PUBLICITÉ

Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle

Marie-Paule ROMMEVAUX - Thèse de doctorat
soutenue le 9 juillet1997 - IREM de Strasbourg

Peut-on apprendre aux élèves à voir dans l'espace? C'est à cette question que le travail présenté essaie d'apporter une réponse. Cette réponse - si elle existe - ne peut se construire qu'à partir d'une analyse des difficultés que les élèves rencontrent dans cette partie des mathématiques. Le premier chapitre entièrement consacré à cette analyse met en évidence les spécificités de la géométrie tridimensionnelle et la complexité de la coordination des types de représentation présents dans cette activité. Les outils d'analyse mis en place dans ce chapitre permettent de mettre en lumière certains aspects "concrets" de l'élaboration du savoir mathématique au cours des siècles et de comprendre les résultats décevants de certaines expérimentations antérieures. Elle met en lumière l'indispensable discernement des plans dans la compréhension d'une situation tridimensionnelle ainsi que l'apport des praticiens du dessin ou de la construction aux théories de la représentation. Il apparaît donc que l'introduction d'un objet matériel peut, dans certaines conditions, favoriser l'apprentissage. Une séquence didactique a été construite prenant en compte ces résultats. Le chapitre III en donne le contenu, la progression et l'analyse *a priori.*

Cette séquence qui se déroule en trois phases a pour objectif l'apprentissage du discernement des plans dans une situation tridimensionnelle que celle-ci soit représentée par un objet matériel ou par une figure géométrique plane - représentation en perspective parallèle - et pour sujet les **sections planes du cube**. Elle s'articule autour des variations concomitantes sur les deux types de représentation utilisés. La première phase met en concurrence puis en synergie les espaces bi- et tri-dimensionnels, la seconde s'articule autour de l'apprentissage des règles de la géométrie tridimensionnelle et du traitement figural des représentations en perspective parallèle, enfin, la dernière phase "de transfert" complète l'apprentissage en présentant des situations plus générales. Deux expérimentations, dans des situations "normales" de classe ont été nécessaires pour parvenir à coordonner de façon satisfaisante les types de représentation en présence. En effet, ces expérimentations ainsi que d'autres faites dans d'autres conditions d'apprentissage montrent que les objets matériels ne peuvent faciliter cet apprentissage que s'ils sont introduits à un moment précis du cursus. Trop tôt ils n'apportent aucune amélioration.

Les chapitres IV et V sont consacrés aux évaluations. Une épreuve a été proposée aux deux classes expérimentales et à deux classes témoins. Celle-ci est analysée dans le quatrième chapitre à l'aide d'un **tableau à double entrée montrant les interactions entre complexité mathématique et cognitive**. Trois degrés de complexité mathématique et trois degrés de complexité cognitive ont été retenus dont le croisement a permis de construire *a priori* la progression des activités et des exercices de l'épreuve finale.

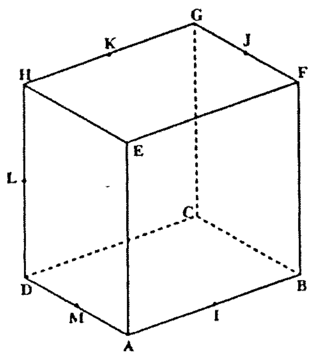
Les résultats montrent que cet apprentissage donne aux élèves la capacité de déceler, sur des représentations bidimensionnelles, des sections planes et de les utiliser dans leur déduction, d'utiliser l'appréhension perceptive support d'une appréhension opératoire. Si tous n'ont pas franchi ce seuil, le plus grand nombre a compris qu'il était essentiel de commencer par bien identifier les plans.

Gérard KUNTZ

Voici, sur un exemple reproduit dans le volume 6 des Annales de Didactique dont la publicité suit, un aperçu des analyses faites dans cette thèse. L'exercice exploité ne venait qu'en fin de parcours de l'expérimentation faite dans la classe.

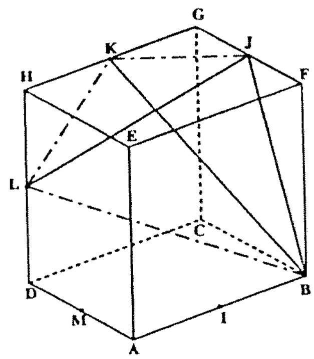
Deuxième exemple :

Un cube *ABCDEFGH* est représenté ci-contre en projection parallèle sur le plan *BDHF* . Les points I, *J, K, L* et *M* sont les milieux respectifs des arêtes *[AB], [GF], [GH], [HD]* et *[AD]* .



Les points L, J, B, K sont-ils dans un même plan ?

