polygones réguliers?

2. Faisons ici deux remarques :

- a) Pour un polygone à  $2n$  côtés dont les côtés opposés sont égaux, la démarche utilisée pour l'hexagone reste valable; il en résulte que ce polygone a l'aire maximale s'il est **inscriptible**.
- b) Pour qu'un polygone existe, il faut nécessairement que chaque côté soit inférieur à la somme de tous les autres (en particulier le plus grand est inférieur à la somme des autres côtés).

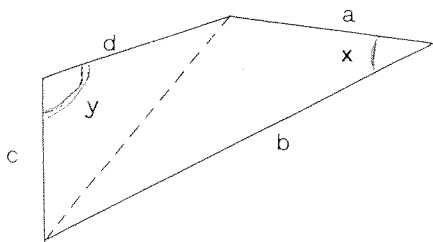
3. Comment procéder dans le cas d'un polygone quelconque?

De la méthode précédente on peut retenir que la maximalisation est ramenée à celle de l'aire d'un **quadrilatère**. Le polygone  $A_1A_2 \dots A_n$  a une aire maximalisée si chaque quadrilatère  $A_iA_jA_kA_l$  défini par les sommets du polygone a une aire maximalisée : chaque quadrilatère  $A_iA_jA_kA_l$  étant transformé, successivement en un quadrilatère  $A'_iA'_jA'_kA'_l$  dont les côtés ont **mêmes longueurs respectives que ceux de  $A_iA_jA_kA_l$** .

Nous étudierons donc d'abord le problème pour le quadrilatère.

III. — LE QUADRILATÈRE

1. Expression de l'aire d'un quadrilatère



Nous appellerons ici  $a, b, c, d$  les longueurs des côtés,  $x$  l'angle des côtés  $a$  et  $b$ ,  $y$  l'angle opposé à  $x$ ,  $D$  la diagonale opposée à  $x$  et  $A$  l'aire du quadrilatère (fig. 4).

Figure 4

L'aire  $A$  est fonction de  $x$ , de même que  $y$ . On a alors :

$$2A(x) = ab \sin x + cd \sin y(x).$$

Etudions les variations de  $2A(x)$ . En dérivant :

$$2A'(x) = ab \cos x + y'(x)cd \cos y(x).$$

Comme  $D^2(x) = a^2 + b^2 - 2ab \cos x = c^2 + d^2 - 2cd \cos y(x)$  (1)  
on a  $D^2'(x) = 2ab \sin x = 2cdy'(x) \sin y(x)$ .

D'où :

$$cd y'(x) = \frac{ab \sin x}{\sin y(x)}.$$

Et :

$$2A'(x) = ab \cos x + \frac{ab \sin x \cos y(x)}{\sin y(x)}.$$

Soit :

$$A' = \frac{ab}{2 \sin y(x)} \sin(x + y(x)).$$

Comme on a :  $0 < x < \pi$  et  $0 < y < \pi$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} A' &> 0 \text{ si } x + y < \pi \\ A' &= 0 \text{ si } x + y = \pi \\ A' &< 0 \text{ si } x + y > \pi. \end{aligned}$$

Donc  $A$  est maximum si  $x + y = \pi$ .

Donc **le quadrilatère a une aire maximale s'il est inscriptible.**

## 2. Quelle est alors cette aire ?

Comme  $x + y = \pi$ , la relation (1) s'écrit :

$$D^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos x = c^2 + d^2 + 2cd \cos x.$$

On en tire :

$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \quad (2)$$

Donc, comme  $\sin y = \sin x$ , on a :

$$\begin{aligned} 2A(x) &= (ab + cd) \sin x \\ &= (ab + cd)(1 - \cos^2 x)^{0,5}. \end{aligned}$$

En remplaçant  $\cos x$  et en effectuant, on a :

$$\begin{aligned}
 16A^2 &= 8abcd + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) \\
 &\quad - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \\
 &= (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) \\
 \text{ou } A^2 &= (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) \text{ si } 2p = a + b + c + d \\
 \text{soit } A &= ((p - a)(p - b)(p - c)(p - d))^{0,5}.
 \end{aligned}$$

**Remarque :** de (1) et de (2) on déduit :

$$D^2 = a^2 + b^2 - ab \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd} = \frac{(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)(ab)}{ab + cd} \quad (3).$$

### 3) Détermination du cercle circonscrit :

Le rayon du cercle circonscrit à un triangle est :  $abc = 4AR$ , où  $A$  est l'aire du triangle. Donc :

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \frac{a^2b^2c^2}{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)} \\
 &= \frac{a^2b^2c^2}{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab + c^2 - a^2 - b^2)} \\
 &= \frac{a^2b^2c^2}{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \quad (4).
 \end{aligned}$$

Le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère s'obtient en remplaçant  $c$  par  $D$  dans (4); on a :

$$\begin{aligned}
 R^2 &= \frac{(ab + cd)(a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2)}{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2} \\
 \text{ou } R^2 &= \frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)} \quad (5) \\
 \text{ou } R^2 &= \frac{a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2 + abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{8abcd + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4)}.
 \end{aligned}$$

**Remarque :** La relation (5) peut s'écrire

$$4RA = ((ab + cd)(ac + bd)(ad + bc))^{0,5}$$

qui est à comparer à la relation dans le triangle.

