A VOS STYLOS

PROBLÈME 37

Énoncé (proposé par D. Dumont) :

Deux joueurs A et B retirent à tour de rôle des allumettes sur un tas d'allumettes, avec la règle que le premier joueur ne peut prendre le tas tout entier, et qu'ensuite chaque joueur peut prendre un nombre d'allumettes au plus égal au nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Est considéré comme vainqueur celui qui ramasse la dernière allumette.

a) Trouver la stratégie gagnante pour le joueur qui commence.

b) On suppose qu'on modifie la règle en autorisant de prendre un nombre d'allumettes au plus égal à deux fois le nombre pris par l'autre joueur au coup précédent. Trouver la stratégie gagnante.

Indication : Dans le cas a) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas une puissance de 2.
Dans le cas b) le premier joueur n'a une stratégie gagnante que si le nombre d'allumettes du tas n'est pas un nombre de Fibonacci.

Solution du a), par J. Lefort : Soit un entier $n \geq 1$. Il existe un couple unique (p, k) d'entiers tels que $p \geq 0$, $k \geq 0$, et $n = (2k + 1)2^p$.
On suppose d'abord que $k > 1$, n n'est pas une puissance de 2. La stratégie pour le premier joueur A va consister, chaque fois qu'il aura la main, à retirer un nombre d'allumettes égal à la plus grande puissance de 2 qui divise le nombre d'allumettes du tas. Nous allons voir que A pourra faire cela en respectant la règle du jeu, et qu'à un moment donné B lui laissera un nombre d'allumettes égal à une puissance de 2. A ce moment-là, A ramassera la dernière allumette.
Dans le tas de départ, $n = (2k + 1)2^p$, le joueur A prend donc 2^p allumettes et laisse à B un tas de $2^{p+1}k$ allumettes. Par suite, deux cas se produisent, selon la manière dont joue B :
- ou bien B prend également 2^p allumettes, et A retrouve un tas de $n' = (2k-1)2^p$, où l'entier n' correspond donc au couple $(p, k - 1)$;
- ou bien B prend b allumettes, avec $b < 2^p$, et laisse à A un paquet de $n' = 2^{p+1}k - b = (2k' + 1)2^q$, avec $q < p$. L'entier n' correspond alors à un couple (q, k'), avec $q < p$.
Après un certain nombre d'étapes, $k = 0$, alors A prend tout le tas et ramasse la dernière allumette.
En revanche, si $n = 2^p$ au départ, supposons que A prenne a allumettes : ou bien $2^{p-1} \leq a < 2^p$, alors B prend le reste et gagne, ou bien $a < 2^{p-1}$ et B se retrouve dans la situation antérieure, la stratégie étudiée plus haut pour le compte de A permet alors à B de gagner.

Indications pour le b) : Nous n'avons pas encore obtenu de réponse complète, mais J. Lefort sait résoudre le problème pour les petites valeurs de n. Il apparaît que A ne possède de stratégie gagnante que dans le cas où n, nombre d'allumettes au départ, n'est pas un nombre de Fibonacci. On obtient le tableau suivant :

n =	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
A:	P	P	G	P	G	G	P	G	G	G	G	P	G	G	G	G
			1		1	2		1	2	3	1		1	2	3	1,4

Dans ce tableau on a noté G ou P selon qu'il s'agit d'une position initiale gagnante ou perdante, puis, sous chaque position gagnante, le nombre d'allumettes à retirer. Souvent, la stratégie consiste à aller au nombre de Fibonacci immédiatement inférieur. Mais ce n'est pas toujours le cas, dans le cas de 12 il faut retirer 1, dans le cas de 17 on peut retirer 1 ou 4 (deux stratégies gagnantes), dans le cas de 20 il faut retirer 2, etc. Il reste donc à traiter le cas général. On pourra faire usage du théorème de Zeckendorff, selon lequel tout nombre n s'écrit de manière unique comme somme de nombres de Fibonacci strictement décroissants et non consécutifs (dans la somme n'apparaît pas $F_k + F_{k-1}$). Exemple : pour 14 on accepte l'écriture $13 + 1$, mais non $8 + 5 + 1$, car 5 et 8 sont des nombres de Fibonacci consécutifs.

