

SUR LES PARABOLES INSCRITES À UN TRIANGLE

Jean-Claude SIDLER

A la suite d'un article de Jacques Dautrevaux "sur les coniques à centre tangentes aux trois côtés d'un triangle", Jean-Claude Sidler nous proposa d'écrire une autre solution utilisant la géométrie projective. Entre-temps, nous reçûmes de J. Dautrevaux d'autres pages sur les paraboles inscrites à un triangle (qui venaient assez naturellement après l'étude précédente), nous donnant les propriétés que vous allez trouver dans les pages qui suivent, démontrées grâce aux équations tangentielles d'une part, à la géométrie élémentaire d'autre part. Nous avons trouvé là l'occasion de publier une résolution en géométrie projective, mais nous tenons à votre disposition l'écrit de J. Dautrevaux ⁽¹⁾.

"L'Ouvert", par la plume de Paul Girault, m'a fait l'honneur d'un bel article pour la sortie de mon livre "Géométrie projective". En guise de remerciement, j'aimerais présenter ici les théorèmes de Brianchon et de Chasles-Steiner, et les appliquer à un problème proposé par J. Dautrevaux dans le prolongement de son dernier article, à savoir l'étude de quelques propriétés des paraboles tangentes aux côtés d'un triangle.

DES THEOREMES QUI SERVIRONT ENSUITE

1• Le théorème de Brianchon

Ce théorème est le dual du célèbre théorème de Pascal (voir un article de Jean Martinet dans le n° 54 de l'Ouvert) ; on peut l'énoncer ainsi :

Six droites ordonnées, formant un hexagone, sont les tangentes à une même conique si et seulement si les diagonales de cet hexagone sont concourantes.

Les figures 1 et 2 illustrent deux situations générales et les figures 3 et 4 illustrent deux situations particulières où des droites consécutives de l'hexagone sont confondues ; dans ce cas leur intersection est le point de contact

⁽¹⁾ Vous pouvez retirer une photocopie de ces pages à la Bibliothèque de l'I.R.E.M. de Strasbourg ou nous faire parvenir une enveloppe libellée à vos nom et adresse et affranchie au tarif en vigueur (4,40 F).

