A VOS STYLOS

De nouvelles règles du jeu pour notre rubrique de problèmes

On m'a demandé de m'occuper dorénavant de cette rubrique. Je vais donc ici exposer rapidement ma "philosophie" :

Certains lecteurs se plaignent parfois que des problèmes soient trop faciles ou trop difficiles. A mes yeux, cela n'a pas beaucoup de sens, étant donné le public hétérogène de la revue. Je pense que la distinction pertinente est celle qui oppose les problèmes "intéressants" à ceux qui n'éveillent pas beaucoup l'intérêt des lecteurs, le critère étant le volume de courrier suscité par tel ou tel problème. Un problème est intéressant quand il est assez original, nouveau ou en tout cas peu connu, trop peu connu aux yeux de celui qui le propose et qui veut faire un peu de publicité à ce problème par le canal de '*L'Ouvert*'.

Indiquer le niveau de difficulté ne présente à mes yeux aucun intérêt, comme si ce niveau était réellement appréciable pour des problèmes peu connus, alors qu'en réalité tout l'intérêt de la recherche mathématique consiste précisément à découvrir la difficulté d'un problème en cherchant à le résoudre. Les problèmes les plus excitants sont des problèmes "frais", comme pouvait l'être par exemple le problème $(3n+1)$ au moment où on l'a découvert et où on ne pouvait pas savoir qu'il allait résister si longtemps aux efforts des mathématiciens.

Je propose donc les aménagements suivants :
- la rédaction proposera davantage de problèmes, de difficultés variables et sans indication de difficulté;
- la rédaction ne s'engage pas à publier la solution d'un problème, surtout si celui-ci n'a suscité aucun écho chez les lecteurs; d'ailleurs la rédaction se considère absolument comme un lecteur parmi d'autres, elle n'a pas la science infuse, elle n'est pas un professeur qui pose des problèmes à ses élèves;
- les lecteurs sont invités à ne pas attendre d'avoir résolu un problème pour faire savoir à la rédaction l'intérêt que ce problème suscite à leurs yeux, ou ne suscite pas... Par ailleurs, les lecteurs sont invités à faire connaître à la rédaction tous les problèmes, faciles ou difficiles, qui leur semblent intéressants mais trop peu connus. En résumé, et toute démagogie mise à part, les lecteurs "sont" la rédaction.

Dominique DUMONT

PROBLÈME 33

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel, de Strasbourg)

Étudier les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}$$

sur l'intervalle $]0,1[$.

Solution de R. Fischer, Lycée René Cassin, plus courte que celle publiée dans notre précédent numéro :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln x \ln(1-x)}{x} = \frac{\ln x}{1-x}\frac{1-x}{x}\ln(1-x) \\ &= \frac{\ln x}{1-x}\frac{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}{1-\frac{1}{1-x}} = g(x)g\left(\frac{1}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Or g est négative croissante, car $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-x)+\ln x}{(1-x)^2} > 0$ sur $]0,1[$,

donc f est décroissante.

PROBLÈME 34

Énoncé (forme équivalente)

Etant donnés quatre points sur une droite, montrer qu'ils sont les projections orthogonales des sommets d'un tétraèdre régulier, dont la longueur des arêtes est déterminée.

Solution (de P. Renfer)

Utilisons le principe des shaddocks : *le plus sûr moyen d'arriver à un point est encore d'en partir.*

Partons donc d'un tétraèdre régulier $ABCD$, en prenant, dans un repère orthonormé, les coordonnées suivantes pour les sommets :

$$A(1,-1,-1) \qquad B(-1,1,-1) \qquad C(-1,-1,1) \qquad D(1,1,1).$$

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire, de coordonnées (α,β,γ). Soient $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ les plans orthogonaux à $\overrightarrow{u}$, passant respectivement par A,B,C,D. Leurs équations respectives sont :

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= \alpha - \beta - \gamma \\ \alpha x + \beta y + \gamma z &= -\alpha + \beta - \gamma \\ \alpha x + \beta y + \gamma z &= -\alpha - \beta + \gamma \\ \alpha x + \beta y + \gamma z &= \alpha + \beta + \gamma. \end{aligned}$$

Les seconds membres des équations sont les abscisses a, b, c, d des points d'intersection des plans avec la droite, passant par O, dirigée par $\overrightarrow{u}$, rapportée au repère $(O, \overrightarrow{u})$.

La somme $a+b+c+d$ est nulle, puisque O est l'isobarycentre du tétraèdre. D'autre part :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= (\alpha - \beta - \gamma)^2 + (-\alpha + \beta - \gamma)^2 + (-\alpha - \beta + \gamma)^2 + (\alpha + \beta\gamma)^2 \\ &= 4(a^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 4. \end{aligned}$$

Revenons maintenant à la donnée de quatre plans parallèles arbitraires. Une droite d orthogonale aux quatre plans les coupe en quatre points, dont l'isobarycentre sera noté O. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur unitaire de la droite d. Soient a, b, c, d les abscisses des quatre points d'intersection, dans le repère $(O, \overrightarrow{u})$. Alors : $a + b + c + d = 0$.