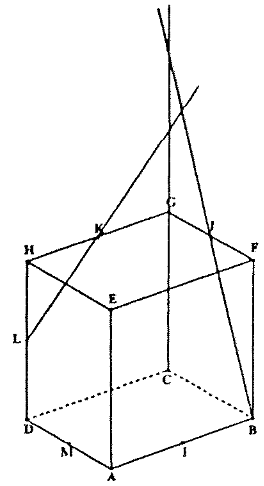
Les lois de la Gestalt, qui ont pu être renforcées par l'apprentissage, amènent à *regrouper les stimulis* [*Palmer & Rock*, 1991] : à joindre sur le papier ou mentalement les points donnés - ce qui est fait en trait gras sur la figure -, la forme obtenue constitue la figure-source.



Celle-ci est une forme ouverte, elle ne permet pas comme l'indiquent les lois du regroupement ou de clôture de *détacher une forme du fond*. Tentant, toujours selon les mêmes lois, de *percevoir la forme la plus simple avec l'information disponible*, on cherche à joindre les points donnés pour obtenir une forme fermée qui, dans les meilleurs cas peut suggérer la réponse : la figure dessinée en trait pointillé. Nous voyons ici que les figures obtenues en traits plein ou pointillé ne suggèrent aucune piste. Il est alors nécessaire pour répondre à la question de **dissocier** les points et de les regrouper : les sept possibilités de regroupement sont ici ouvertes. Nous allons donner quatre solutions effectivement trouvées dans les productions d'élèves, chacune répond à une reformulation du problème proposé.

a) Les droites *(LK)* et *(BJ)* sont-elles dans un même plan ?

Dans la figure-source associée à cette nouvelle question les droites seront tracées qu'il faudra *plonger* dans des plans permettant de répondre. Chacune d'elles est située dans une face du cube - **plans directement discernables** -, ces faces, adjacentes, se coupent suivant une arête. Il faut ensuite trouver l'intersection de deux droites dans un plan et, **interpréter en dimension trois** ce que permet de *lire* la figure : les points d'intersection des deux droites avec l'arête sont distincts.

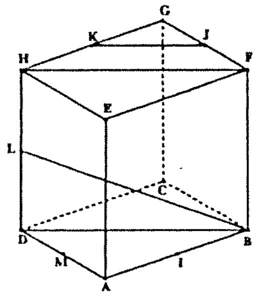


La démonstration, de géométrie bidimensionnelle, est calquée sur cette appréhension. L'obstacle ne réside pas ici dans l'action de «sortir» du plan, ce que les élèves apprennent sans trop de difficulté, mais dans les changements constants de dimension : montée en dimension : choix des plans, puis descente en dimension : arête commune etc., qui conditionnent la maîtrise de cette «sortie» hors du monde fermé des solides [16]. Ces différents changements lorsqu'ils deviennent conscients peuvent tout à fait être réussis par des élèves de seconde. La représentation figurale permet une interaction productive entre **appréhension perceptive** et **appréhension opératoire** [*Duval*, 1995b].

b) Les droites *(LB)* et *(JK)* sont-elles dans un même plan ?

La résolution de cette question reformulée va faire intervenir des éléments de dimension disparate, ce qui peut paraître simple pour des esprits exercés à la géométrie tridimensionnelle mais ne l'est pas pour les débutants. Comme précédemment, il est nécessaire de plonger chacune des droites dans un plan qui la contient : l'un est une face du cube, l'autre le plan diagonal *DBFH*, ils sont **directement discernables**.

Après avoir résolu un problème plan très simple dans $EFGH$, il faut, pour répondre, associer la droite (JK) et le plan $DBFH$ et «oublier» la droite (LB). Comme précédemment appréhension perceptive et appréhension opératoire sont étroitement associées et peuvent permettre une démonstration presque immédiate.

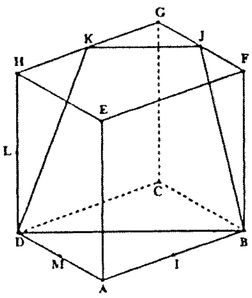


Nous allons maintenant étudier deux des regroupements déterminant un plan, ceux que nous avons rencontré dans les productions des élèves. Les deux autres donnent des pentagones difficiles à déterminer pour des élèves de ce niveau. Nous donnerons ensemble les deux formulations qui relèvent d'une même analyse.

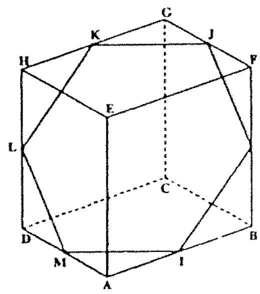
c) Le point L est-il dans le plan (KJB) ?

d) Le point B est-il dans le plan (LKJ) ?

Dessiner sur la représentation en perspective parallèle du cube les plans (KJB) ou (LKJ) demande la résolution d'un problème d'intersection de plans. La droite (BD) - ci-contre -, ou (LM), (MI) etc. -ci-dessous - ne peuvent être créées qu'après un raisonnement.

