

## A VOS STYLOS

### RETOUR SUR LE PROBLÈME 14

D. DUMONT qui avait proposé ce problème nous écrit de Madagascar où il est en poste : Je vois une solution partielle du problème que j'avais proposé, où il est question de l'identité

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \dots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{7x^7}{1-x^7} + \dots$$

Voici une autre preuve de cette identité, qui permet de compléter la solution en répondant au problème de trouver un équivalent de la somme  $S(x)$  quand  $x$  tend vers  $1^-$ , plus précisément je propose  $S(x) \sim \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{(1-x)^2}$ . On part de l'identité entre deux produits infinis :

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\dots}$$

qui s'obtient par simplification en ayant d'abord remplacé chaque facteur  $1+x^n$  du premier membre par  $\frac{1-x^{2n}}{1-x^n}$ . Si  $P(x)$  désigne ces deux produits infinis, on obtient l'identité cherchée en prenant les dérivées logarithmiques. On a :

$$S(x) = x(\log P(x))' = x \frac{P'(x)}{P(x)}$$

Mais par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} \log P(x) &= \sum_{n \geq 1} \log(1+x^n) = \sum_{n \geq 1} = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m+1} x^{mn}}{m} = \sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sum_{n \geq 1} x^{mn} \\ &= \sum_{m \geq 1} (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m(1-x^m)} = \frac{1}{1-x} \left[ x - \frac{x^2}{2(1+x)} + \frac{x^3}{3(1+x+x^2)} - \dots \right] \\ &\sim \frac{1}{1-x} \left[ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots \right] = \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

car on sait que  $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , d'où  $\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} - 2 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{(2m)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ .

Par suite,  $S(x) = x(\log P(x))' \sim \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{(1-x)^2}$ , en admettant que l'on puisse dériver les équivalents. Cette démonstration manque totalement de rigueur, mais, au risque

d'encourir des reproches de collègues sourcilleux, je pense que c'est le résultat qui compte et qu'il est exact.

En revanche, je ne sais toujours pas répondre à la question de donner des équivalents, pour  $x$  fixé et quand  $n$  tend vers l'infini, des restes  $R_n(x)$  de chaque série, je pense qu'il serait intéressant de comparer au moins expérimentalement les deux vitesses de convergence à l'aide d'un micro-ordinateur. Les lecteurs intéressés par ce problème, ou par une démonstration rigoureuse du résultat donné plus haut, gardent donc la possibilité de relancer le sujet.

D'autre part, M. KRIER, après une démonstration de l'égalité reposant sur le même argument que chez D. DUMONT, précise le comportement de la somme au voisinage de  $x = 1$ , en fournissant l'encadrement suivant, compatible avec la conjecture de D. DUMONT.

Soit  $u_n = \frac{(2n+1)x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}}$ . Nous pouvons encadrer  $u_n$  : en effet, en utilisant l'inégalité  $x^p + x^{2k-p} > 2x^k$ , on voit que

$$(2k+1)x^k < 1 + x + x^2 + \dots + x^{2k} < 2k+1$$

d'où

$$\frac{x^{2k+1}}{1-x} < u_k = \frac{(2k+1)x^{2k+1}}{(1+x+x^2+\dots+x^{2k})(1-x)} < \frac{x^{k+1}}{1-x}$$

et, par addition

$$\frac{x}{1-x} \frac{1-x^{(2n+2)}}{1-x^2} < \sum_{k=0}^n u_k < \frac{x}{1-x} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

puis

$$\frac{x}{1+x} \times \frac{1}{(1-x)^2} < \sum_{k=0}^{\infty} u_k < x \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Conclusion : la fonction  $(1-x)^2(\sum_{k=0}^{\infty} u_k)$  est encadrée par les fonctions  $\frac{x}{1+x}$  et  $x$ .

---

### PROBLÈME 17

**Énoncé** (proposé par O. ADELMAN)

Trouver tous les couples  $(a, b)$  de réels strictement positifs tels que, en posant

$$A = \{[na], n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{[nb], n \in \mathbb{N}^*\}$$

on ait  $A \cap B = \emptyset$  et  $A \cup B = \mathbb{N}^*$ .  $[x]$  est la partie entière de  $x$ .

Même question avec trois réels  $a, b, c$  tels que  $A, B$  et  $C$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

**Solutions**

Nous avons reçu trois solutions : deux de l'auteur, une de J. LEFORT et une solution partielle de P. FRIEDERICH. Etant donné la diversité des démonstrations utilisées il nous a semblé intéressant de les présenter toutes les trois.

