

# FASENACHTSKUECHLE FEUILLETES

Michèle AUDIN et Patrick FOULON

(Professeurs à l'U.F.R. de Mathématiques - Strasbourg)

A l'hommage que *l'Ouvert* a rendu à Georges Reeb [4], nous avons souhaité ajouter davantage de mathématiques : au delà de l'émotion, des souvenirs et des anecdotes, c'est l'héritage du mathématicien Georges Reeb qui nous importe. Ses idées sont encore très fécondes : dans leur lignée, l'un de nous a été capable de démontrer récemment un joli théorème dont la démonstration est assez simple pour que les idées puissent en être présentées aux lecteurs de *l'Ouvert* (il faut connaître un peu de topologie).

## 1. Cartographie

### 1.1 Cartes géographiques

Une carte de géographie est une représentation plane d'une partie de la Terre qui ne l'est pas, elle, plane! La question qui nous intéresse dans cet article est la suivante : de combien de cartes un globe-trotter doit-il se munir?

Une façon simple de représenter presque toute la Terre sur une même carte est de faire une projection stéréographique. On imagine un plan  $P$  contenant l'équateur et on projette depuis le pôle sud comme sur la figure 1. Précisément, à un point  $M$  de la surface de la Terre, on associe le point  $m$  où la droite  $MS$  coupe le plan  $P$ . On obtient ainsi une carte qui ne rate que le pôle sud (il n'y a pas de droite  $MS$  pour  $M = S$ , ou alors, il y en a beaucoup — toutes les tangentes — mais aucune ne rencontre le plan  $P$ ).

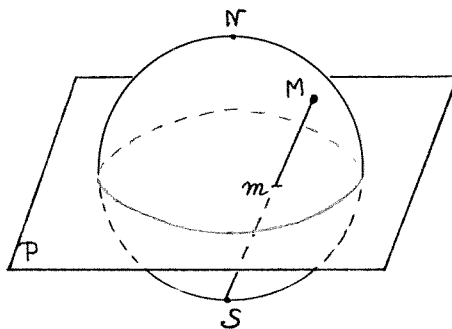


Figure 1 : fabrication d'une carte

Un cartographe australien préférerait probablement utiliser le pôle nord comme centre de la projection, obtenant ainsi une carte représentant la Terre sauf le pôle nord.

Avec ces deux cartes, on représente toute la Terre, mais les régions qui apparaissent sur les deux cartes (c'est-à-dire tout sauf les deux pôles) ont des formes bien différentes. Voyons l'Afrique par exemple (figure 2).

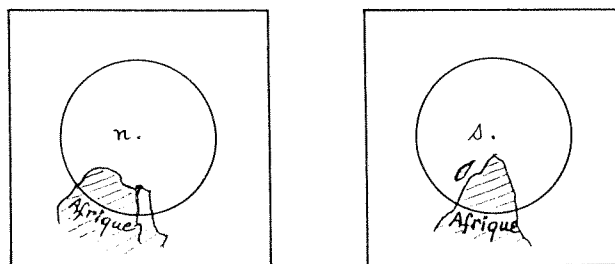


Figure 2 : changement de carte

Si on veut voyager en Afrique avec ces deux cartes, on préférera sans doute utiliser celle de gauche en Kabylie et celle de droite au Natal. Près de l'équateur, il faudra "changer de carte", c'est-à-dire effectuer l'opération suivante :

- a) passer de la carte utilisée en Kabylie à la Terre par l'inverse de la projection de pôle sud, puis
- b) passer de la Terre à la carte utilisée pour le Natal par la projection de pôle nord.

Au point où nous en sommes, commençons à faire des mathématiques : nous sommes en train de considérer une transformation du plan (à vrai dire, pour qu'elle soit bien définie, il faut retirer le point  $O$ ) :

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : P - (O) \rightarrow \text{Sphère} - (N, S) \rightarrow P - (O).$$

Bien sûr, cette transformation n'est autre que l'inversion de pôle  $O$  et de cercle l'équateur. Retenons

1. que celle-ci échange l'intérieur et l'extérieur du cercle équatorial (il va sans dire qu'on aurait pu utiliser n'importe quel grand cercle à la place de l'équateur, par exemple celui passant par la Schlucht et le Hohneck. Exercice : quel pôle utiliser pour qu'alors l'intérieur soit à l'extérieur? Un point de vue à peu près orthogonal consisterait à utiliser Saverne comme centre (de projection)),
2. que l'on peut reconstituer toute la Terre en connaissant les deux cartes et ce moyen de les "recoller".