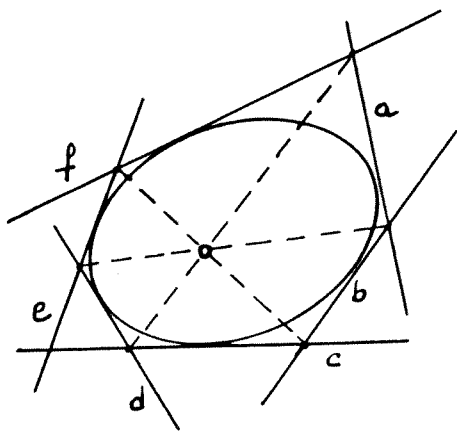


Figure 1

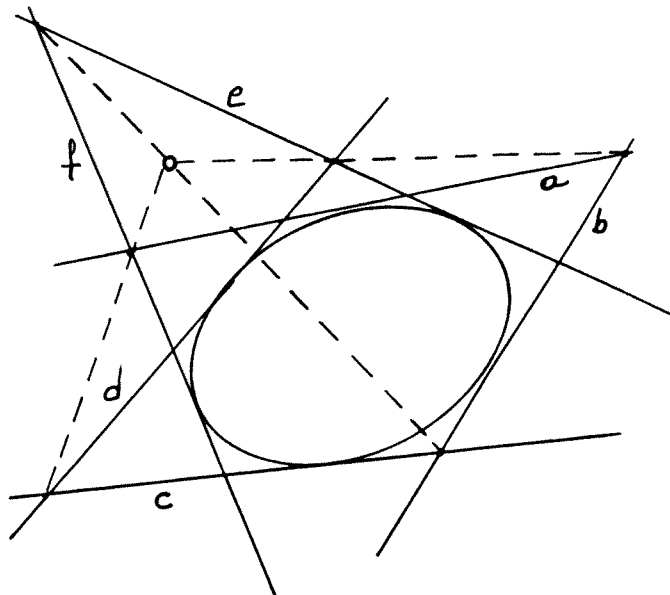


Figure 2

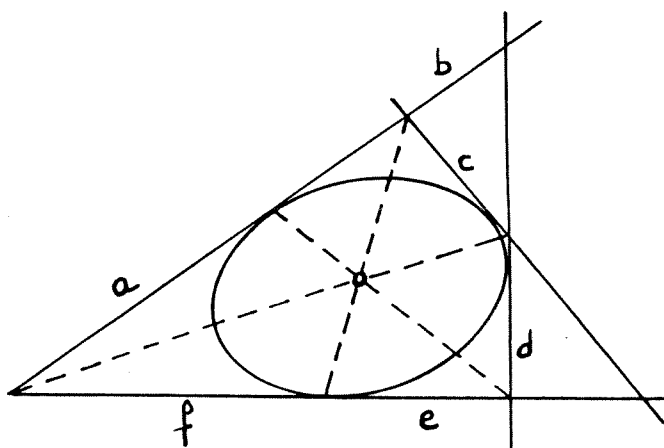


Figure 3

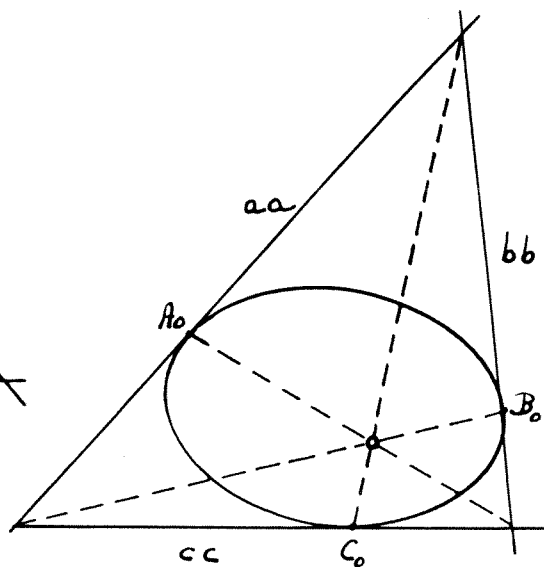


Figure 4

2 • Le théorème de Chasles-Steiner

Dans une homographie (bijection qui conserve le birapport) entre deux droites projectives, toutes les droites joignant un point à son image sont tangentes à une même conique.

Si l'homographie conserve l'intersection des deux droites, les droites joignant un point à son image passent par un point fixe (fig. 6).

La figure 5 ci-après précise les points de contact : on a $(T, K, M, \phi(M)) = -1$

SUR LES PARABOLES INSCRITES A UN TRIANGLE

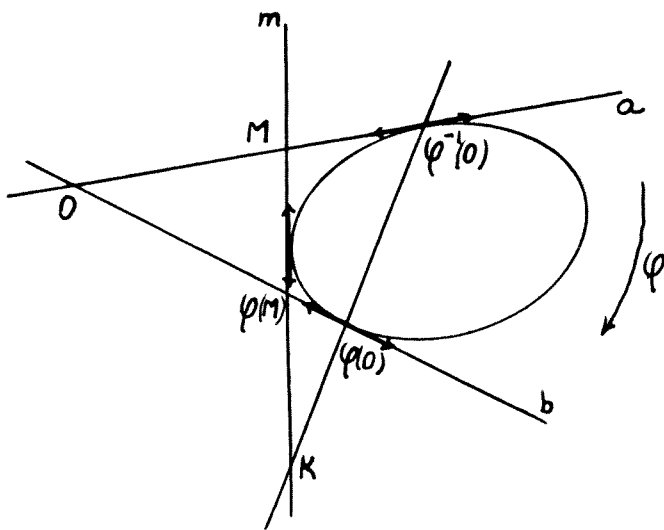


Figure 5

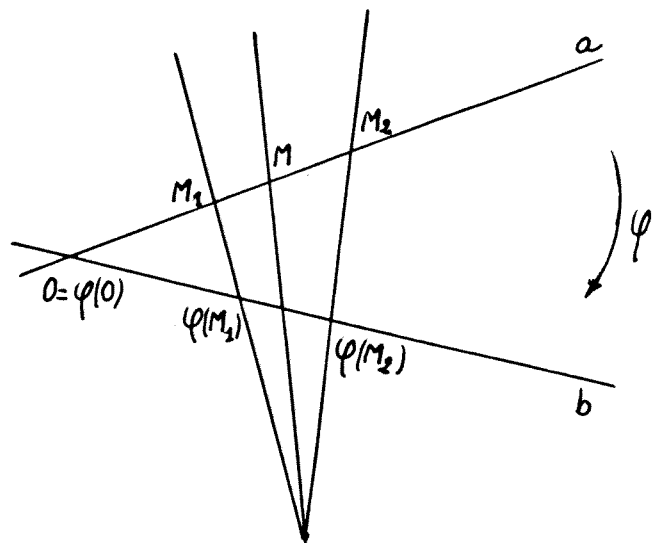


Figure 6

Dans le plan projectif, la figure duale d'une droite est un faisceau de droites, c'est à dire l'ensemble des droites passant par un point P, que l'on note P*.

