ASPECTS GESTALTISTES DE LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES

Georges GLAESER

Le rêve de Descartes est une illusion! Il n'existe pas de Méthode Universelle. Certes, l'informatique (lorsqu'elle s'intitule abusivement "Intelligence Artificielle") sait construire des algorithmes qui répondent à des questions-types de plus en plus subtiles.

Elle est capable de programmer des *détections d'analogies* usuelles qui s'apparentent à des *associations d'idées.* Mais elle échoue devant un *problème.* [I fasc. 1]

Définition :

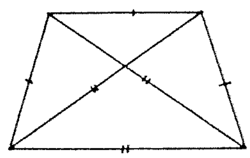
Un problème est une question à laquelle on ne peut répondre en disposant a priori d'une stratégie de recherche infaillible, toute préparée.

L'heuristique est la branche fondamentale de la didactique : elle étudie comment se construit la compréhension; dans les cas où le dressage préalable du chercheur s'avère impuissant!

I.— UN EXEMPLE

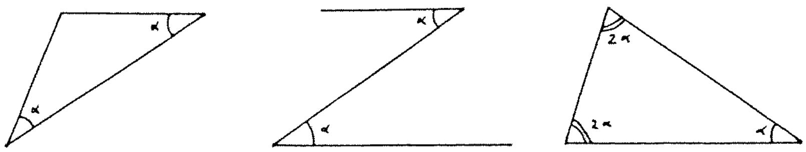
> Construire à la règle et au compas, un trapèze isocèle, dont les diagonales sont égales à la grande base, tandis que les côtés obliques sont égaux à la petite base.

On peut dresser des élèves à produire rapidement, face à cet énoncé, la maquette suivante :



Article extrait des actes du "Colloque international sur l'enseignement de la géométrie" (Mons, 31 août - 2 septembre 1982), pp. 241-254.

On peut même les provoquer à extraire de ce dessin les sous-figures suivantes :



pour en conclure que l'angle α vaut 36°.
Mais souvent, "l'intelligence artificielle" s'arrête là! Personnellement, la seule évocation d'un angle de 36° provoque chez moi depuis l'âge de 15 ans une association d'idées avec un pentagone régulier! L'exercice est alors *automatiquement* résolu : les sommets du trapèze appartiennent à une figure solidement ancrée dans ma mémoire, que je sais construire.

Mais pour la plupart des personnes, cet énoncé constitue un **problème**.

Nous l'avons encore constaté cette année, en observant des lauréats du Rallye Mathématique : ce n'est qu'après une heure de tâtonnements qu'ils ont aperçu le lien qui unit ce genre de figure, avec une notion qu'ils connaissent : le Nombre d'Or.

Certes, on peut banaliser la question en réintroduisant dans les programmes scolaires l'étude du pentagone régulier. Mais on ne peut songer à stocker dans la mémoire de tous les élèves les millions d'associations d'idées qui pourraient leur être utiles un jour, pour résoudre un problème.

N'en déplaise à certains behavioristes, il est *impossible d'enseigner* le *problem-solving*; on ne peut qu'enseigner le *drill-solving*, avec des drills [I, fasc. 1] plus ou moins sophistiqués.

Evidemment, on peut familiariser nos élèves avec les *tables heuristiques de Polya* [P]. Mais lorsqu'on conseille : "Connaissez-vous un problème qui se rattache à la question posée?" on ne fait que développer une saine attitude de recherche, indépendante de l'énoncé précis. Le chercheur peut d'ailleurs répondre négativement soit parce qu'en fait, il ne connaît pas de problèmes analogues, soit parce qu'il ne pense pas à un problème qu'il connaît bien, mais qui ne se relie pas à l'énoncé par des associations d'idées bien conditionnées. Lorsqu'on suggère : "Dessinez une figure", on ne fournit pas d'instruction algorithmique pour faire produire un dessin efficace. Et, en fait, dans l'exemple 3 ci-dessous, la découverte du mode de représentation souverain constitue à lui seul la solution du problème!

Par contre, on peut se livrer à un *entraînement heuristique systématique.* A force de résoudre des problèmes variés, on améliore les performances ultérieures. C'est particulièrement vrai si l'on prend soin de tirer les leçons de ces longues aventures.