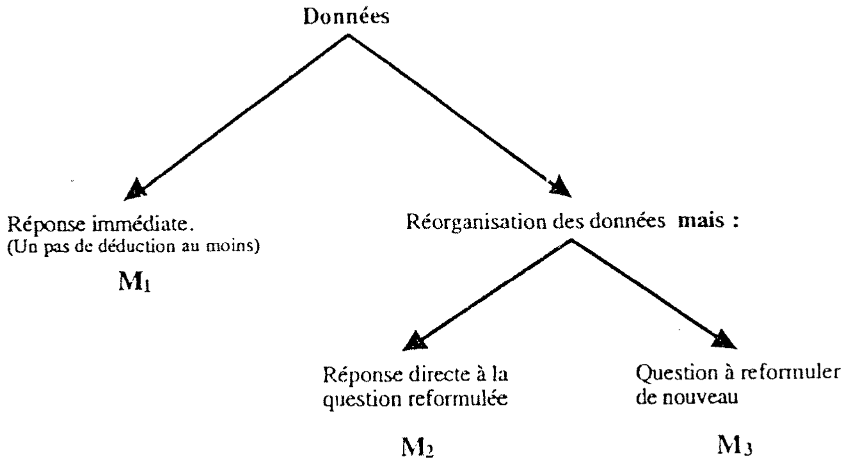


Nous dirons que dans ce cas la figure n'a pas, intrinsèquement, de qualités heuristiques, elle permet seulement une meilleure prise en compte des divers éléments entrant dans la démonstration. Le plan pertinent pour la résolution est, dans la figure-source, **non visuellement accessible**. Le problème d'intersection résolu la solution est immédiate.



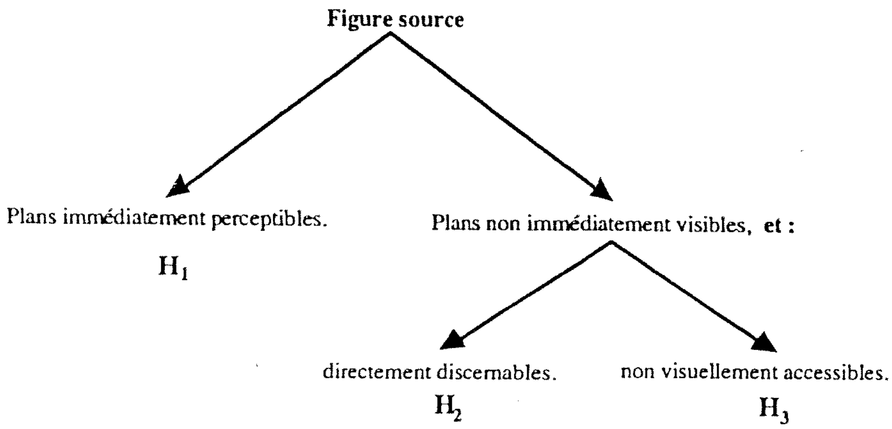
Mais, toute la difficulté est dans ce problème non explicitement posé. Il semble clair que seuls les élèves ayant déjà rencontré ces sections du cube, donc en concevant *a priori* l'existence, peuvent produire ces solutions.

Les deux complexités que nous avons définies :
-- complexité mathématique liée aux différentes définitions d'un plan, donc impliquant un choix,
-- complexité heuristique liée aux formes qui peuvent sur la figure-source suggérer l'existence d'un plan pertinent pour la résolution,
ont été déclinées en trois degrés que nous allons donner séparément puis combiner en un tableau croisé. Ce tableau nous a permis de gérer les différentes étapes de l'apprentissage et de graduer les exercices de l'évaluation. Associés, à l'origine, à la détermination des plans dans les problèmes de géométrie tridimensionnelle, nous les avons adapté à d'autres types de problèmes pour lesquels ils peuvent aussi permettre d'analyser des démarches complexes.



Indice de «complexité mathématique»

Lorsque les données de la question doivent être réorganisées, les éléments de la figure interviennent pour orienter le choix, c'est pour cette raison que les deux indices doivent être croisés.



Indice de «complexité heuristique»

Lorsque les plans ne sont pas immédiatement perceptibles - c'est-à-dire déjà représentés sur la figure : plans de référence ou plans ayant été définis dans des réponses précédentes -, les éléments de la figure-source représentés et la reformulation de la question vont intervenir conjointement dans la recherche de la solution.

Heuristique / Mathématique	Plans immédiatement perceptibles H_1	Plans directement discernables H_2	Plans non visuellement accessibles H_3
Réponse immédiate M_1			
Réponse immédiate à la question reformulée, M_2			
Question à reformuler au moins une seconde fois M_3			

Prise en compte simultanée des deux indices.

Ce tableau est destiné à recevoir les pourcentages de réussite aux questions d'un problème analysé en fonction des indices précédemment définis. Il nous permet, dans l'analyse préalable des questions, de mesurer la difficulté prévue et, dans l'analyse des productions effectives, de confirmer certains points. Ce tableau a été mis à l'épreuve pour un problème classique de géométrie tridimensionnelle, il a répondu à notre attente [*Rommevaux*, 1997 p. 256-264].

Après une synthèse des éléments issus de l'analyse précédente nous donnerons les étapes de la séquence d'apprentissage expérimentée.