3 • Théorème dual

Dans une homographie entre deux faisceaux de droites, le point d'intersection d'une droite du premier faisceau et de son image décrit une conique.

Si la droite AB est transformée en elle-même, la conique est dégénérée (fig. 8)

La figure 7 ci-dessous précise les tangentes : on a $(t, MS, MA, MB) = -1$

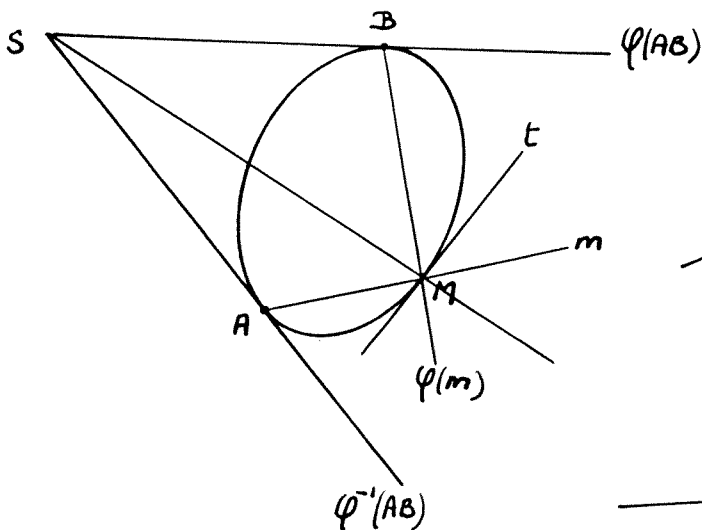


Figure 7

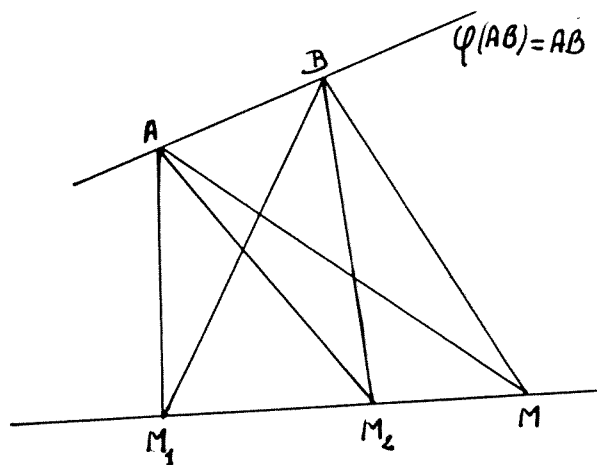


Figure 8

PARABOLES TANGENTES AUX COTES D'UN TRIANGLE

Pour bien maîtriser la situation, nous nous placerons dans une carte affine du plan projectif où la parabole se définit comme une conique tangente à la droite de l'infini.

Soit Π une parabole inscrite dans le triangle ABC ; on notera A_o, B_o, C_o , les points de contact de la parabole avec les côtés BC, CA, AB et $A^\infty, B^\infty, C^\infty$, les points à l'infini de ces mêmes côtés.

Nous allons établir les résultats suivants :

1. Les droites AA_o, BB_o, CC_o sont concourantes en un point Ω .
2. Les droites A_oB_o, B_oC_o, C_oA_o , passent chacune par un point fixe qui est sommet du triangle $A''B''C''$ obtenu en menant par les sommets du triangle ABC des parallèles aux côtés opposés.
3. Les points $L = B_oC_o \cap BC, M = C_oA_o \cap AC, N = A_oB_o \cap AB$ et G , le centre de gravité du triangle ABC , sont alignés sur une droite qui est la polaire de Ω par rapport à Π .
4. Les points $L' = B_oC_o \cap B''C'', M' = C_oA_o \cap C''A'', N' = A_oB_o \cap A''B''$ et Ω sont alignés sur la polaire de G par rapport à la parabole Π .
5. Le lieu de Ω est l'ellipse \mathcal{E} de centre G passant par A, B, C ; la tangente à \mathcal{E} en Ω est la polaire de G par rapport à Π .