## 1.2. Variétés

Les mathématiciens généralisent cette idée de façon abstraite dans la définition des *variétés*. Expliquons ce qu'est une variété en gardant l'exemple de la surface de la Terre en tête (et entre parenthèses).

C'est un espace topologique  $V$  (la surface de la Terre) écrit comme une réunion d'ouverts  $V_i$  (la Terre moins le pôle nord, la Terre moins le pôle sud); chaque  $V_i$  est muni d'un homéomorphisme  $\varphi_i$  (les projections stéréographiques) avec un espace

vectorel  $\mathbf{R}^n$  (le plan équatorial). Il faut encore expliquer comment on change de carte :

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(V_i \cap V_j) \rightarrow V_i \cap V_j \rightarrow \varphi_i(V_i \cap V_j).$$

La dimension  $n$  des espaces  $\mathbf{R}^n$  est aussi appelée dimension de la variété  $V$ . Par exemple, la dimension de la surface de la Terre est 2, celle du plan  $P$ . Il est facile de fabriquer des sphères de dimension  $n$  pour tout  $n \geq 0$  : il suffit de considérer tous les vecteurs unitaires de l'espace euclidien  $\mathbf{R}^{n+1}$ , c'est la sphère  $S^n$ . On a deux projections stéréographiques sur un  $\mathbf{R}^n$  équatorial exactement comme dans le cas de dimension 2.

De même qu'il existe beaucoup d'autres façons de cartographier la Terre (figure 3), il existe bien des façons de décrire une variété comme une réunion de cartes.

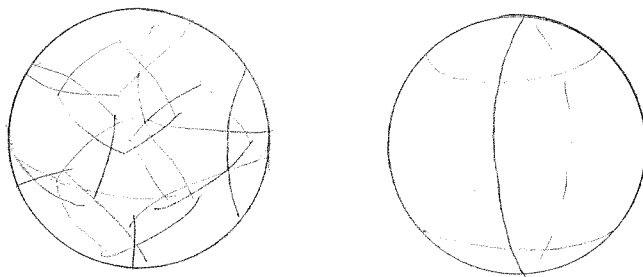


Figure 3 : atlas

Une variété avec une seule carte est un espace  $\mathbf{R}^n$ . Dans l'exemple de la géographie, c'est-à-dire celui de la sphère, on a vu qu'un atlas formé de deux cartes était suffisant. On démontre réciproquement que si une variété se décrit avec deux cartes, c'est une sphère (plus précisément elle est homéomorphe à une sphère; cette précision a son importance puisque ce résultat a permis à Milnor de montrer qu'il existait des variétés homéomorphes, mais pas difféomorphes, à la sphère de dimension 7, voir les références dans [3]).

La figure 4 montre un tore de dimension 2 avec trois cartes.



Figure 4 : un tore avec trois cartes

### 1.3. Des fonctions

Retour sur Terre : on peut considérer la latitude comme une fonction sur la surface de la Terre : elle vaut  $90^\circ$  sud (que nous notons  $-90$ ) au pôle sud,  $0$  à l'équateur et  $90^\circ$  nord (notation  $+90$ ) au pôle nord. Ainsi elle a un unique maximum (le pôle nord), un unique minimum (le pôle sud) et pas d'autre point critique, pas de col (figure 5) par exemple.



Figure 5 : un col

C'est là que Reeb arrive. Il démontre le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Soit  $V$  une variété compacte. Supposons qu'il existe sur  $V$  une fonction avec seulement deux points critiques. Alors  $V$  est homéomorphe à une sphère.*

En réalité dans [5], il y a une hypothèse supplémentaire sur la fonction, qui doit être de Morse, c'est-à-dire avec des *points critiques non-dégénérés*, plus concrètement, pour une surface, des sommets, des creux ou des cols. Mais le théorème est vrai dans la généralité où nous l'avons énoncé (voir [3]).

