

A VOS STYLOS

PROBLÈME 35 (proposé par D. Dumont)

Énoncé (proposé par D. Dumont, d'Antananarivo)

Pour $n \geq 1$, on définit des polynômes S_n de degré $n-1$ et F_n de degré n par

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1 & S_{n+1}(x) &= nS_n(x) + F_n(x) \\ F_1(x) &= x & F_{n+1}(x) &= nS_n(x) + xF_n(x); \end{aligned}$$

ils vérifient $S_n(1) = F_n(1) = n!$. Appelons $s_{n,k}$ et $f_{n,k}$ leurs coefficients, qui sont les entiers tels que

$$S_n(x) = s_{n,0} + s_{n,1}x + \dots + s_{n,n-1}x^{n-1} \quad \text{et} \quad F_n(x) = f_{n,0} + f_{n,1}x + \dots + f_{n,n}x^n.$$

Étant donné une permutation σ de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ et un élément p de $[n]$, on dira que p est un point fixe de σ si $\sigma(p) = p$; que p est une succession de σ si $p < n$ et $\sigma(p+1) = \sigma(p) + 1$; que le maximum est en position p si $\sigma(p) = n$.

Par exemple, la permutation $\begin{pmatrix} 123456789 \\ 325649781 \end{pmatrix}$ possède 2 successions, 3 points fixes, et le maximum est en position 6.

Démontrer les cinq propositions suivantes :

PROPOSITION 1. — *Le nombre de permutations de $[n]$ possédant k successions est égal à $s_{n,k}$.*

PROPOSITION 2. — *Le nombre de permutations de $[n]$ possédant k points fixes est égal à $f_{n,k}$.*

PROPOSITION 3. — *Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Le nombre de permutations de $[n+1]$ où le maximum est en position p et qui possèdent k successions est égal à $s_{n,k}$.*

PROPOSITION 4. — *Le nombre de permutations de $[n+1]$ où le maximum est en dernière position et qui possèdent k successions est égal à $f_{n,k}$.*

PROPOSITION 5. — *Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Le nombre de permutations de $[n+1]$ où le maximum est en position p et qui possèdent k points fixes est égal à $s_{n,k}$.*

Solution (proposée par P. Renfer)

1) Par identification des coefficients des polynômes, on obtient les relations :

Relations de récurrence :

$$\begin{aligned} s_{n+1,k} &= ns_{n,k} + f_{n,k} && \text{pour } n \geq 1 \text{ et } 0 \leq k \leq n-1 \\ f_{n+1,k} &= ns_{n,k} + f_{n,k-1} && \text{pour } n \geq 1 \text{ et } 1 \leq k \leq n-1 \\ f_{n+1,0} &= ns_{n,0} && \text{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

Conditions aux bords :

$$s_{n,n-1} = f_{n,n} = 1 \quad \text{et} \quad f_{n,n-1} = 0 \quad \text{pour } n \geq 1$$

2) Énonçons une sixième proposition. On dira qu'une permutation σ possède une succession en position q si : $\sigma(q+1) = \sigma(q) + 1$.

Proposition 6 Soit q un entier de $[n+1]$.
Le nombre de permutations de $[n+2]$, ayant le maximum en dernière position et possédant $k+1$ successions dont une en position q , est égal à $f_{n,k}$.

3) Vérifions les conditions aux bords pour les nombres définis dans les six propositions

Proposition 1 Pour $k=n-1$, la seule permutation possible est l'identité.

Proposition 2 Pour $k=n$, la seule permutation possible est l'identité.
Pour $k=n-1$, aucune permutation n'est possible.

Proposition 3 Pour $k=n-1$, la seule permutation possible est σ^p , où σ est la permutation circulaire $(1, 2, 3, \dots, n+1)$.

Proposition 4 Pour $k=n$, la seule permutation possible est l'identité.
Pour $k=n-1$, aucune permutation n'est possible.

Proposition 5 Pour $k=n-1$, la transposition $(p, n+1)$ est la seule permutation possible.

Proposition 6 Pour $k=n$, la seule permutation possible est l'identité.
Pour $k=n-1$, aucune permutation n'est possible.