Démonstrations

1. On applique le théorème de Brianchon à l'hexagone AB, AB, BC, BC, CA, CA ; c'est le cas de figure n° 4.
2. Le théorème de Brianchon appliqué à l'hexagone $BC, BA, BA, B^\infty C^\infty, CA, CA$ (cas de figure n° 3 où $B^\infty C^\infty$ est la droite de l'infini) montre que la droite B_oC_o , la parallèle à AC passant par B (droite BB^∞) et la parallèle à BA passant par C (droite CC^∞) sont concourantes en A'' (voir figure 9).

On démontre de même que A_oC_o passe par B'' et que A_oB_o passe par C'' (2).

(2) Remarques :

1. Les paraboles inscrites dans un triangle forment un faisceau tangentiel de coniques ; si l'on sait que le triangle $A''B''C''$ est le triangle diagonal de ce faisceau et qu'il est autopolaire pour toutes les coniques de ce faisceau, il est évident que des points tels que A'', B_o, C_o sont alignés puisque leurs polaires sont respectivement les droites $B''C'', AB$, et AC , concourantes en A .
2. On démontre, toujours à l'aide du théorème de Brianchon, que les droites A_oA'', B_oB'' et C_oC'' sont parallèles à l'axe de la parabole.

SUR LES PARABOLES INSCRITES A UN TRIANGLE

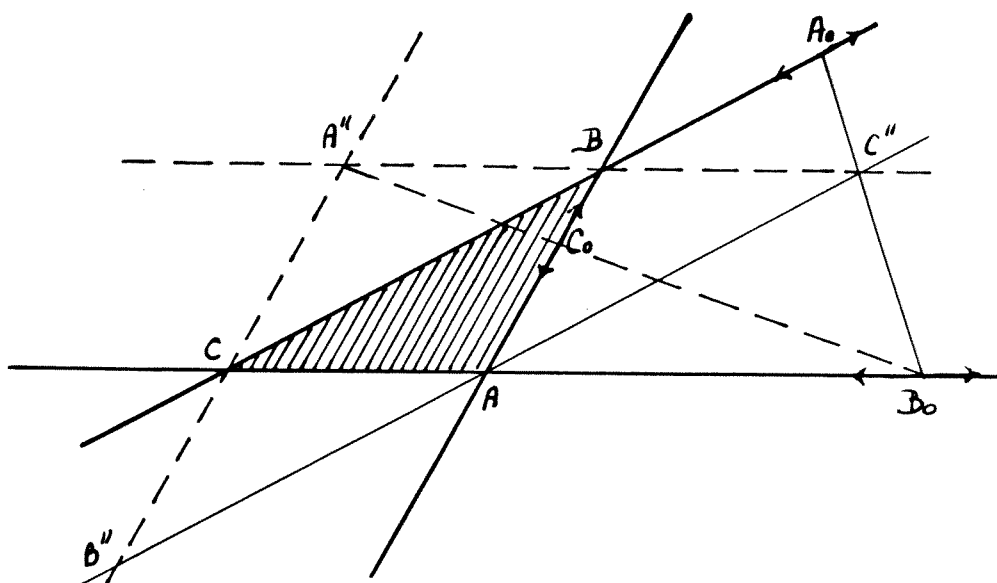


Figure 9

3. Les droites AA_0 , BB_0 , CC_0 étant concourantes, les points L , M , N sont alignés d'après le théorème de Desargues. On peut aussi invoquer la polarité, les points L , M , N , étant les pôles des droites AA_0 , BB_0 , CC_0 .

Montrons alors que G appartient à la droite LM ; on passe de L à M en appliquant le schéma suivant :

$$L \mapsto A_0 \mapsto B_0 \mapsto M$$

où l'on compose l'involution des points fixes C et B , la projection de centre C'' et l'involution des points fixes A et C . On obtient une homographie qui laisse invariant le point C ; d'après le théorème de Chasles-Steiner, les droites LM passent par un point fixe. On détermine ce point en prenant deux positions particulières de L : le point B et le milieu A' de BC ; on obtient ainsi les médianes issues de B et de A , donc le point G .

4. Corollaire : comme la droite LM qui contient G est la polaire de Ω , la polaire de G par rapport à toute parabole Π inscrite dans ABC passe par Ω .

Cette polaire de G contient les points L' , M' , N' , qui sont les pôles des droites AA'' , BB'' , CC'' , c'est à dire des médianes du triangle ABC .

5. On a ici une application très simple du théorème de Chasles-Steiner. En effet, la correspondance $AA_0 \rightarrow BB_0$ est homographique car $A_0 \rightarrow B_0$, qui est une projection, l'est. On vérifie facilement que la conique passe par A, B, C , est tangente en ces points aux côtés du triangle A'', B'', C'' et que G est son centre. (voir figure 10).