PROBLÈME 38

Énoncé (proposé par G. Kreweras) :

De toute suite S d'entiers positifs on peut déduire une autre suite S' d'entiers positifs qui est celle des différences en valeurs absolues de termes consécutifs de S.

Partant d'une suite S_1 de n entiers, on obtient ainsi des suites S_2, S_3, $\ldots$, S_n, dont chacune a un terme de moins que la précédente et qu'il est commode de disposer en un triangle, pointe en bas, la suite S_n se réduisant à un seul terme. Un tel triangle sera appelé "triangle de différences". Il sera dit *injectif* si tous les termes ont des valeurs distinctes, et *parfait* si ces valeurs constituent l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}\}$.

Voici deux exemples de triangles parfaits pour $n = 3$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 6 & & 4 \\ & 5 & & 2 & \\ & & 3 & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & & 4 \\ & 5 & & 3 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

Le problème est de trouver d'autres triangles parfaits. En existe-t-il pour toutes les valeurs de n ?

Remarque : Nous n'avons reçu aucune réponse, pas même quelques triangles parfaits pour $n = 4$, voire pour $n = 5$. Rappelons que les problèmes qui n'éveillent pas l'intérêt des lecteurs iront aux oubliettes (d'après notre nouvelle règle de fonctionnement).

PROBLÈME 39

Énoncé (proposé par J. Lefort) :

Soit p un entier tel que $p \geq 2$, et u^0 la suite des entiers naturels > 0 ($u^0_n = n$).

On construit de proche en proche, pour $0 \leq i \leq p-2$, les suites :
(v^i), obtenue à partir de (u^i) en supprimant les termes qui sont de rangs multiples de $p-i$.
(u^{i+1}), définie par $u^{i+1}_n = \sum_{j=1}^{n} v^i_j$.

Exemple : $p = 4$.

u^0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
v^0	1	2	3		5	6	7		9	10	11		13	...
u^1	1	3	6		11	17	24		33	43	54		67	...
v^1	1	3			11	17			33	43			67	...
u^2	1	4			15	32			65	108			175	...
v^2	1				15				65				175	...
u^3	1				16				81				256	...

On remarque qu'on obtient ici la suite des puissances quatrièmes des entiers successifs.
Ce résultat se généralise-t-il à p quelconque?

Indication : On trouve en effet, dans le cas général, la suite (n^p). Pour la démonstration on peut envisager deux approches :
a) par les fonctions génératrices. Etant donnée une série formelle $f(x) = \sum_n a_n x^n$, on peut lui appliquer l'opérateur S, qui est la multiplication par $1/1-x = \sum x^n$, et aussi l'opérateur E_k qui envoie f sur g, avec $g(x) = \sum_n b_n x^n$, où tous les b_n sont nuls sauf ceux de rangs congrus à k modulo m qui sont égaux aux termes de mêmes rangs de (a_n). Avec l'énoncé du problème, Jean Lefort a envoyé une solution complète qui utilise cette méthode.
b) par la Combinatoire. On considère l'ensemble des applications f de $\{1, 2, \ldots p\}$ dans $\{1, 2, \ldots n\}$, dont on sait qu'il est de cardinal n^p. On s'intéresse au maximum d'une application f, à savoir $max(f) = \max_{1\leq i\leq p} f(i)$, et aussi au nombre $top(f)$ des points du graphe de f qui sont d'ordonnée n, ou encore (éventuellement) au nombre de points du graphe de f qui sont d'ordonnée $max(f)$, ou encore à d'autres paramètres. Dans l'exemple ci-dessus, où $p = 4$, on constate que pour $n = 3$ le nombre d'applications f telles que $max(f) = 1$, puis $max(f) = 2$, puis $max(f) = 3$, est égal respectivement à 1, 15, 65. On constate aussi que le nombre d'applications f telles que $top(f) = 0$, $top(f) = 1$, $top(f) = 2$, $top(f) = 3$, $top(f) = 4$, est égal respectivement à 16, 32, 24, 8, 1. Or tous ces entiers apparaissent dans le tableau. Contrairement à Jean Lefort, je (D. Dumont) n'ai pas vérifié jusqu'au bout que cette méthode combinatoire conduisait à une solution complète, je me contente de la suggérer aux lecteurs.