Mais il est dans la nature des choses, qu'un chercheur bien entraîné, "*sèche*" de temps en temps, devant un problème insolite.

Seul le succès est significatif. On ne peut rien conclure, au sujet de l'aptitude à résoudre des problèmes, à l'occasion d'un échec isolé.

L'objet de mon exposé est la description de quelques-unes des démarches de pensées liées à la *reconnaissance de forme.*

II.— L'INTUITION

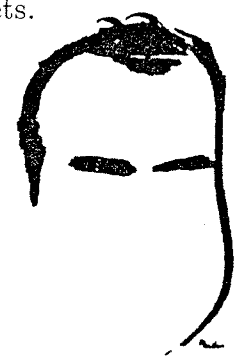
Le livre classique de Westcott [W] distingue les nombreuses significations du mot "intuition". En heuristique, je ne retiens que le sens suivant :

Définition
L'intuition est l'aptitude à conclure à partir d'informations incomplètes.

Dans l'exemple précédent, la seule évocation d'un angle de 36° m'a fourni la solution. Bien entendu, c'est une information incomplète, insuffisante pour fournir des certitudes. Il a bien fallu que je démontre que les sommets du trapèze cherché sont bien quatre sommets consécutifs d'un pentagone régulier qui n'apparaît même pas sur la figure. Mais cette *mise en logique* n'est plus qu'une activité de routine, une simple *vérification.*

EXEMPLE 2

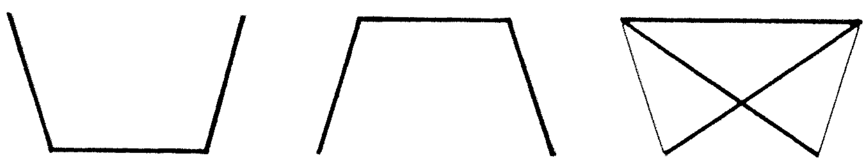
Dans ces caricatures, des taches caractéristiques permettent de reconnaître des personnages connus, grâce à des indices incomplets.



[Pa]

Le succès de l'opération dépend d'ailleurs de la familiarité que le spectateur peut avoir avec l'individu représenté. L'intuition est plus ou moins puissante selon la quantité d'informations nécessaires pour la déclencher. Dans le portrait de Chaplin, la reconnaissance est parfois obtenue à la seule vue du chapeau melon : il s'agit donc ici d'une information redondante. Il me semble que la caricature de Nixon est remarquable en ce qu'elle réduit les indices à leur plus simple expression. Edgar Poe, Conon Doyle ou Ellery Queen décrivent des détectives fictifs qui se contentent d'indices imperceptibles pour résoudre leurs énigmes. Des chercheurs moins géniaux exigent des *faisceaux d'indices.*

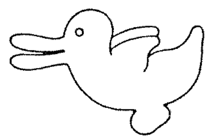
Des expériences montrent que les dessins ci-dessous ne sont pas équivalents pour provoquer l'émergence de l'intuition (ici le pentagone régulier) (cf. [DDP]).



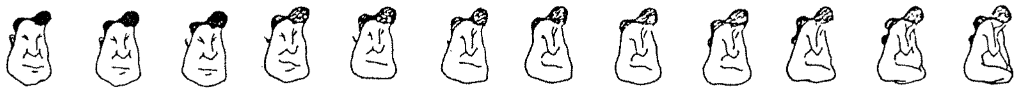
L'emploi de la couleur peut être décisif.

Face à des chercheurs novices, on peut accélérer l'intuition, en "soufflant" avec une sage lenteur des éléments de réponse jusqu'à ce que jaillisse l'eureka.

