LES ROULETTES D'ELLIPSES II

Eugène EHRHART
Lauréat de l'Académie des Sciences

La courbe la plus étudiée au 17e siècle est la cycloïde, appelée roulette par Pascal. Deux savants éminents de l'époque, ignorant le calcul différentiel et intégral, ont découvert par la géométrie pure, deux propriétés d'une simplicité frappante de cette courbe :

Théorème 1 : *La longueur de l'arc périodique de la cycloïde vaut 4 fois sa hauteur (Pascal). L'aire de son arche périodique vaut 3 fois celle du cercle générateur (Roberval).*

Ici nous appellerons "*roulette*" la trajectoire d'un point fixe M d'une ellipse, qui roule sans glisser sur une droite. A une similitude près la cycloïde est unique. La roulette par contre dépend de deux choix arbitraires : le rapport axial $\frac{2a}{2b}$ de l'ellipse et la position du point M qui initialement est en contact avec la droite support. Nous allons étudier simplement la double infinité de roulettes, problème qui semble a priori difficile et inabordable par la géométrie analytique et l'analyse.

1. Formes de l'arc périodique des roulettes.

En mars 1991 nous avons démontré dans '*L'Ouvert*' :

Théorème 2 : *L'arc périodique d'une roulette ne peut présenter que deux sortes de formes : à une ou à deux bosses.*

Remarques :
L'arc à une bosse peut être convexe ou présenter un point d'inflexion.
L'arc a un axe de symétrie si et seulement si le point M initialement en contact avec la droite support est le sommet d'un axe de l'ellipse.

2. Le rapport d'aires $r = \frac{S_M}{s}$

On désigne par s l'aire de l'ellipse génératrice et par S_M celle de l'arche périodique de la roulette dont M est le point de contact initial. On a vu que $r = 3$ si l'ellipse est circulaire. Mais r peut devenir infini; pour le voir il suffit de laisser constant le grand axe $2a$ de l'ellipse et de faire tendre le petit axe $2b$ vers zéro. Par contre on verra que r a une limite inférieure absolue.

Conjecture : *Pour une ellipse donnée, r est maximal si le point de contact initial est un sommet du grand axe, et minimal s'il est un sommet de petit axe.*

Si M est une extrémité B du petit axe, S_B désigne l'aire de l'arche périodique. (Dans la suite S_A désignera cette aire si M est une extrémité A du grand axe). Par une similitude toute ellipse peut être amenée à avoir pour petit axe $2b$ =8 cm, sans que r ne change. On obtient alors la table suivante, où figurent les valeurs **approchées** de $\frac{S_B}{s}$.

a	$4cm$	$5cm$	$5,5cm$	$6cm$	$6,5cm$	$7cm$	$7,2cm$	$7,3cm$	$7,4cm$	$7,5cm$	$8cm$	∞
$\frac{a}{b}$	1	1,25	1,375	1,5	1,625	1,75	1,8	1,82	1,85	1,875	2	∞
$\frac{S_B}{s}$	**3**	3,05	3,06	**3**	2,85	2,84	**2,83**	2,88	**3,07**	3,26	3,94	∞

Pour a =7,2cm le rapport $\frac{S_B}{s} \simeq 2,83 \simeq 2\sqrt{2}$. Comme $\frac{S_B}{s}$ est une fonction continue de $\frac{a}{b} > 1$, il sera égal à 3 pour juste deux valeurs de cette variable, l'une près de $1,5$ l'autre près de $1,85$ ($\frac{S_A}{s} > 3$ pour tout $a \neq b$ de la table).

Théorème 3 : *Le rapport r varie entre $2\sqrt{2}$ et l'infini* (*).

Remarque : Le rapport r est supérieur à 3 si $\frac{a}{b}$ est compris entre certaines limites et que M est voisin de b; il est égal à 3 si $a = b$, ou si M est près de B et que $\frac{a}{b}$ prend l'une ou l'autre de deux valeurs adéquates correspondantes (proches l'une de 1,5, l'autre de 1,85).

Les valeurs approchées de S_B ont été obtenues en cinq étapes :
- Découper dans du carton 10 ellipses de demi petit axe b =4cm et de demi grand axe de a cm.
- Faire rouler chacune sur un support rectiligne rugueux fixé au mur, sur lequel on marque une dizaine de positions de M pour la demi-arche à tracer, limitée à l'axe de symétrie.
- Décalquer la demi-arche obtenue sur du papier quadrillé (en cm^2 et mm^2).
- Vérifier qu'il n'y a pas eu de glissement, en mesurant le demi-périmètre de chaque ellipse (à l'aide d'un fil collant).
- Relever sur le papier quadrillé la mesure approchée de $\frac{S_B}{s}$.

L'expérience peut donc jouer un rôle en mathématique sans nuire à la rigueur.

(*) A propos du problème 10254, que j'ai posé à la revue "American Mathematical Monthly" en octobre 1992, le directeur de la rubrique m'a appris que Richard Holzsager a démontré que $2\sqrt{2}$ est *rigoureusement* le minimum absolu de r.