4) Démontrons les six propositions par récurrence sur n , premier indice de $s_{n,k}$ ou $f_{n,k}$.
 Supposons les vraies jusqu'au rang n et examinons les au rang $n+1$.
 Appelons $H_1(n), H_2(n), H_3(n), H_4(n), H_5(n), H_6(n)$ les hypothèses de récurrence relatives aux six propositions, au rang n .

Proposition 1 Soit k un entier de $[n-1]$
 Parmi les permutations de $[n+1]$, ayant k successions, figurent celles dont le maximum est en dernière position : Elles sont au nombre de $f_{n,k}$, d'après $H_4(n)$.
 Pour les autres, il y a n façons de choisir la position du maximum .et pour chacun de ces choix, il y a $s_{n,k}$ permutations, d'après $H_3(n)$.
 Le nombre total est donc :
$$ns_{n,k} + f_{n,k} = s_{n+1,k}$$

Proposition 2 Soit k un entier de $[n-1]$
 Parmi les permutations de $[n+1]$, ayant k points fixes, figurent celles dont le maximum est en dernière position : En plus du point fixe $n+1$, elles possèdent $k-1$ points fixes dans $[n]$ et sont donc au nombre de $f_{n,k-1}$, d'après $H_2(n)$.
 Pour les autres, il y a n façons de choisir la position du maximum .et pour chacun de ces choix, il y a $s_{n,k}$ permutations, d'après $H_5(n)$.
 Le nombre total est donc :
$$ns_{n,k} + f_{n,k-1} = f_{n+1,k}$$

Proposition 4 Soit k un entier de $[n-1]$.
 Parmi les permutations de $[n+2]$, ayant le maximum en dernière position et possédant k successions, figurent celles qui laissent $n+1$ fixe : Elles possèdent une succession en $n+1$ et $k-1$ autres successions et sont donc au nombre de $f_{n,k-1}$, d'après $H_4(n)$, si l'on considère leur restriction à $[n+1]$.
 Pour les autres, il y a n façons de choisir l'antécédent p de $n+1$ dans $[n]$ et pour chacun de ces choix, il y a $s_{n,k}$ permutations, d'après $H_3(n)$, si l'on considère leur restriction à $[n+1]$.
 Le nombre total est donc :
$$ns_{n,k} + f_{n,k-1} = f_{n+1,k}$$

Proposition 3 Soient k un entier de $[n]$.et p un entier de $[n+1]$.
 Soit ρ la permutation circulaire $(1, 2, 3, \dots, n+2)$.
 A toute permutation σ de $[n+2]$ ayant le maximum en position p , on associe la permutation $\tau = \sigma \circ \rho^p$, qui a le maximum en dernière position.
 Si $\sigma(1) = \sigma(n+2) + 1$, τ possède une succession de plus que σ , dont une en position $q = n+2 - p$. Le nombre de telles permutations τ avec $k+1$ successions est égal à $f_{n,k}$, d'après $H_6(n)$.

Si $\sigma(1) = \sigma(n+2) + 1$, τ a autant de successions que σ et n'en a pas en position q .
 Le nombre de telles permutations τ avec k successions est égal à $f_{n+1,k} - f_{n,k-1}$,
 d'après $H_4(n+1)$ et $H_6(n)$. ($H_4(n+1)$ est déjà démontré ci-dessus !).
 Le nombre total de permutations σ avec k successions est donc :

$$f_{n,k} + f_{n+1,k} - f_{n,k-1} = f_{n,k} + ns_{n,k} = s_{n+1,k}$$

Proposition 5 Soient k un entier de $[n-1]$ et p un entier de $[n+1]$
 Pour une permutation σ de $[n+2]$, possédant k points fixes et ayant le maximum en p , appelons x l'image de $n+2$.

Si $x=p$, il y a $f_{n,k}$ possibilités pour la restriction de σ à $[n+1]-\{p\}$, d'après $H_2(n)$.

Sinon il y a n façons de choisir x et dans chaque cas on supprime dans la représentation de σ , la colonne $\begin{pmatrix} p \\ n+2 \end{pmatrix}$ et l'on remplace, dans la deuxième ligne, p par $n+2$.

On obtient alors une permutation de $[n+2]-\{p\}$, qui possède k points fixes et où un élément donné, $(n+2)$, possède une image donnée, x , distincte : Ces permutations sont au nombre de $s_{n,k}$, d'après $H_5(n)$.