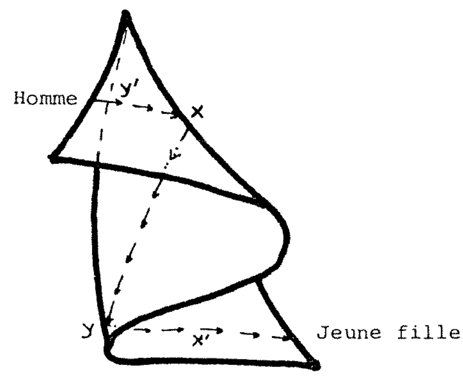
Parfois, l'information varie continuellement et il est possible d'observer comment la fourniture d'indices gradués provoque les phénomènes décrits par la *théorie des catastrophes* :



En faisant pourner lentement le dessin ci-dessus, on constate que la rupture ne s'effectue pas au même moment à l'aller et au retour. Dans la bande dessinée suivante, le dessinateur a introduit des modifications imperceptibles depuis la tête d'homme jusqu'à l'image de la jeune fille. Le changement brusque de vision n'apparaît pas au même moment à l'aller et au retour, conformément au modèle d'hystérésis de la *fronce* :



Les ruptures s'effectuent, à l'aller de X et X' et au retour à partir de Y et Y'.



III. L'"INSIGHT"

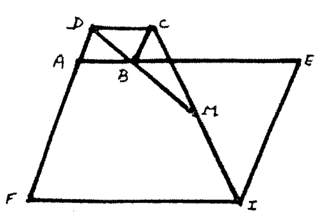
Ce mot anglais est presque intraduisible en français : on pourrait le rendre par "perspicacité" ou "pénétration d'esprit".

Définition

L'insight est l'aptitude à conclure en présence d'informations surabondantes.

Il s'agit donc d'une espèce de reconnaissance de formes, opposée à l'intuition!

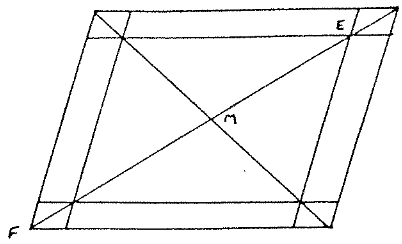
EXEMPLE 3 [I fasc. 2]



Voici une figure, où $ABCD$ et $AEIF$ sont des parallélogrammes et où le point M situé sur DB est au milieu de CI. On demande de prouver que F, M et E sont alignés.

Lorsque nous préparions le fascicule 2 de notre '*Livre du Problème*', notre chère collaboratrice Lucienne Félix, contemplant cet énoncé s'écria : "Qu'est-ce que c'est que ce fouillis!" Et elle se mit en devoir de découvrir ce qui se cachait sous cette horreur.

D'abord on vit *l'intuition* à l'œuvre. L'hypothèse que M est au milieu de CI s'avéra un indice suffisant pour l'inciter à effectuer une symétrie de centre M. C'est alors qu'apparut, dans toute sa simplicité, la figure ci-contre qui résoud trivialement le problème! Elle dévoile la structure sous-jacente.



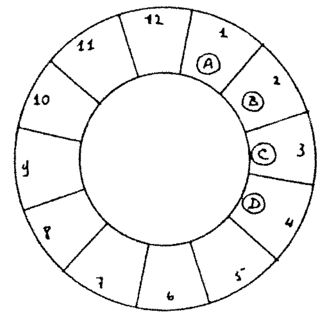
EXEMPLE 4

> Je vous invite à dessiner l'intéressante figure suivante : les sommets A, B, C, D d'un quadrilatère inscriptible déterminent, pris 3 par 3, quatre triangles. Chacun possède quatre cercles tritangents (inscrit ou exinscrits). Les 16 centres de ces cercles constituent une configuration remarquable que l'on demande d'étudier [D].

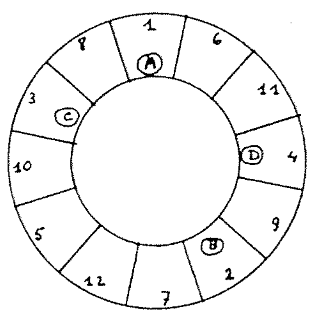
Il faut de l'"insight" pour découvrir dans l'enchevêtrement des lignes de constructions les sous-figures simples qui expliquent ce "miracle".