L'idée de la démonstration est de montrer que  $V$  s'écrit comme réunion de deux cartes, chacune fabriquée à partir d'un des points critiques de la fonction.

## 2. Feuilletages

### 2.1. Mille-feuilles

Si l'on peut feuilletter un livre en dégustant de la pâte feuilletée, c'est sans doute que livres et mille-feuilles ont une structure commune, le feuilletage.

Les feuilletages, structures chères à Reeb, sont aussi décrits par des cartes. L'espace modèle est toujours l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^n$ , seulement, pour traduire le fait qu'un livre est quelque chose de plus fin, de moins grossier, qu'un bloc de bois de dimensions comparables, on considère la décomposition

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$$

(figure 6) dans laquelle on dit que le sous-espace affine  $\mathbf{R}^p \times \{z\}$  est la *plaque* ou *feuille*  $P$  passant par les points  $(x_0, z)$ .

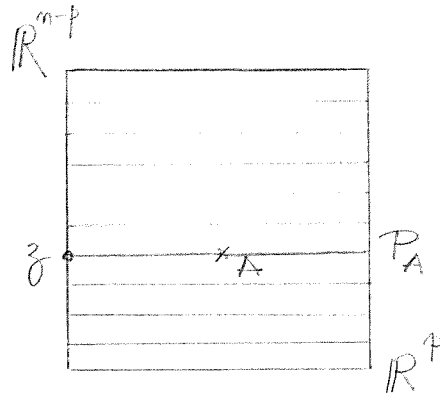


Figure 6

On en déduit la définition d'un feuilletage sur une variété  $V$  exactement comme ci-dessus : on demande encore que  $V$  soit recouverte par des cartes  $V_i$  avec des homéomorphismes  $\varphi_i : V_i \rightarrow \mathbf{R}^n$ . La nouveauté, c'est que les changements de cartes  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$  préservent la structure feuilletée de  $\mathbf{R}^n$  en appliquant plaques sur plaques.

Bien sûr, pour que cette notion apporte quelque chose par rapport à celle de variété, il faut que  $p \neq n$  (dans le cas contraire, il n'y aurait qu'une plaque) et de même que  $p \neq 0$  (les plaques sont les points). On ne peut toutefois pas interdire ces possibilités dans la définition; pour montrer leur peu d'intérêt, on qualifie ces feuilletages de *grossiers*.

Prenons deux feuilles de papier ligné et recollons les en faisant coïncider les lignes horizontales. Nous obtenons un cylindre feuilleté (figure 7). Deux tels cylindres recollés ensemble (toujours en faisant attention aux lignes) donnent un tore feuilleté, une variété feuilletée.



Figure 7

Comme la structure de variété, la structure de variété feuilletée est *localement triviale*, au sens où elle est définie localement par un modèle très simple. La surprise a été, il y a une cinquantaine d'années, quand on s'est rendu compte que de tels objets localement triviaux pouvaient être, globalement, très compliqués, et Reeb [6] est l'un de ceux à qui nous devons cette connaissance. Les lecteurs de *l'Ouvert* pourront consulter l'article d'Hector [2].

## 2.2. Feuilletages à deux cartes

Dans la droite ligne des travaux de Reeb, l'un de nous a démontré le théorème suivant [1] :

THÉORÈME. — *Tout feuilletage à deux cartes est grossier.*

Voilà une idée de la démonstration. On suppose que la variété  $V$  est munie d'un feuilletage à deux cartes et on montre par l'absurde que celui-ci est grossier (en supposant qu'il ne l'est pas!). On appelle  $n$  la dimension de  $V$ ,  $p$  la dimension des feuilles, et on suppose que  $1 \leq p \leq n - 1$ .