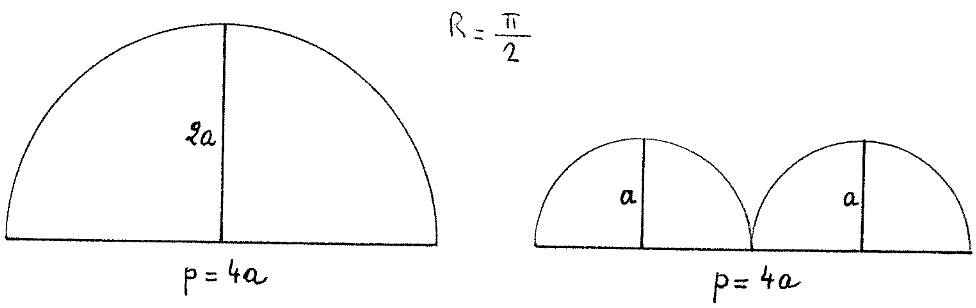
3. Le rapport de longueurs $R = \dfrac{L_M}{p}$

On désigne par p le périmètre de l'ellipse génératrice et par L_M la longueur de l'arc périodique de la roulette, dont M est le point de contact initial.

– *Cas du cercle.* Soit r son rayon. Alors $p = 2\pi r$ et $L_M = 4 \cdot 2r$ d'après le théorème 1. Donc

$$R = \frac{4}{\pi}.$$

– *Cas d'une ellipse complètement aplatie* ($b = 0$).



Soit une ellipse très mince, dont le point de contact initial est un sommet A du grand axe $2a$. A la limite ($b = 0$) l'arc périodique est un demi-cercle de rayon $2a$. Alors $L_A = 2\pi a$ et $p = 4a$.
Si le point de contact initial est un sommet B du petit axe, l'arc périodique est à la limite ($b = 0$) formé par deux demi-cercles tangents de rayon a. Alors de nouveau $L_B = 2\pi a$ et $p = 4a$. Donc dans les deux cas

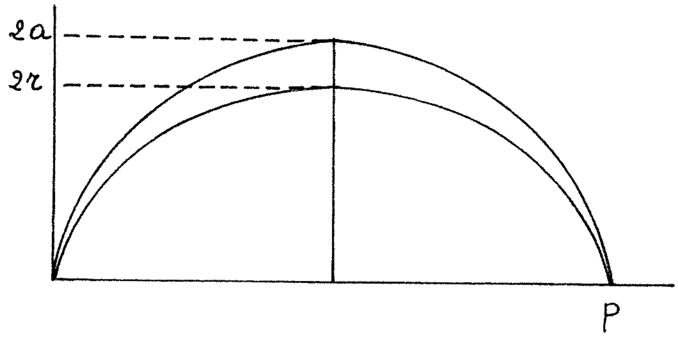
$$R = \frac{\pi}{2}.$$

– *Cas de l'arc périodique convexe et symétrique.*
On a vu que pour l'ellipse complètement aplatie de périmètre p l'arc périodique est un demi-cercle de rayon $\frac{p}{2}$. Pour l'ellipse de même périmètre $2a < \frac{p}{2}$. L'arc de la cycloïde est donc extérieur à celui de la roulette avec A en point de contact initial, d'autant plus que les rayons de courbure aux sommets des arcs sont respectivement $2r$ et $2a$. Donc

$$\frac{L_A}{p} = R < \frac{\pi}{2}.$$

Aplatissons un cercle en ellipse de grand axe $2a$ sans changer son périmètre p. Alors $2a > 2r$. L'arc de la cycloïde est donc intérieur à celui de la roulette, d'autant plus que les rayons de courbure aux sommets sont respectivement $2r$ et $2a$.

Donc



$R > \frac{4}{\pi}$

Ce qui précède nous amène à formuler l'hypothèse suivante :

Conjecture : *Si l'arc périodique d'une roulette est convexe, alors*

$$\frac{4}{\pi} \leq R \leq \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Si l'arc périodique est concave (1) n'est pas toujours satisfait. Ainsi pour l'ellipse de demi-axes $b = 4$ cm et $a = 7,2$ cm, dont le point de contact initial est une extrémité B du petit axe, on trouve expérimentalement

$$\frac{L_B}{p} \simeq 1,22 < \frac{4}{\pi} \simeq 1,273.$$

(J'ai obtenu les valeurs approchées $p \simeq 36,2$ cm et $L_B \simeq 44,1$ cm en les mesurant sur des modèles en carton à l'aide d'un fil collant.) Pour d'autres arcs périodiques concaves (1) est satisfait. Ainsi pour l'ellipse de demi-axes $b = 4$ cm et $a = 8$ cm le rapport $\dfrac{L_B}{p} \simeq 1,28$ est compris entre $\dfrac{4}{\pi} \simeq 1,273$ et $\dfrac{\pi}{2} \simeq 1,570$.