PROBLÈME 40

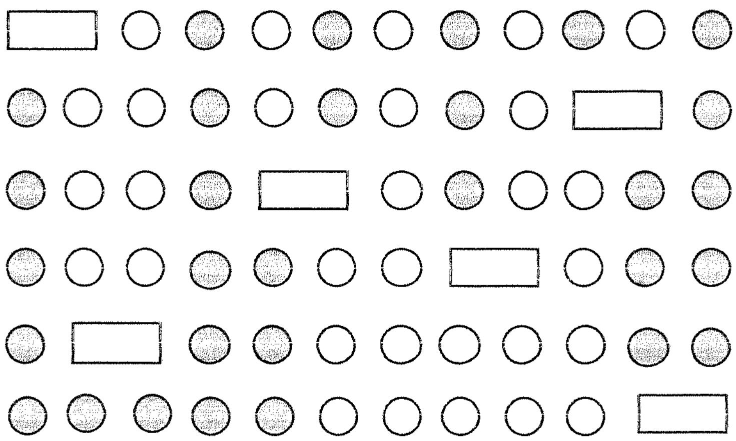
Énoncé (proposé par B. Kordiemsky) :

On place $2n$ jetons d'un jeu de dames, n blancs et n noirs, sur une ligne horizontale (on suppose $n \geq 3$) : d'abord deux espaces vides consécutifs, puis un blanc, un noir, un blanc, un noir, etc.

L'objectif est de parvenir à la disposition suivante : tous les noirs, puis tous les blancs, puis les deux espaces vides.

Pour cela, le seul type de mouvement autorisé est une translation de deux jetons consécutifs vers les deux espaces vides.

Peut-on y parvenir en n mouvements ? La solution est-elle unique ?
Dans le précédent numéro nous avons donné une solution avec $n = 4$. Voici une solution avec $n = 5$. Dans ces deux cas la solution est très probablement unique.



PROBLÈME 41

Énoncé (proposé par J. Zeng) :

Dans ce qui suit, la notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial autrefois noté C_n^k.

1) Donner une expression de chacune des sommes suivantes à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\binom{n}{2} - \binom{n}{1}\binom{n}{1} = \quad ?$$

$$\binom{n}{3} - \binom{n}{1}\binom{n}{2} - \binom{n}{2}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{1}\binom{n}{1} = \quad ?$$

2) On appelle composition de l'entier p en k parts toute suite ordonnée $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$ telle que $\forall i \; c_i \geq 1$, et $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = p$.

On note $C(p,k)$ l'ensemble des compositions c de ce type, et on pose

$$S(n,p,k) = \sum_{c \in C(p,k)} \binom{n}{c_1}\binom{n}{c_2}\cdots\binom{n}{c_k}$$

Donner une expression de la somme suivante à l'aide d'un seul coefficient binomial :

$$\sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{k-1} S(n,p,k).$$

Remarque : L'auteur du problème propose encore une généralisation de ce résultat, qui sera soumise aux lecteurs de notre rubrique en fonction de l'intérêt suscité par ces deux premières questions.

Indication : Nous avons reçu deux solutions complètes du problème, une de P. Renfer et une de M. Wambst. La formule à trouver est

$$S(n,p,k) = (-1)^{p+1}\binom{n+p-1}{p}.$$

En outre, M. Wambst propose une $q-$extension du résultat, avec des coefficients $q-$binomiaux. Son extension est différente de la généralisation que nous avait soumis l'auteur du problème, qui est plutôt de nature "planaire". Nous reviendrons sur tout cela dans le prochain numéro.

PROBLÈME 42

Enoncé (proposé par H.S.M. Coxeter) : Soient x et y deux nombres réels positifs, supposés irrationnels et tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Montrer que les ensembles

$$X = \{[x], [2x], [3x], [4x], \ldots\} \text{ et } Y = \{[y], [2y], [3y], [4y], \ldots\}$$

forment une partition de l'ensemble des entiers naturels (où $[z]$ désigne ici la partie entière du nombre réel z).

Que se passe-t-il quand x et y sont rationnels?