EXEMPLE 5

On place sur les cases (1, 2, 3, 4) du cadran ci-dessous quatre jetons A, B, C, D. On déplace un jeton en le faisant sauter par-dessus quatre cases (vides ou non), pour atterrir sur une case inoccupée. Quelles permutations des jetons peut-on obtenir à la suite de déplacements qui aboutissent finalement à une nouvelle occupation des cases initiales?



Ce problème est difficile parce que la numérotation "normale" des cases s'adapte mal à la description des déplacements par sauts précisés dans l'énoncé. Mais si on a l'idée de renuméroter le cadran comme ceci :



le déplacement se réduit au passage d'une case à une case vide contigüe. Il apparaît alors que les permutations obtenues sont exactement les permutations circulaires (sur la seconde figure) qui fournissent la liste des quatre permutations possibles sur la figure 1.

Ici l'insight (complété par une "traduction" dans une nouvelle représentation) a révélé la simplicité de la structure sous-jacente, masquée par la représentation de l'énoncé.

IV.— LE TRANSFERT

Ce dernier exemple montre qu'un énoncé est généralement présenté dans un langage (un "habillement") qui évoque un certain contexte.

Définition

Un transfert est une traduction d'un langage à un autre, avec modification du contexte.

On passe ainsi d'un énoncé à un énoncé équivalent. Il semblerait *du point de vue logique*, que l'on ne gagne (ni perd) rien à une telle reformulation. Mais il est fréquent que les indices susceptibles de déclencher une association d'idées sont plus évocateurs dans un contexte que dans un autre. **Du point de vue heuristique**, le transfert est souvent une opération mentale efficace.

Par exemple, la *géométrie analytique* est l'organisation du transfert entre une situation géométrique et une situation algébrique.

En raisonnant tour à tour sur des figures et des formules, on multiplie les opportunités de faire jaillir des éclairs d'intuition.

EXEMPLE 6

> Le groupe de Galois de l'équation générale du cinquième degré est isomorphe au groupe des isométries d'un icosaèdre régulier. En jouant sur les transferts entre ces deux contextes, Félix Klein a exposé d'une façon très évocatrice l'impossibilité de résoudre les équations générales de degré supérieur à 5, par radicaux [K].

EXEMPLE 7

> Quelles sont les matrices réelles inversibles, dont tous les termes (ainsi que ceux de la matrice inverse) sont non-négatifs ? Cet énoncé présenté dans un contexte algébrique, peut se résoudre sans aucun calcul lorsqu'on l'interprète géométriquement, en termes d'applications linéaires d'un espace R^n sur lui-même.

L'hypothèse signifie que l'application cherchée applique le "premier quadrant" (ensemble de points dont toutes coordonnées sont positives ou nulles) sur lui-même.

On aboutit alors à la caractérisation des "matrices stochastiques", dont un seul terme par ligne (et par colonne) n'est pas nul.

V.— LA RUSE

L'intuition est, par définition, une *conclusion hâtive. De faux indices* engagent souvent la recherche sur une *fausse piste.* Cet effet de ruse est souvent exploité de façon intentionnelle voir machiavélique.

Au jeu de bridge, par exemple, on peut inciter un joueur *expérimenté* à échafauder un plan fautif, en lui fournissant habilement des indices trompeurs.

Le maître du puzzle, Sam Lyod, avait le génie de faire surgir de redoutables casses-têtes à partir de situations apparemment banales. Une ruse peut être une simple farce. Voici un exemple amusant (non géométrique) dû à la malice de l'équipe américaine, aux Olympiades Internationales de Mathématiques d'Erfurt (1974).

EXEMPLE 8

Démontrer l'inégalité :

$$\sqrt{\pi} \prod_{n>1}^{n\neq m} \prod_{m>1} \frac{(n^m - m^n)^2}{n^m + m^n} < \sum_{p=2}^{\infty} \frac{p^p}{(p!)!}.$$

Il fallait faire preuve de perspicacité pour déceler que ce brouillard n'était destiné qu'à dissimuler le fait, très connu :

$$2^4 = 4^2.$$

Mais la ruse est aussi un outil pédagogique. Des questions-pièges peuvent être destinées à provoquer des erreurs, qui attirent l'attention sur les conditions d'application d'un théorème.