Le nombre total de possibilités pour σ est donc : $ns_{n,k} + f_{n,k} = s_{n+1,k}$

Proposition 6 Soient k un entier de $[n+1]$ et q un entier de $[n+2]$.

Soit σ une permutation, ayant le maximum en dernière position et possédant $k+1$ successions, dont une en position q . Soit x l'image de q par σ .

On peut coder une permutation en ne gardant que la deuxième ligne de la représentation.

On associe à σ la permutation τ de $[n+1]$, en supprimant dans la deuxième ligne $x+1$, (le terme numéro $q+1$), et en remplaçant tous les nombres $y > x$ par $y-1$.

Les permutations τ ont leur maximum en dernière position et possèdent k successions :

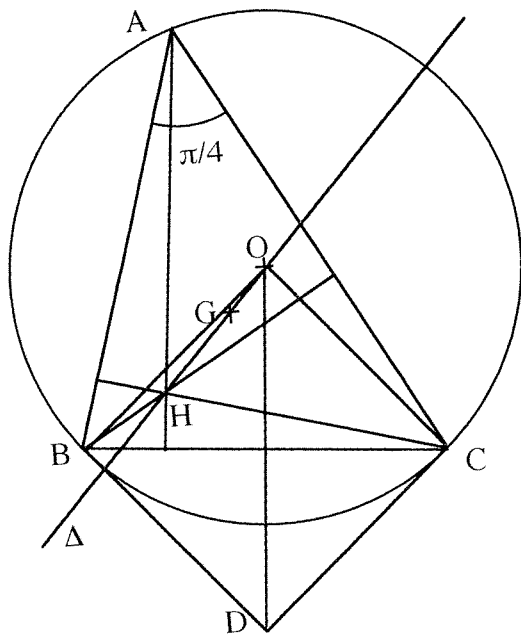
Leur nombre est : $f_{n+1,k}$, d'après $H_4(n+1)$. ($H_4(n+1)$ est déjà démontré ci-dessus !)

PROBLÈME 36

Énoncé (proposé par M. Emery)

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC . A quelle caractérisation angulaire du triangle correspond l'égalité entre longueurs : $AH = BC$?

Solution (proposée par F. Bonomi, professeur stagiaire de mathématiques au Lycée Marie Curie de Strasbourg). D'autres solutions ont également été fournies, entre autres par J. Dautrevaux, E. Kern et J. Lefort.



L'orthocentre H , le centre du cercle circonscrit O et le centre de gravité G du triangle ABC sont alignés sur la droite d'Euler Δ et vérifient la relation :

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$$

or, par définition du centre de gravité G , on obtient aisément la relation (bien connue) :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

puis

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$$

où D est le quatrième sommet du parallélogramme $COBD$.

Or, on sait que $OB = OC$, donc $COBD$ est un losange.

Par conséquent, si $AH = BC$, c'est-à-dire $OD = BC$, le quadrilatère $COBD$ est un carré. L'angle du centre BOC est alors droit et par suite l'angle inscrit BAC vaut $\pi/4$ ou $3\pi/4$...

PROBLÈME 37

Énoncé (proposé par D. Dumont)

Deux joueurs A et B retirent à tour de rôle des allumettes sur un tas d'allumettes, avec la règle que le premier joueur ne peut prendre le tas tout entier, et qu'ensuite chaque joueur peut prendre un nombre d'allumettes au plus égal au nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Est considéré comme vainqueur celui qui

ramasse la dernière allumette.

- a) Trouver la stratégie gagnante pour le joueur qui commence.
 b) On suppose qu'on modifie la règle en autorisant de prendre un nombre d'allumettes au plus égal à deux fois le nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Trouver la stratégie gagnante.

Indication. Dans le cas a) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas une puissance de 2.

Dans le cas b) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas un nombre de Fibonacci.

PROBLÈME 38

Énoncé (proposé par G. Kreweras)

De toute suite S d'entiers positifs on peut déduire une autre suite S' d'entiers positifs qui est celle des différences en valeurs absolues de termes consécutifs de S .