#### IV. — MAXIMALISATION DE L'AIRES D'UN POLYGONE À $n$ CÔTÉS ( $n > 4$ )

Un polygone a donc une aire maximalisée si chaque quadrilatère qu'il définit est inscriptible, donc si le polygone est lui-même inscriptible.

Pour un polygone donné, le procédé de maximalisation fait-il nécessairement **avoir pour limite** un polygone inscriptible? L'aire d'un polygone inscriptible (dont nous prouverons l'existence et l'unicité) est-elle le maximum absolu?

**Questions ouvertes :** Nous aimerions y répondre OUI!...

Le calcul du rayon amène à la résolution d'équations de degré supérieur à 4 non bicarrées. Pour établir l'existence de  $R$ , nous utiliserons l'approche géométrique qui suit.

##### A. Existence du polygone inscriptible pour $n > 4$

Le polygone est défini si le rayon du cercle circonscrit est défini. Intuitivement, son existence et son unicité sont évidentes.

Considérons un polygone à  $n$  côtés dont les côtés ont pour longueurs :  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , et nous supposons que  $c_1$  soit la longueur la plus grande, ce qui est toujours possible.

Construisons un cercle de rayon  $r$  dans lequel nous inscrivons la ligne polygonale  $A_0A_1A_2 \dots A_n$  dont les côtés ont pour longueur  $c_1, c_2, \dots, c_n$  dans l'ordre. Il faut que  $2r \leq c_1$  pour que la construction soit possible.

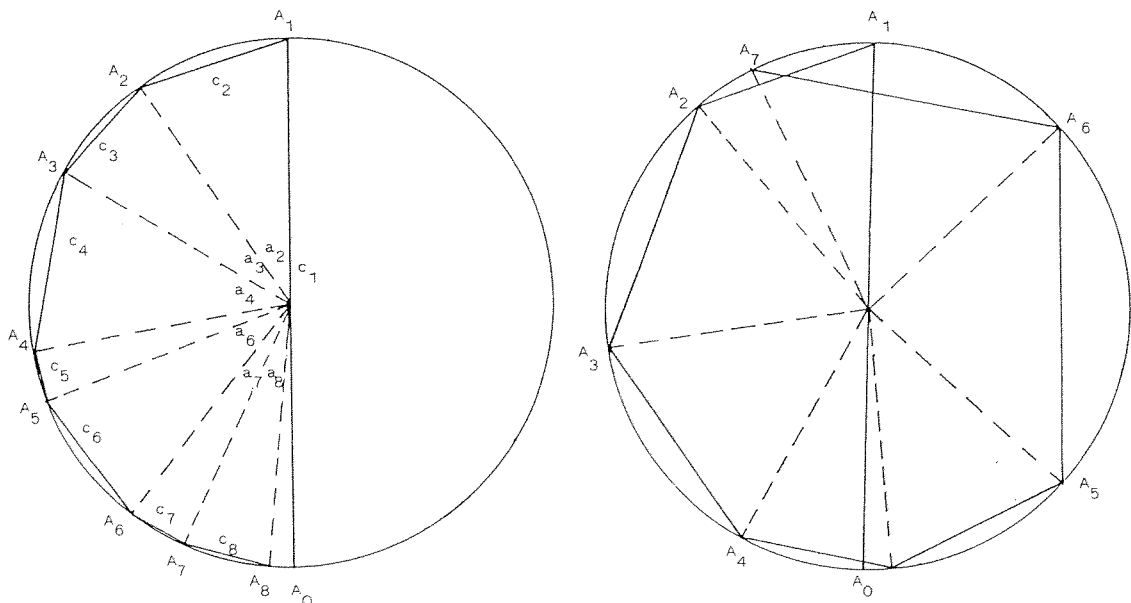


Figure 5

Ces deux situations correspondent à  $r = c_1/2$

Supposons maintenant  $r$  variable (et croissant), et considérons le polygone  $A_1A_2 \dots A_n$  de côtés  $c_2, \dots, c_n$  et soit  $c$  la longueur du côté  $A_1A_n$ .