EXEMPLE 9

Identifier la surface d'équation

$$(\mu z - \nu y)^2 + (\nu x - \lambda z)^2 + (\lambda y - \mu x)^2 = 1$$

(où λ, μ, ν sont des nombres réels effectivement donnés).

Un étudiant distrait conclura peut-être trop hâtivement sans s'apercevoir que les trois formes linéaires élevées au carré ne sont pas indépendantes!

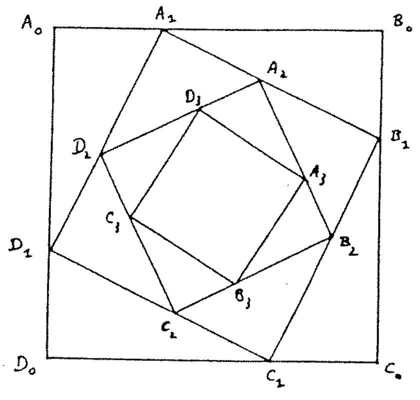
Mais il existe aussi des "ruses du destin", non provoquées par le désir de tromper.

EXEMPLE 10

Quelle est l'enveloppe convexe de la réunion d'une droite et d'un point (non situé sur la droite)? [I fasc. 4].

Ce sont généralement les élèves les plus brillants qui, jugeant cette question trop facile, produiront par inattention la réponse évidente ...mais fausse!

EXEMPLE 11



Dans la figure ci-jointe, le carré $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}D_{i+1}$ se construit à partir du carré $A_iB_iC_iD_i$, en reportant sur les côtés de ce dernier des segments $[A_{i+1}A_i], [B_{i+1}B_i], [C_{i+1}C_i], [D_{i+1}D_i]$ de longueur 1.

Un mathématicien sans méfiance se trompera parfois, sur ce qui se produit à la limite, par analogie avec un autre problème trivial.

VI.— PENSÉE LATÉRALE

A chaque problème est généralement lié un *domaine de recherche.* Les solutions correctes appartiennent à l'ensemble des solutions plausibles. L'intuition puise généralement ses idées dans un domaine de recherche naturel.

Edouard de Bono a décrit une démarche heuristique particulière dont le ressort est la *sortie* du domaine de recherche naturelle.

Définition

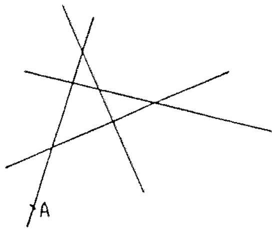
La pensée latérale est une extention du domaine de recherche par l'abandon de contraintes parasites, non formulées dans l'énoncé, que le chercheur se fixait implicitement et inconsciemment.

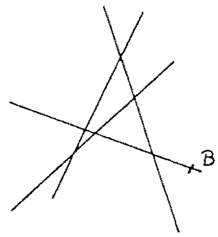
L'exemple-type est l'œuf de Christophe Colomb. On demande de placer un œuf sur une table. Le chercheur admet d'abord implicitement que la coquille doit rester intacte. La solution s'obtient par contre en acceptant de briser légèrement la coquille.

EXEMPLE 12

> Disposer 8 segments de droite (mesurant 4 cm chacun) dans un plan, en sorte que trois segments distincts arbitraires ne soient pas concourants et que chacun de ces segments rencontre exactement trois autres segments [I fasc. 6]
>
> C'est facile! Et pour corser la question on demande en outre que deux de ces segments contiennent respectivement les points A et B, distants de 30 cm.

Maintenant, on ne dispose plus de marge de manœuvre entre 30 cm et 4 cm $\times$ 8 $=$ 32 cm. Le problème serait-il impossible? On pourrait le croire, tant que l'on s'imagine implicitement que la figure produite doit être *connexe.* L'abandon de cette contrainte conduit facilement à des solutions où A et B peuvent être encore plus distants.



