

A VOS STYLOS

PROBLÈME 14 (proposé par D. DUMONT)

Énoncé

Démontrer l'égalité suivante pour $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \dots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{7x^7}{1-x^7} + \dots$$

Question complémentaire

Comparer à l'aide d'un micro-ordinateur les vitesses de convergence des deux séries. Comment croît la somme $S(x)$ de ces séries quand x tend vers 1^- ? (problème dont le résultat n'est pas connu par l'auteur).

Solution (de M. KRIER)

Cette solution nous est arrivée après bouclage du numéro précédent. Nous tenons à la faire paraître, d'une part en raison de son élégance, d'autre part parce qu'elle répond partiellement à la question complémentaire.

1°) La série de terme général x^n ($|x| < 1$) est absolument convergente, donc le produit $(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^4)\dots$ est convergent, et même commutativement convergent. D'autre part, on a l'identité (pour $|x| < 1$)

$$1) \quad (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n})\dots = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^p+\dots = \frac{1}{1-x}.$$

(Il suffit pour s'en rendre compte de décomposer chaque entier p dans le système binaire.)

En écrivant l'égalité (1) pour x, x^3, x^5, x^7 , etc et en effectuant le produit, on trouve l'identité

$$2) \quad (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^n)\dots = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^3} \times \frac{1}{1-x^5} \times \dots$$

C'est une égalité entre deux fonctions analytiques dans le disque unité. En prenant les dérivées logarithmiques, on obtient la formule demandée.

2°) Soient $0 < x < 1$ et $u_n = \frac{(2n+1)x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}}$. Nous pouvons encadrer u_n : en effet en utilisant la convexité de la fonction $f(z) = x^z$ on voit que

$$(2k+1)x^k \leq 1+x+x^2+\dots+x^{2k} \leq 2k+1$$

d'où $\frac{x^{2k+1}}{1-x} \leq u_k = \frac{(2k+1)x^{2k+1}}{(1+x+x^2+\dots+x^{2k})(1-x)} \leq \frac{x^{k+1}}{1-x}$ et par addition :

$$\frac{x}{1-x} \frac{1-x^{n+2}}{1-x^2} \leq \sum_{k=0}^n u_k \leq \frac{x}{1-x} \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

A VOS STYLOS

puis :

$$\frac{x}{1+x} \times \frac{1}{(1-x)^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq x \times \frac{1}{(1-x)^2}$$

conclusion : la fonction $(1-x^2)(\sum_{k=0}^{\infty} u_k)$ est encadrée par les fonctions $\frac{x}{1+x}$ et x .

PROBLÈME 15

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x + \sqrt{n}) = 0$ pour tout x . A-t-on $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$?

Solution de 'L'Ouvert'

Soit $\varepsilon > 0$. Appelons U_n l'ouvert formé des x tels que $|f(x + \sqrt{k})| > \varepsilon$ pour un $k > n$. L'hypothèse entraîne que l'intersection de tous les U_n est vide. Il en résulte que l'un d'eux, U_m , ne rencontre pas un certain intervalle non vide $]a, b[$. (En effet, si chaque U_n rencontrait tout intervalle $]a, b[$,

$$\begin{aligned} U_1 &\text{ contiendrait un }]a_1, b_1[\text{ pour } a_1 < b_1, \\ U_2 &\text{ contiendrait un }]a_2, b_2[\text{ pour } a_1 < a_2 < b_2 < b_1, \\ U_3 &\text{ contiendrait un }]a_3, b_3[\text{ pour } a_1 < a_2 < a_3 < b_3 < b_2 < b_1, \end{aligned}$$

etc ..., donc $a = \lim_n a_n$ serait dans tous les \mathcal{V}_n ; on pourrait aussi évoquer le théorème de BAIRE.)

Donc l'ensemble des x tels que $|f(x)| \leq \varepsilon$ contient les intervalles $I_k =]a + \sqrt{k}, b + \sqrt{k}[$ pour tout $k > m$. Il ne reste qu'à remarquer que pour k assez grand, il n'y a pas de trou entre I_k et I_{k+1} ; $|f|$ est majorée par ε au voisinage de $+\infty$.

PROBLÈME 16

Énoncé

Les touches \oplus , \otimes , \odot de ma calculatrice sont hors d'usage. Comment effectuer les quatre opérations en utilisant seulement des constantes et les touches de soustraction \ominus et d'inversion \odot/x ?

Indication

Utiliser le carré fournit une méthode, probablement pas minimale.

PROBLÈME 17

Énoncé (proposé par O. ADELMAN)

Trouver tous les couples (a, b) de réels strictement positifs tels que, en posant

$$A = \{[na], n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{[nb], n \in \mathbb{N}^*\}$$

A VOS STYLOS

on ait $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{N}^*$. $[x]$ est la partie entière de x .

Même question avec trois réels a, b, c tels que A, B et C forment une partition de \mathbb{N}^* .

PROBLÈME 18

Enoncé (proposé par M. EMERY)

Aux instants $1, 3, 5, \dots, 103$, on retourne successivement les 52 cartes (26 noires et 26 rouges) d'un jeu préalablement battu. On a le droit une fois, à l'un des instants $0, 2, 4, \dots, 102$, de déclarer : “*Je parie que la prochaine carte sera rouge*”. On gagne si elle l'est effectivement, on perd sinon — ou si l'on n'a choisi aucun instant. Quelle stratégie maximise la probabilité de gain?

Tous les grands mathématiciens qui ont parlé de leurs travaux se sont toujours plu à insister sur le rôle qu'y joue ce qu'ils appellent généralement leur “*intuition*”. Cela peut paraître étrange au non-initié : s'il ouvre un livre de mathématiques d'aujourd'hui, il n'y verra que des centaines de lemmes, formules, théorèmes, corollaires, s'enchaînant de façon compliquée suivant des règles logiques implacables, et relatifs à des objets mathématiques qui ne peuvent avoir aucune “*image*” dans notre univers sensible. J'ai connu des mathématiciens plus âgés, ayant acquis une maîtrise incontestée de l'analyse classique, qui ne pouvaient concevoir la façon dont leurs cadets naviguent sans hésitation dans un océan d’“*abstraction*” ; ils auraient volontiers assimilé leurs raisonnements à un travail de machines, agençant des formules sans chercher à les comprendre.

Je crois que rien n'est plus éloigné de la réalité ; mais il faut évidemment renoncer à prendre le mot “*intuition*” au sens qu'on lui donne d'ordinaire. La difficulté est que ce que le mathématicien appelle “*intuition*” est pour lui une expérience psychologique tout à fait personnelle, à peu près incommunicable et il y a tout lieu de croire que les “*intuitions*” de deux mathématiciens sont le plus souvent très différentes.

(...)

Comment le mathématicien d'aujourd'hui peut-il s'engager dans ce parcours vers la découverte (...) alors que les notions qu'il manie sont entièrement dépourvues de toute “*image*” sensible ? Je crois qu'il se crée pour lui-même des images purement mentales et incommunicables de ces objets mathématiques. La formulation précise des axiomes qui les définissent, d'où ont été éliminées toutes les particularités superflues qu'ils peuvent présenter dans les utilisations diverses de leur structure, peuvent aider à la formation de ces images ; en d'autres termes, et, bien que cela puisse paraître paradoxal, **l'abstraction peut être utile à la formation de “l'intuition” plutôt qu'elle ne la paralyse.**

J. DIEUDONNÉ, *Pour l'honneur de l'esprit humain*,
Hachette (1987)