EDITORIAL

Arithmétique 2 : le retour

Belle récompense ! Les programmes de terminales scientifiques en vigueur depuis la rentrée de septembre 1998 ont été pensés à Strasbourg. Michel de Cointet et François Pluvinage, membres du Groupe Technique Disciplinaire, ont mis en place, il y a quelques années, une commission de réflexion essentiellement composée d'animateurs de l'IREM de Strasbourg. Elle avait pour but d'élaborer de nouveaux programmes de terminales scientifiques. Notre proposition, après avoir sommeillé, a été légèrement modifiée puis adoptée.
Les élèves de terminales S suivent un tronc commun qui comprend six heures de mathématiques hebdomadaires. Ils le complètent par un enseignement de spécialité, choisi par eux, parmi les trois disciplines scientifiques : mathématiques, physique et biologie. La spécialité se déroule sur 60 heures annuelles environ, cours, exercices, contrôles compris.
La spécialité mathématiques est formée de deux grands thèmes : l'arithmétique et la géométrie. L'arithmétique, plus faible en volume, balaye la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, l'existence de la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers, l'existence d'une infinité de nombres premiers, la division euclidienne et l'algorithme d'Euclide, le p.g.c.d. et le p.p.c.m. de deux entiers naturels, le théorème de Bezout, le théorème de Gauss. Les travaux pratiques (inclus dans l'horaire imparti) explorent le crible d'Erathostène, les critères de divisibilité, les changements de base de numération, les équations diophantiennes.
Mais les livres scolaires qui viennent de paraître nous semblent très ambitieux. Nous y trouvons des exercices, proposés dans les années 1975-1980, à des élèves qui avaient reçu une formation plus solide et plus poussée tout au long de leur scolarité. Arriver à cette performance nous paraît illusoire, et même si nous disposions du temps nécessaire à de tels apprentissages, elle ne correspondrait pas aux objectifs que nous nous donnions lors des propositions de programmes.
Ces objectifs sont les suivants :
- Réfléchir aux ensembles de nombres.

Ne perdons pas de vue que pour ces élèves, un nombre n'est guère plus que la valeur affichée par la calculatrice. L'entier n'a pas de statut particulier. L'arithmétique du collège ayant disparu, aucun travail sur le p.g.c.d. et le p.p.c.m, décomposition en produit de facteurs premiers n'a été fait pour induire une réflexion dans $\mathbb{N}$.

En arithmétique, ils vont être amenés à réfléchir sur des ensembles finis et à produire des raisonnements exhaustifs. C'est la première fois dans leur cursus que réaliser un certain nombre d'essais constitue une preuve dans une démonstration. C'est aussi une nouveauté de déduire une égalité à partir d'une inégalité : un multiple de n strictement compris entre $-n$ et n est nul. Par ailleurs, ils vont prendre conscience que toutes les opérations ne sont pas internes dans IN : pour montrer qu'un nombre entier est multiple de 19, il ne suffit pas de factoriser 19 par n'importe quoi!

- Comprendre des définitions, les théorèmes, c'est-à-dire d'une manière générale le cours.

A partir de la définitions suivante : *un nombre entier* a *est multiple d'un nombre entier* b *si et seulement si il existe un entier* k *tel que* $a = kb$, demander aux élèves quel est le plus petit entier positif multiple de b (b élément de $\mathbb{N}^*$) donne lieu à une grande effervescence dans la classe : est-ce 0, est-ce 1, est-ce b? Transformer le débat d'opinion en un retour sur la définition est une tâche difficile.

- Travailler le raisonnement.

L'enseignement de l'analyse essentiellement algorithmique et les moyens (calculatrices graphiques, ordinateurs) mis à la disposition des élèves favorisent une certaine appréhension des mathématiques, mais ne les préparent peut-être pas à entrer dans un cours de l'enseignement supérieur. L'arithmétique élémentaire permet de travailler le raisonnement. En voici une illustration, anecdote vécue dans la classe de Claudine :

« J'avais proposé lors d'un devoir en classe l'exercice suivant : *existe-t-il une base* b *de numération telle que* $\overline{72}^b + \overline{58}^b = \overline{141}^b$ *?* Les élèves ont écrit $12b + 10 = b^2 + 4b + 1$, puis ont résolu l'équation $b^2 - 8b - 9 = 0$, ont trouvé les solutions -1 et 9. Pour la plupart, ils ont écarté la solution -1 et ont conclu que 9 est LA solution de l'exercice. Car bien sûr tout problème de mathématiques du secondaire a UNE solution ! Cet exercice a suscité un véritable débat dans le groupe lycée de l'IREM qui travaille actuellement sur l'arithmétique; ces discussions ont été étoffées lors du stage que nous avons organisé le 5 novembre. Elles m'ont amenée à réfléchir différemment à la correction orale du devoir.

D'entrée de jeu un élève a proposé : « Comme il y 8 dans l'écriture, b est supérieur à 9. J'essaie 9 ; ça marche ; est-ce que c'est une démonstration ? »

Nous voilà d'emblée au coeur du débat : qu'est-ce qu'une démonstration ?

Au milieu des autres, mi-admiratifs, mi- pensifs, un doigt s'est levé pour exprimer : « mais on n'est pas sûr qu'il n'y a qu'une solution ! ». Etonnement : peut-on démontrer que ce problème admet une ou au plus une solution ?

J'écris au tableau la question évoquée lors de notre stage : *existe-t-il une base b de numération telle que* $\overline{10}^b \times \overline{10}^b = \overline{100}^b$? Très vite, les murmures se transforment en voix : ça fait $b^2 = b^2$. Que se cache-t-il derrière ça fait et que peut-on conclure ? Je répète ma question et la classe se divise en deux parties :

- on a tourné en rond, c'est comme lorsqu'on obtient 0=0, on ne peut rien conclure, il faut changer de méthode.
- mais si, on peut conclure. $b^2 = b^2$ est toujours vrai. Tous les nombres, et pourquoi pas tous les réels, sont solutions.

Le but atteint dépasse mes espérances ! L'exercice initial, que j'aurais pu ne pas corriger (presque tout le monde avait déjà trouvé *9*) donne lieu à un débat dans la classe. Bien sûr ces jeunes ont un vécu mathématique qui ressort clairement lors de leurs réponses. Mais ils manquent de raisonnement, ils se précipitent pour résoudre le problème qu'ils ne posent pas. Et c'est bien pour pallier à ces manques que nous souhaitions le retour de l'arithmétique.
Le ton du débat monte mais aucune conclusion n'apparaît. Le recours à la DEFINITION de base de numération, au RAISONNEMENT PAR EQUIVALENCE, s'impose et le calme revient.

Puis j'écris au tableau :*existe-t-il une base de numération b telle que* $\overline{20}^b \times \overline{20}^b = \overline{400}^b$?Ils sont ravis. Maintenant ils savent tous répondre, mais un seul d'entre eux pense que b est supérieur à *5*.
Je ne corrige plus l'exercice initial. Tout ce que je voulais dire est passé mais une heure s'est écoulée quasiment... et je dispose de 25 heures pour toute l'arithmétique.»
Nous avons pourtant l'intime conviction que ce temps n'est pas du temps perdu !

Claudine Kahn et Marie-Agnès Egret