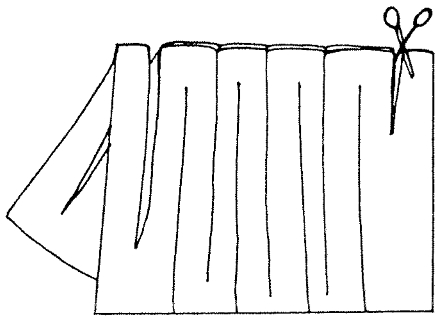


EXEMPLE 13

> Découper un trou dans une carte à jouer, en sorte qu'un obèse puisse passer à travers.

Il semble que la carte est trop petite et l'obèse trop gros pour que ce soit possible. Mais on admet ainsi, implicitement, qu'il est interdit de plier la carte.

Voici la solution classique, proposée au siècle dernier par Tom Tit, dans sa célèbre "Science amusante".



On produit ainsi un anneau extensible de carton, de longueur suffisamment grande.

CONCLUSION

Les démarches de pensées décrites ici, sont des éléments essentiels d'une *éducation* mathématique réussie. (Elles ne se réduisent pas à des *connaissances* comme dans un *enseignement*. On notera qu'elles ne figurent pas dans les programmes scolaires officiels!

Et pourtant elles présentent plus d'importance que l'amas de connaissances exigées de tous les élèves.

BIBLIOGRAPHIE

A l'origine de cet article, se trouvent les deux intéressantes références suivantes : elles développent une conception de *l'intuition* et de *l'insight* qui ne me satisfait pas.

H.B. GRIFFITHS and A.G. HOWSON, Mathematics : Society and Curricula, *Cambridge University Press* (1974).

MacDONALD, Insight and Intuition in Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 9, (1978), pp. 411-420.

[B] Edouard de BONO, La pensée latérale, *Dunod*, 1972, Paris.

[D] Jean DREYER, Drapeaux danois, in : *'L'Ouvert'* n°26, 1982, publ. de l'IREM de Strasbourg et de la Régionale alsacienne de l'APMEP.

[I] IREM de Strasbourg, Le livre du problème (6 fascicules parus), *Editions Cédic*, Paris.

[K] Félix KLEIN, Uber das Ikosaeder, *Teubner*, 1884, Leipzig.

[P] Georges POLYA, Comment poser et résoudre un problème, *Dunod*, 1965, Paris

[W] Malcolm WESTCOTT, Psychology of Intuition, *Rihahart and Winston*, 1968 New-York.

[DDP] Claire DUPUIS, Raymond DUVAL et François PLUVINAGE, Etude sur la stabilité de la géométrie en fin de 3e, in Géométrie au Premier Cycle, Tome II, *Brochure APMEP n°22*, 1978, pp. 65–100.

[Pa] PASTECCA, Dibujando caricaturas, *Ed. Ceac Barcelona*, 1980.

La nouvelle algèbre de Viète (traduction de Vaulézard)

28. La ligne droite n'est comparée à la courbe, parce que l'angle est quelque chose de moyen entre la ligne droite et une figure plaine ; c'est pourquoy la Loy des Homogenes est venue repugner aux deux problemes precedens.

Que l'angle soit moyen entre la ligne et la superficie, il est evident : dautant que la ligne n'est qu'une simple longueur, et l'angle outre ce qu'il participe de la ligne pour estre fait par l'inclination d'icelle, il a de plus l'espace d'entre les lignes inclinées : car c'est cela qui est dit proprement angle ; et cet espace participe de la superficie sans neantmoins estre superficie, en ce qu'elle est contenue de deux lignes par laquelle elle est terminée de deux costés, et de l'autre indeterminée, ce qui l'empesche d'estre superficie ; c'est pourquoy puis que l'angle participe et de la ligne sans estre ligne, et de la superficie sans estre superficie, ayant quelque chose selon le genre des grandeurs moins que cete-cy et plus que cete-là ; il s'ensuivra que l'angle sera quelque chose de moyen entre la ligne droite et la superficie, par consequent incommunicable à la ligne droite. Il s'ensuit aussi, que la ligne circulaire estant la mesure de l'angle, qu'elle sera incommunicable à la droite.

29. Finalement l'art Analitic, introduit soubs la triple forme du Zetetique, Poristique et Exegetic, abrogé de son authorité, le plus ampoulé Probleme des Problemes, qui est,

DONNER SOLUTION DE TOUT PROBLEME.