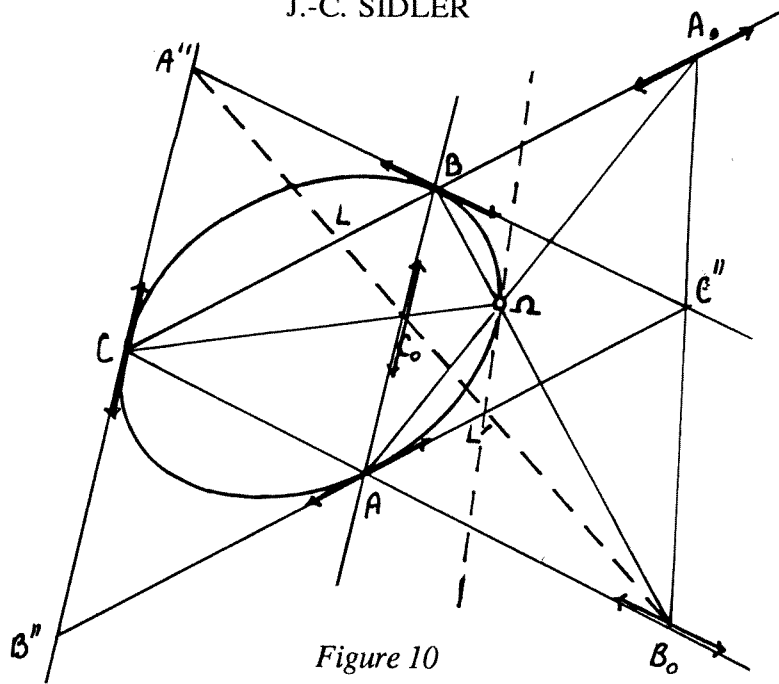


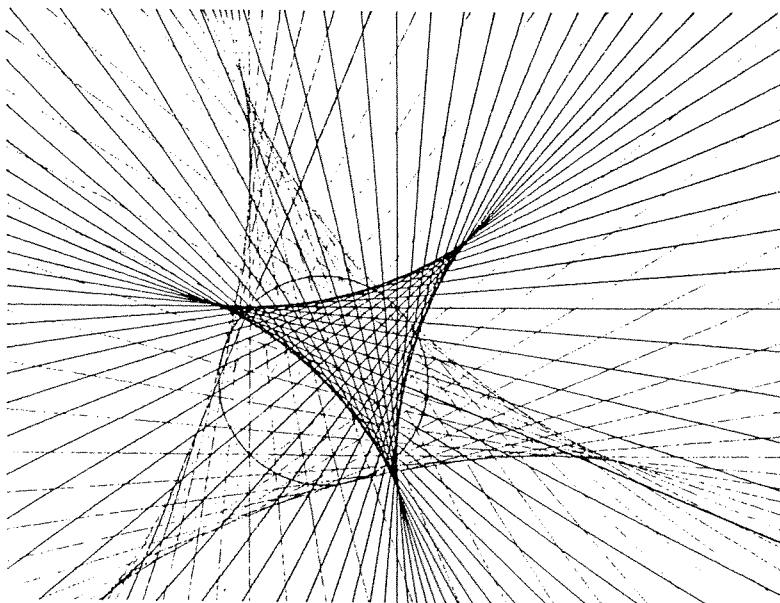
Figure 10

Montrons que $\Omega L'$ est la tangente en Ω à \mathcal{E} et pour cela montrons que $\Omega L'$ est conjuguée de $\Omega C''$ par rapport aux droites ΩA et ΩB , en composant la projection de Ω^* sur $B''C''$ et la projection de $B''C''$ sur BC à partir de B_0 et en tenant compte des alignements vus précédemment, on a l'égalité des bi-rapports suivants :

$$(\Omega L', \Omega C'', \Omega A, \Omega B) = (L, A_0, C, B) = -1$$

ce qui prouve la proposition.

Pour terminer, je voudrais donner, sans le démontrer, un remarquable résultat concernant les paraboles inscrites dans un triangle : leurs tangentes au sommet sont droites de Simson du triangle ABC et elles enveloppent une hypocycloïde à trois rebroussements ; merveilleuse apparition de la symétrie dans une situation qui n'en comportait pas ! Les axes des mêmes paraboles enveloppent une autre hypocycloïde à trois rebroussements.



Enveloppe des axes des paraboles inscrites dans un triangle