Partant d'une suite S_1 de n entiers, on obtient ainsi des suites S_2, S_3, \dots, S_n , dont chacune a un terme de moins que la précédente et qu'il est commode de disposer en un triangle, pointe en bas, la suite S_n se réduisant à un seul terme. Un tel triangle sera appelé "triangle de différences". Il sera dit *injectif* si tous les termes ont des valeurs distinctes, et *parfait* si ces valeurs constituent l'ensemble $\{1, 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\}$.

Voici deux exemples de triangles parfaits pour $n = 3$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 6 & 4 & & 6 & 1 & 4 \\ & 5 & 2 & & 5 & 3 & \\ & & 3 & & & 2 & \end{array}$$

Le problème est de trouver d'autres triangles parfaits. En existe-t-il pour toutes les valeurs de n ?

PROBLÈME 39

Énoncé (proposé par J. Lefort)

Soit p un entier tel que $p \geq 2$, et u^0 la suite des entiers naturels > 0 ($u_n^0 = n$).

On construit de proche en proche, pour $0 \leq i \leq p - 2$, les suites :

(v^i) , obtenue à partir de (u^i) en supprimant les termes qui sont de rangs multiples de $p - i$.

(u^{i+1}) , définie par $u_n^{i+1} = \sum_{j=1}^n v_j^i$.

Exemple : $p = 4$.

A VOS STYLOS

u^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
v^0	1	2	3		5	6	7		9	10	11		13	...
u^1	1	3	6		11	17	24		33	43	54		67	...
v^1	1	3			11	17			33	43			67	...
u^2	1	4			15	32			65	108			175	...
v^2	1				15				65				175	...
u^3	1				16				81				256	...

On remarque qu'on obtient ici la suite des puissances quatrièmes des entiers successifs.

Ce résultat se généralise-t-il à p quelconque?

PROBLÈME 40

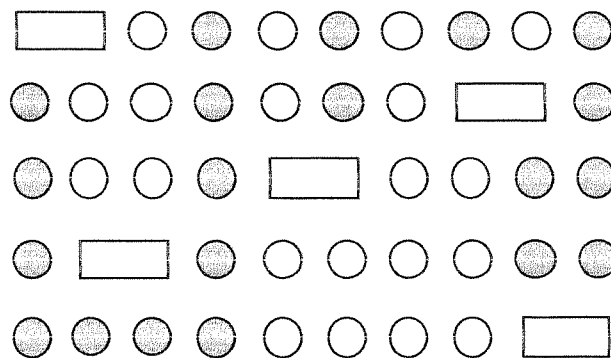
Énoncé (proposé par B. Kordiemsky) :

On place $2n$ jetons d'un jeu de dames, n blancs et n noirs, sur une ligne horizontale (on suppose $n \geq 3$) : d'abord deux espaces vides consécutifs, puis un blanc, un noir, un blanc, un noir, etc.

L'objectif est de parvenir à la disposition suivante : tous les noirs, puis tous les blancs, puis les deux espaces vides.

Pour cela, le seul type de mouvement autorisé est une translation de deux jetons consécutifs vers les deux espaces vides.

Peut-on y parvenir en n mouvements? La solution est-elle unique? Nous avons représenté ici une solution avec $n = 4$ en figurant les deux espaces vides par un rectangle.



PROBLÈME 41

Énoncé (proposé par J. Zeng) :

Dans ce qui suit, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial autrefois noté C_n^k .

1) Donner une expression de chacune des sommes suivantes à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{1} \binom{n}{1} = ?$$

$$\binom{n}{3} - \binom{n}{1} \binom{n}{2} - \binom{n}{2} \binom{n}{1} + \binom{n}{1} \binom{n}{1} \binom{n}{1} = ?$$

2) On appelle composition de l'entier p en k parts toute suite ordonnée $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ telle que $\forall i \ c_i \geq 1$, et $c_1 + c_2 + \dots + c_k = p$.

On note $C(p, k)$ l'ensemble des compositions c de ce type, et on pose

$$S(n, p, k) = \sum_{c \in C(p, k)} \binom{n}{c_1} \binom{n}{c_2} \cdots \binom{n}{c_k}$$

Donner une expression de la somme suivante à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{k-1} S(n, p, k).$$

Remarque.— L'auteur du problème propose encore une généralisation de ce résultat, qui sera soumise aux lecteurs de notre rubrique en fonction de l'intérêt suscité par ces deux premières questions.