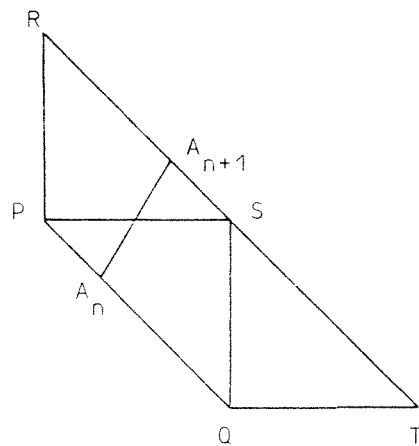
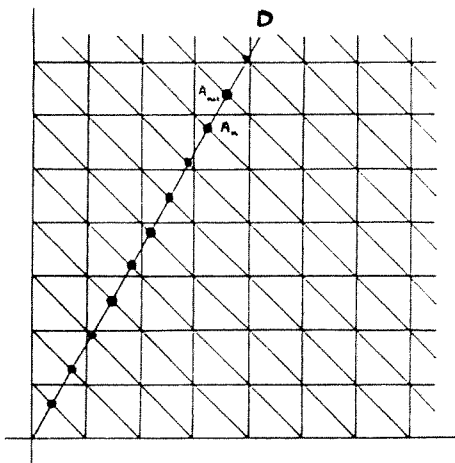
**Solution géométrique de M. ADELMANN**

Il est clair que  $a$  et  $b$  sont plus grands que 1. Posons  $\alpha = \frac{1}{a}$  et  $\beta = \frac{1}{b}$ , et appelons  $A_n$  le point du plan de coordonnées  $(n\alpha, n\beta)$ ; les points  $A_n$  sont alignés sur une droite  $D$ . Désignons par  $H$  (respectivement  $V$ ) l'ensemble des droites d'équation  $y = n$  (respectivement  $x = n$ ) où  $n$  décrit  $\mathbb{N}^*$ , et par  $E$  la réunion  $H \cup V$ .

Un entier  $n \geq 1$  est dans  $A$  si et seulement si  $n \leq pa < n + 1$  pour un  $p \geq 1$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha n \leq p < \alpha(n + 1)$ , ou encore si et seulement si l'intervalle  $[A_n, A_{n+1}[$  de  $D$  rencontre au moins une droite de  $V$ ; puisque  $\alpha < 1$  ceci équivaut à dire que  $[A_n, A_{n+1}[$  rencontre exactement une droite de  $V$ . De même,  $n$  est dans  $B$  si et seulement si  $[A_n, A_{n+1}[$  rencontre exactement une droite de  $H$ . En fin de compte,  $A$  et  $B$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$  si et seulement si chaque  $[A_n, A_{n+1}[$  rencontre exactement un élément de  $E$ .

Cela entraîne l'irrationalité de  $\frac{\alpha}{\beta}$  : sinon, la droite  $D$  passerait par une infinité de points entiers, et les  $[A_n, A_{n+1}[$  contenant ces points rencontreraient deux éléments de  $E$ .

Cela entraîne aussi  $\alpha + \beta = 1$  : pour  $n \geq 1$ ,  $[n\alpha] + [n\beta]$  est égal à la somme du nombre d'entiers majorés par l'abscisse de  $A_n$  et du nombre d'entiers majorés par l'ordonnée de  $A_n$ , donc au nombre total d'éléments de  $E$  rencontrant  $[A_1, A_n]$ , qui vaut  $n - 1$  (ou  $n$  si  $A_n$  est sur une droite de  $E$ ); divisant par  $n$  et faisant tendre  $n$  vers l'infini, on obtient  $\alpha + \beta = 1$ .



Réciproquement, supposons  $\alpha + \beta = 1$  et  $\frac{\alpha}{\beta}$  irrationnel. Pour  $n \geq 1$ ,  $A_n$  est sur la droite  $x + y = n$  sans être un point entier; sur cette droite, il se trouve entre deux points entiers  $P$  et  $Q$ . Le point  $A_{n+1}$  est sur la droite suivante  $RST$ , entre  $R$  et  $T$ , sans être en  $S$ . Donc l'intervalle  $[A_n, A_{n+1}[$  rencontre un et un seul des segments  $PS$  et  $QS$ , c'est-à-dire une droite de  $E$  et une seule.

### Solution analytique de M. ADELMANN

Si  $a \leq 1$ ,  $A \supset \mathbb{N}^*$  et  $B = \emptyset$ ;  $a$  et  $b$  doivent donc être plus grands que 1. Posons  $\alpha = \frac{1}{a}$ ,  $\beta = \frac{1}{b}$ . Puisque  $n_1 \neq n_2 \implies [n_1 a] \neq [n_2 a]$ , le nombre d'éléments de  $A \cap \{1, \dots, k\}$  est le plus grand entier  $n$  tel que  $na < k + 1$ , c'est-à-dire tel que  $n < (k + 1)\alpha$ . En particulier, la "densité asymptotique" de  $A$  est

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |A \cap \{1, \dots, k\}| = \alpha,$$

et de même celle de  $B$  est  $\beta$ . Puisque  $A \cap B = \emptyset$ , celle de  $A \cup B$  est  $\alpha + \beta$ ; comme  $A \cup B = \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha + \beta = 1$ .

Il est aussi nécessaire que  $\alpha$  soit irrationnel; sinon, il s'écrirait  $\frac{p}{q}$ , et  $q$  serait à la fois dans  $A$  (car  $q = pa$ ) et dans  $B$  (car  $q = (q - p)b$ ).