Comme il n'y a que deux cartes, nous savons que la variété  $V$  est homéomorphe à une sphère de dimension  $n$ . Le feuilletage est décrit par deux cartes

$$\varphi^+ : V^+ \rightarrow \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$$

et

$$\varphi^- : V^- \rightarrow \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}.$$

On joue maintenant au jeu intérieur/extérieur du voyageur équatorial (§1.1). On part de la carte  $V^+$ . On considère les points dans cette carte qui ne sont pas dans la carte  $V^-$ , soit la partie

$$W = V^+ - V^+ \cap V^-.$$

C'est une partie compacte de  $V$ , son image  $\varphi^+(W)$  est un compact de  $\mathbf{R}^n$  (rappelons qu'un compact de  $\mathbf{R}^n$  est une partie fermée qu'on peut inclure dans une grande boule). On peut donc l'enfermer dans une boule :

$$\varphi^+(W) \subset B(0, R)$$

pour  $R$  assez grand. On va maintenant dans  $V^-$  pour y regarder le complémentaire de cette grosse boule, plus précisément la partie

$$K = V - (\varphi^+)^{-1}(B(0, R)) \subset V^-.$$

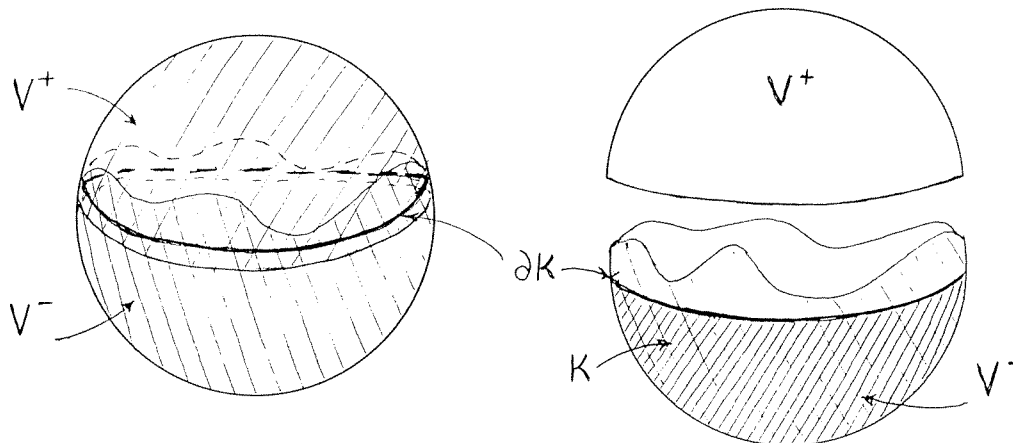


Figure 8

C'est encore une partie compacte. Sa frontière, appelée  $\partial K$ , est dans la zone cartographiée deux fois, c'est-à-dire dans  $V^+ \cap V^-$  (figure 8), on va donc la regarder de deux façons différentes.

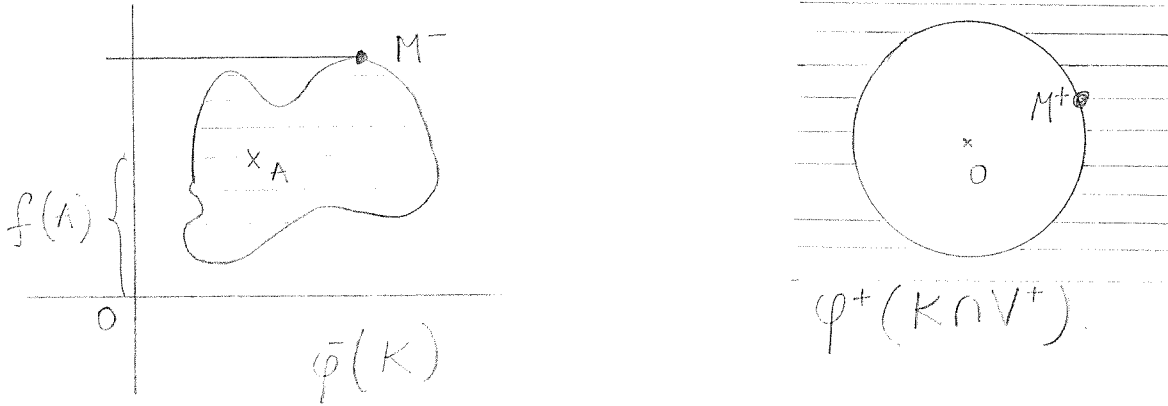


Figure 9

D'abord dans la carte  $\varphi^-(V^-) (= \mathbf{R}^n)$ . La fonction  $f(A) = d(P_A, 0)$ , distance de la plaque passant par  $A$  à l'origine, ou altitude du point  $A$  (figure 9), est continue, donc elle doit atteindre son maximum en un point  $M^-$  de  $\varphi^-(\partial K)$ . La plaque  $P_{M^-}$  passant par  $M^-$  ne rencontre pas l'intérieur de  $\varphi^{-1}(K)$  puisqu'on a supposé que  $\mathbf{R}^n$  contenait plus d'une plaque (c'est l'hypothèse  $n - p \geq 1$ ).

