# NOTRE COUVERTURE :

La page donnée en couverture est extraite de "La Géométrie de Descartes" (*); elle fait partie du "livre troisième" et d'un paragraphe dont voici le début :

> Or quand on eſt aſſuré, que le Probleſme propoſé eſt ſolide, ſoit que l'Equation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, ſoit qu elle ne monte que juſques au cube, on peut touſiours en trouuer la racine par l'vne des trois ſections coniques, laquelle que ce ſoit ou meſme par quelque partie de l'vne d'elles, tant petite qu'elle puiſſe eſtre; en ne ſe ſeruãt au reſte que de lignes droites, & de cercles. Mais ie me contenteray icy de
>
> Facon generale pour conſtruire tous les probleſmes ſolides, reduits a vne Equatiõ de trois ou quatre dimenſions.
>
> Ccc 3 donner
>
> donner vne reigle generale pour les trouuer toutes par le moyen d'vne Parabole, a cauſe qu'elle eſt en quelque façon la plus ſimple.
>
> Premierement il faut oſter le ſecond terme de l'Equation propoſée, s'il n'eſt deſia nul, & ainſi la reduire à telle forme, $z^3 \infty * . apz . aaq$, ſi la quantité inconnuë n'a que trois dimenſions; oubien à telle, $z^4 \infty * . apzz . aaqz . a^3r$, ſi elle en a quatre; oubien en prenant $a$ pour l'vnité, à telle, $z^3 \infty * . pz . q$, & à telle
> $z^4 \infty * . pzz . qz . r$.

La dernière ligne correspond à l'écriture actuelle $z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm r$. Mais avant d'avoir remplacé $a$ par l'unité, tous les termes de l'égalité sont de degré quatre : $z^4 = \pm apzz \pm aaqz \pm a^3r$ (**). Descartes continue en donnant la manière de trouver géométriquement les solutions de telles équations, mêlant dans ses explications les distinctions à faire dans les tracés selon qu'on a $+p$ ou $-p$, ...etc. Nous allons extraire de son écrit les explications qui concernent la résolution de l'équation $z^4 = pz^2 - qz + r$ en concordance avec la figure géométrique de la couverture et transcrire ses explications avec son langage sans en reproduire cependant l'orthographe.

---

(*) Nous avons extrait cette page de : "The Geometry of René Descartes with a facsimile of the first edition", éd. Dover (1954).
(**) C'est un des apports essentiels de "La Géométrie" de Descartes, expliqué au début du Livre I : le choix d'une unité permet de se débarasser de l'ancienne règle contraignante de la nécessaire homogénéité de tout calcul sur des grandeurs.

Après cela supposant que la parabole $FAG$ est déjà décrite, & que son essieu (axe) est $ACDKL$, & que son côté droit est $a$, ou 1, dont $AC$ est la moitié, & enfin que $A$ en est le sommet; il faut faire $CD = \frac{1}{2}p$, & la prendre du même côté qu'est le point $A$ en regard du point $C$ s'il y a $+p$ en l'équation, (...). Et du point $D$, (...), il faut élever une ligne à angles droits jusques à $E$ en sorte qu'elle soit égale à $\frac{1}{2}q$. (...) il faut dans cette ligne $AE$ prolongée, prendre d'un côté $AR$ égale à $r$, & de l'autre $AS$ égale au côté droit de la parabole qui est 1, & ayant décrit un cercle dont le diamètre fait $RS$, il faut faire $AH$ perpendiculaire sur $AE$, laquelle $AH$ rencontre ce cercle $RHS$ au point $H$ qui est celui par où l'autre cercle $FGH$, de centre $E$, doit passer (...). Or ce cercle $FG$ peut couper la parabole en 1, ou 2, ou 3, ou 4 points, desquels tirant des perpendiculaires sur l'essieu on a toutes les racines de l'équation tant vraies, que fausses. A savoir si la quantité $q$ est marquée du signe $+$, les vraies racines seront celles de ces perpendiculaires qui se trouveront du même côté de la parabole que $E$ le centre du cercle, comme $FL$; & les autres, comme $GK$, seront fausses. Mais au contraire si cette quantité $q$ est marquée du signe $-$ les vraies seront celles de l'autre côté; & les fausses ou moindres que rien seront du côté où est $E$ le centre du cercle (...).

Et la démonstration en est fort aisée. Car si la ligne $GK$, trouvée par cette construction, se nomme $z$, $AK$ sera $z^2$ à cause de la parabole, en laquelle $GK$ doit être moyenne proportionnelle entre $AK$ & le côté droit qui est 1. Puis si de $AK$ j'ôte $AC$ qui est $\frac{1}{2}$, & $CD$ qui est $\frac{1}{2}p$, il reste $DK$ ou $EM$, qui est $z^2 - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$ dont le carré est $z^4 - pz^2 - z^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Et à cause que $DE$, ou $KM$, est $\frac{1}{2}q$, la toute $GM$ est $z + \frac{1}{2}q$, dont le carré est $z^2 + qz + \frac{1}{4}q^2$, & assemblant ces deux carrés on a $z^4 - pz^2 + qz + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} \cdots$

La page de couverture est la suite de ces calculs. Ajoutons-y la fin qui se trouve en page 395

entre cete ſomme & la precedente. cequi eſt le meſme que $z^4 \infty * pzz -- qz + r$. & par conſequent la ligne tróuuee GK qui a eſté nommée $z$ eſt la racine de cete Equation. ainſi qu'il falloit demonſtrer.