Ces conditions sont suffisantes. Supposons en effet  $\alpha$  et  $\beta$  irrationnels et de somme 1.

Soit  $k \in A \cap B$ . Puisque  $k$  est dans  $A$ , il existe un entier  $m$  tel que  $k \leq ma < k + 1$ , donc

$$k\alpha \leq m < (k + 1)\alpha;$$

de même,  $k$  étant dans  $B$ , il existe  $n$  tel que

$$k\beta \leq n < (k + 1)\beta.$$

Par addition,  $k \leq m + n < k + 1$ , donc  $m + n = k$ . Les inégalités  $k\alpha \leq m$  et  $k\beta \leq n$ , dont la somme est une égalité, doivent aussi être des égalités, et l'hypothèse d'irrationnalité est contredite :  $A \cap B$  est donc vide.

Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ . Toujours grâce à l'irrationnalité, il existe  $p$  tel que  $\frac{p}{q+1} < \alpha < \frac{p+1}{q+1}$ , et on a donc aussi  $1 - \frac{p+1}{q+1} < \beta < 1 - \frac{p}{q+1}$ . Il en résulte que  $pa < q + 1 < (p + 1)a$  et  $(q - p)b < q + 1 < (q + 1 - p)b$ , d'où

$$|A \cap \{1, \dots, q\}| = p, \quad |B \cap \{1, \dots, q\}| = q - p.$$

Joint à  $A \cap B = \emptyset$ , ceci entraîne  $A \cup B \supset \{1, \dots, q\}$ , donc  $q \in A \cup B$ , et l'égalité  $A \cup B = \mathbb{N}^*$  est établie.

**Solution de J. LEFORT**

a) Supposons  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ ,  $a$  et  $b$  irrationnels et soit  $p$  un naturel alors  $\frac{p}{a} + \frac{p}{b} = p$  d'où  $[\frac{p}{a}] + [\frac{p}{b}] = p - 1$  et de même  $[\frac{p+1}{a}] + [\frac{p+1}{b}] = p$ .  $a$  et  $b$  jouant le même rôle, on peut supposer que

$$[\frac{p}{a}] = [\frac{p+1}{a}] \quad \text{et} \quad [\frac{p}{b}] + 1 = [\frac{p+1}{b}].$$

• De la première égalité on tire

$$[\frac{p}{a}] < \frac{p}{a} < \frac{p+1}{a} < [\frac{p}{a}] + 1$$

les inégalités étant strictes à cause de l'irrationalité de  $a$ . La première inégalité conduit à  $[\frac{p}{a}]a < p$ ; la dernière inégalité à  $([\frac{p}{a}] + 1)a > p + 1$ . On en déduit

$$[\frac{p}{a}]a < p < p + 1 \leq ([\frac{p}{a}] + 1)a$$

ce qui prouve que  $p \notin A$ .

• De la deuxième égalité on tire

$$[\frac{p}{b}] + 1 < \frac{p+1}{b} < \frac{p+b}{b} < [\frac{p}{b}] + 2$$

par un raisonnement analogue au précédent. La première inégalité conduit à  $([\frac{p}{b}] + 1)b < p + 1$  et la dernière à  $p + b < ([\frac{p}{b}] + 1)b + b$  soit  $p < ([\frac{p}{b}] + 1)b$ . On en déduit que  $([\frac{p}{b}] + 1)b$  est encadré par  $p$  et  $p + 1$  ce qui prouve que  $p = [([\frac{p}{b}] + 1)b] \in B$ .

• Il n'y a que deux cas possibles pour tout naturel, il est soit dans  $A$ , soit dans  $B$ . Ces deux ensembles forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ .

b) La réciproque est la même que ci-dessus.

Cependant aucun des auteurs n'a répondu à la question supplémentaire : "Peut-on généraliser le problème au cas de trois réels  $a, b, c$  tels que  $A, B$  et  $C$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$ ?"

---

PROBLÈME 18

**Énoncé (proposé par Ph. ARTZNER)**

Aux instants 1, 3, 5, ..., 103, on retourne successivement les 52 cartes (26 noires et 26 rouges) d'un jeu préalablement battu. On a le droit de déclarer au plus une fois, à l'un des instants 0, 2, 4, ..., 102 : "Je parie que la prochaine carte sera rouge". On gagne si elle l'est effectivement, on perd sinon — ou si l'on n'a choisi aucun instant. Quelle stratégie maximise la probabilité de gain?

**Indication**

La dernière carte du paquet a une chance sur deux d'être rouge.

---

PROBLÈME 19

**Énoncé**

Soit  $C$  un ensemble convexe borné, fermé du plan. Peut-on construire un parallélogramme  $P$  inclus dans  $C$  tel que l'aire de  $P$  soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire de  $C$ ?

---

PROBLÈME 20

**Énoncé**

Calculer

$$\sum_{n=0}^p (-1)^{p-n} \frac{n^p}{n!(p-n)!}$$

et en déduire  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$ .