Soit  $a_i (2 \leq i \leq n)$  l'angle au centre opposé au côté de longueur  $c_i$ . Les  $a_i$  sont des fonctions décroissantes de  $r$  d'après les variations de  $\sin x$  et de  $1/x$  car :

$$\sin(a_i/2) = c_i/(2r) \text{ et } a_i/2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Donc  $a_2 + a_3 + \dots + a_n$  est une fonction décroissante de  $r$  et la limite, quand  $r$  tend vers l'infini, est nulle, car  $n$  est fixé. On peut donc choisir  $r_0$  assez grand pour que :

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n < 2\pi \text{ si } r_0 \text{ et } r \geq c_1/2.$$

A cette condition le polygone  $A_1 A_2 \dots A_n$  est convexe.

Montrons que  $A_1 A_n$  est alors une fonction croissante de  $r$ .

Les angles  $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$  sont des fonctions croissantes de  $r$  et compris entre  $0$  et  $\pi$  car dans chaque triangle isocèle  $OA_i A_{i+1}$  les angles à la base valent :  $(\pi - a_i)/2$ . Soient  $r'$  et  $r''$  deux valeurs de  $r$  telles que  $r_0 < r' < r''$  et  $A'_1 A'_2 \dots A'_n, A''_1 A''_2 \dots A''_n$  les polygones correspondants. Pour transformer  $A'_1 A'_2 \dots A'_n$  en  $A''_1 A''_2 \dots A''_n$  décomposons en  $n-2$  transformations  $t_i (2 \leq i \leq n-1)$  successives telles que  $t_i$  remplace  $A'_i$  par  $A''_i$ .

La seule dimension affectée par chacune de ces transformations est celle de  $A_1 A_n$  dans le triangle  $A_1 A'_i A_n$  qui devient  $A_1 A''_i A_n$  (voir fig. 6).

Or on a :

$$A_1 A_n^2 = A_1 A_i'^2 + A_i' A_n^2 - 2A_1 A_i' \times A_i' A_n \cos A_i'.$$

Comme  $A_i$  est croissant,  $\cos A_i$  est décroissant ( $0 \leq A_i \leq \pi$ ). Donc pour chaque transformation  $t_i$ ,  $A_1 A_n$  augmente. Il s'en déduit que  $A_1 A_n$  est une fonction croissante de  $r$ . Comme la limite de  $A_1 A_n$  est égale à  $c_2 + c_3 + \dots + c_n$  et que :

$$c_2 + c_3 + \dots + c_n > c_1 \text{ (inégalité triangulaire)}$$

il existe donc une valeur unique de  $r$  pour laquelle  $A_1 A_n = c_1$ .

D'où le polygone inscriptible unique dont les côtés sont donnés (fig. 6).

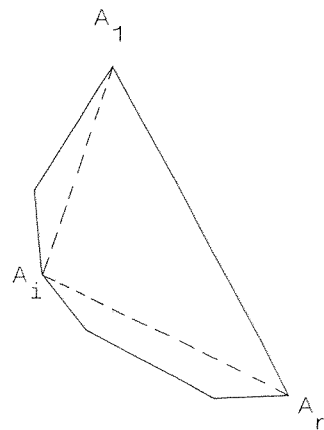


Figure 6

## B. Problème du maximum absolu de l'aire

### Exemple du pentagone quelconque de côtés $a, b, c, d$ et $e$

On peut le considérer comme la réunion d'un triangle de côtés  $a, b$  et  $x$  et d'un quadrilatère de côtés  $c, d, e$  et  $x$ , où  $x$  est la diagonale convenable.

D'après les calculs précédents, l'aire est alors :

$$A(x) = ((a + b + x)(a + b - x)(b + x - a)(x + a - b))^{0,5} + ((-x + c + d + e)(x - c + d + e)(x + c - d + e)(x + c + d - e))^{0,5}$$

La détermination du maximum devient difficile : des exemples numériques précis et la calculatrice graphique le font apparaître.

## EN CONCLUSION

Ce petit problème nous aura entraîné bien loin et posé quelques questions non résolues. L'existence d'un maximum absolu amène à considérer le cas de fonctions à plusieurs variables si le nombre de côtés est supérieur ou égal à 7 : le découpage du polygone en quadrilatères et éventuellement un triangle fait intervenir au moins deux diagonales.

Merci à tous ceux qui feront part du résultat de leurs réflexions et de leurs recherches!

*Dans "Discours de la méthode" DESCARTES définit quatre préceptes qui seront la base de ce qui deviendra la méthode cartésienne :*

Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse **évidemment** être telle; c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si **clairement** et si **distinctement** à mon esprit **que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.**

Le second, de **diviser** chacune des difficultés que j'examinais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de **conduire par ordre de mes pensées**, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés, et **supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.**

Et le dernier, de faire partout **des dénombrements si entiers et des revues si générales**, que je fusse assuré de ne rien omettre.

René DESCARTES, *Discours de la méthode*,  
La Pléiade, (1970)