Soit r le réel positif tel que : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = r^2$. Si les quatre plans ne sont pas tous égaux entre eux, alors r est non nul. En transformant les plans par une homothétie h de rapport $2/r$, on est ramené à :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4.$$

Alors il existe une unique solution (α, β, γ) pour le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha - \beta - \gamma = a \\ -\alpha + \beta - \gamma = b \\ -\alpha - \beta + \gamma = c \\ a + \beta + \gamma = d \\ a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \end{array} \right.$$

A savoir :

$$\alpha = \frac{a+d}{2}, \quad \beta = \frac{b+d}{2}, \quad \gamma = \frac{c+d}{2}.$$

On choisit une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ telle que le vecteur $\overrightarrow{u}$ ait pour coordonnées les valeurs α, β, γ ainsi obtenues. Soit $\mathcal{R}$ le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Les quatre points de coordonnées $(1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (1, 1, 1)$ dans $\mathcal{R}$, forment un tétraèdre solution.

La longueur d'arête vaut $2\sqrt{2}$. En revenant à la situation initiale, par l'homothétie h^{-1}, on obtient une longueur d'arête égale à $r\sqrt{2}$.

Remarque (de D. Dumont) : dans le précédent numéro de '*L'Ouvert*', un intéressant article de Marcel Krier montre le lien entre ce problème et une méthode de résolution de l'équation du 4^{e} degré.

PROBLÈME 35 (proposé par D. Dumont)

Énoncé (voir l'énoncé détaillé dans notre numéro 80)

L'énoncé demande de démontrer cinq propositions relatives aux dénombrements des points fixes et des successions dans les permutations. Dans la solution qu'il propose, R. Renfer énonce une sixième proposition :

PROPOSITION 6.– *Soit q un entier de $[n+1]$. Le nombre de permutations de $[n+2]$ ayant le maximum en dernière position et possédant $k+1$ successions, dont une en position q, est égal à $f_{n,k}$.*

PROBLÈME 36

Énoncé (proposé par M. Emery)

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC. A quelle caractérisation angulaire du triangle correspond l'égalité entre longueurs : $AH = BC$?

Indication. Si O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, il est bien connu qu'on a l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

PROBLÈME 37

Énoncé (proposé par D. Dumont)

Deux joueurs A et B retirent à tour de rôle des allumettes sur un tas d'allumettes, avec la règle que le premier joueur ne peut prendre le tas tout entier, et qu'ensuite chaque joueur peut prendre un nombre d'allumettes au plus égal au nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Est considéré comme vainqueur celui qui ramasse la dernière allumette.

a) Trouver la stratégie gagnante pour le joueur qui commence.

b) On suppose qu'on modifie la règle en autorisant de prendre un nombre d'allumettes au plus égal à deux fois le nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Trouver la stratégie gagnante.

Indication. Dans le cas a) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas une puissance de 2.
Dans le cas b) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas... quoi?

PROBLÈME 38

Énoncé (proposé par G. Kreweras)

De toute suite S d'entiers positifs on peut déduire une autre suite S' d'entiers positifs qui est celle des différences en valeurs absolues de termes consécutifs de S.

Partant d'une suite S_1 de n entiers, on obtient ainsi des suites S_2, S_3, $\ldots$, S_n, dont chacune a un terme de moins que la précédente et qu'il est commode de disposer en un triangle, pointe en bas, la suite S_n se réduisant à un seul terme. Un tel triangle sera appelé "triangle de différences". Il sera dit *injectif* si tous les termes ont des valeurs distinctes, et *parfait* si ces valeurs constituent l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\}$.

Voici deux exemples de triangles parfaits pour $n = 3$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & & 4 \\ & 5 & & 2 & \\ & & 3 & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & 4 \\ & 5 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

Le problème est de trouver d'autres triangles parfaits. En existe-t-il pour toutes les valeurs de n?

PROBLÈME 39

Énoncé (proposé par J. Lefort)

Soit p un entier tel que $p \geq 2$, et u^0 la suite des entiers naturels > 0 ($u_n^0 = n$).

On construit de proche en proche, pour $0 \leq i \leq p-2$, les suites :
(v^i), obtenue à partir de (u^i) en supprimant les termes qui sont de rangs multiples de $p - i$.
(u^{i+1}), définie par $u_n^{i+1} = \sum_{j=1}^{n} v_j^i$.

Exemple : $p = 4$.

u^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
v^0	1	2	3		5	6	7		9	10	11		13	$\cdots$
u^1	1	3	6		11	17	24		33	43	54		67	$\cdots$
v^1	1	3			11	17			33	43			67	$\cdots$
u^2	1	4			15	32			65	108			175	$\cdots$
v^2	1				15				65				175	$\cdots$
u^3	1				16				81				256	$\cdots$

On remarque qu'on obtient ici la suite des puissances quatrièmes des entiers successifs.

Ce résultat se généralise-t-il à p quelconque?