Passons à l'extérieur, à la carte  $V^+$  (partie droite de la figure 9). Les morceaux de plaques passant par les points des bords de la boule passent dans l'extérieur de cette boule, pourvu que ces plaques ne soient pas réduites à des points (c'est l'hypothèse  $p \geq 1$ ).

C'est le cas en particulier, pour le point  $M^+ = \varphi^+((\varphi^-)^{-1}(M^-))$  (c'est-à-dire le point  $M^-$  vu dans l'autre carte). Ainsi l'image de la plaque  $P_{M^-}$  par le changement de carte devrait se retrouver à l'intérieur de la boule!

### 2.3. Feuilletages à trois cartes

S'il n'y a pas de variété feuilletée avec seulement deux cartes, il est facile d'en construire à trois cartes. Nous avons vu une représentation du tore (il n'est pas très difficile de se convaincre que c'est la variété la plus simple sur laquelle on a une chance de trouver cette structure) comme une variété avec trois cartes au § 1.2. Nous allons maintenant feuilletter ce même tore. On décrit le feuilletage de la figure 7 grâce à trois cartes sur la figure 10. Chacune des cartes est l'intérieur d'un carré. Pour plus de clarté, nous les avons représentées dans le plan  $\mathbf{R}^2$ , qu'il faut encore quotienter par l'action du groupe des translations entières.

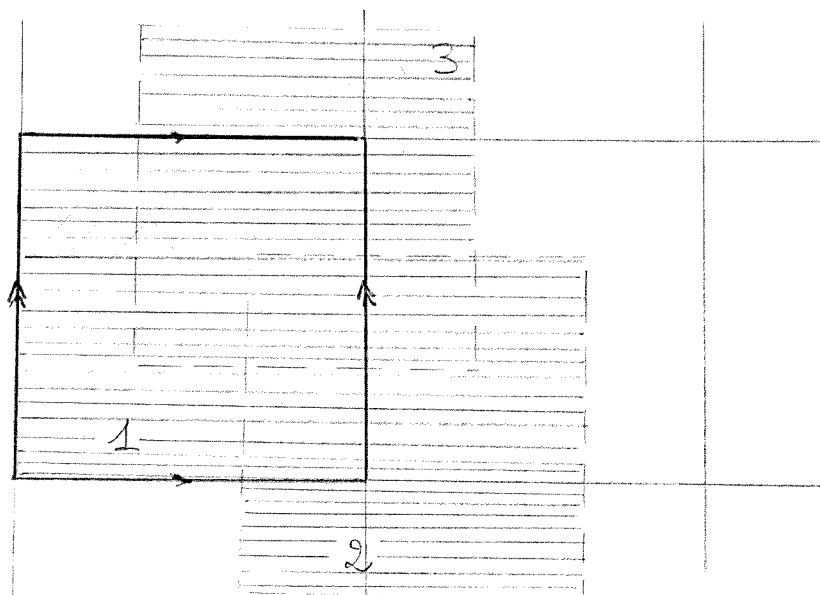


Figure 10

Nous ne savons pas quelles sont les variétés fermées qui tolèrent d'être feuilletées par trois cartes.

### Bibliographie

- [1] P. FOULON, Feuilletages des sphères et dynamiques Nord-Sud, C. R. Acad. Sc. Paris, 318 (1994), 1041-1042.
- [2] G. HECTOR, Les feuilletages de Reeb, in [4].
- [3] J. MILNOR, Morse theory, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1963.
- [4] 'L'Ouvert', numéro spécial (\*), septembre 1994.
- [5] G. REEB, cité dans [3].
- [6] G. REEB, Variétés feuilletées, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, 1952.

---

(\*) En vente à la bibliothèque de l'IREM : 66 F port compris.