

## RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 1996

Voici les sujets proposés au vingt-troisième Rallye Mathématique d'Alsace.

### CLASSE DE PREMIÈRE

#### Exercice n° 1

On se donne trois réels  $a$ ,  $b$ , et  $c$  compris entre 0 et 1.  
Montrer l'inégalité :

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$$

#### Exercice n° 2

Danielle et Anne cultivent chacune leur jardin rectangulaire. Celui de Danielle a la plus grande longueur et la plus grande surface. Qu'en est-il du périmètre ?

Si Danielle avait celui de plus grande longueur et de plus grand périmètre, serait-elle sûre d'avoir celui de plus grande surface ?

#### Exercice n° 3

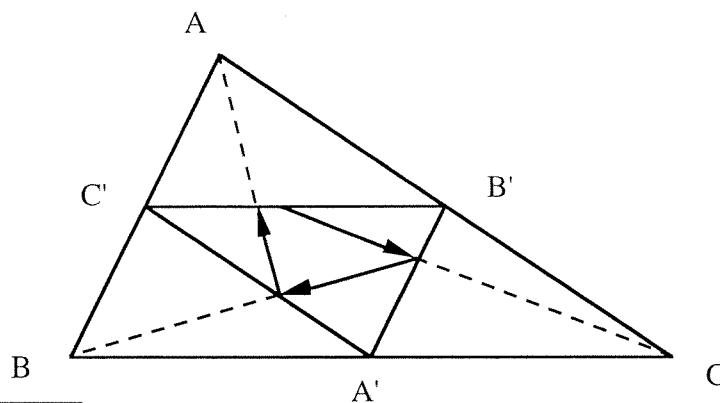
Le professeur Spidermath a découvert que l'espèce d'araignée "Araneida Dreiecka" tisse sa toile de la manière suivante :

-elle place 3 fils formant un triangle noté  $A B C$

-elle relie par 3 autres fils les milieux des côtés de ce triangle, formant un deuxième triangle noté  $A'B'C'$  (voir figure)

-elle part du fil  $B'C'$  et se dirige vers  $C$  jusqu'à rencontrer le fil  $A'B'$  ; là, elle change brusquement de direction et se dirige vers  $B$  en allant jusqu'au fil  $C'A'$  où elle change encore de direction se dirigeant désormais vers  $A$  jusqu'au fil  $B'C'$ .

Peut-elle retomber sur son point de départ ?



CLASSE DE TERMINALE

**Exercice n° 1**

Proposer une méthode et l'appliquer pour déterminer, sans l'aide d'une calculatrice, les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $97^{1996}$ .

**Exercice n° 2**

On fixe deux réels strictement positifs  $a$  et  $b$ . Montrer que si  $a$  et  $b$  sont inférieurs ou égaux à 2, alors  $a^a + b^b > ab$ . Qu'en est-il dans les autres cas ?

**Exercice n° 3**

On désire placer 4 sets rectangulaires identiques sur une table ronde de rayon  $R$ . Ils ne peuvent ni se chevaucher, ni dépasser de la table. Ils sont disposés comme indiqué sur la figure.

On veut que ces sets soient d'aire maximale. Quelles doivent être leurs dimensions ?

