

J'AIME ALICE, DONC ALICE MÊME

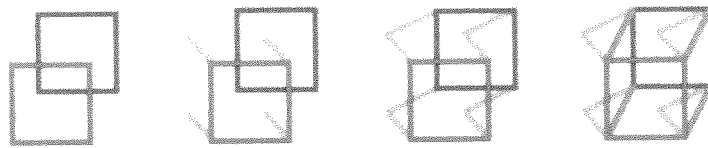
Propos sur l'hyperespace

par Antoine WALTER

Antoine WALTER est un artiste qui prend une grande part de son inspiration dans les mathématiques qu'il interprète à sa façon. Il a été luthier, ce qui a enrichi sa dextérité et sa sensibilité à l'âme des objets, notamment celle du violon. Il est également très influencé par LACAN et la psychanalyse en général.

Il a offert deux couvertures à la revue, ce numéro 103 et le précédent et nous livre en toute liberté dans son article, quelques clés sur sa façon de travailler en tant qu'artiste non mathématicien. Il s'agit donc d'une interprétation subjective des mathématiques et non d'un article mathématique.

Ma première rencontre visualisée avec l'hyperespace a été un dessin très simple : trois carrés reliés entre eux forment trois cubes.



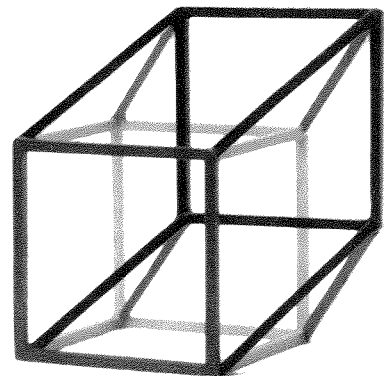
J'ai passé une dizaine d'années à tourner et retourner cette chose mystérieuse sans trop savoir comment la ranger dans l'ordre des polyèdres et polytopes. Je l'appelais le cube au cube K^3 . J'y voyais plutôt une multiplication de 3 cubes entre eux qu'une addition qui aurait été 3 cubes juxtaposés. Je conjuguais ce dessin dans un petit livre intitulé « l'Histoire du carré », affublant chacun des 3 carrés d'une couleur primaire, la couleur secondaire correspondante formant la liaison.

J'appliquais toutes sortes de trinités à ces trois espaces topologiquement reliés : grâces mythologiques, Sainte Trinité religieuse, nœud borroméen lacanien RSI¹, etc.

L'accueil de mes idées auprès des personnes que le rencontrais était très mitigé, souvent admiratif, étonné, dérouté.

En 2000, je rencontrais le professeur Nicolas Rivier de la faculté de Physique des Solides de Strasbourg, qui m'a beaucoup aidé à préciser mes notions de l'hyperespace. Grâce à lui, HMS Coxeter nous envoyait un mail disant de mon cube au cube qu'il s'agit d'un double prisme ou produit rectangulaire ou produit cartésien d'un carré et d'un triangle².

C'est un polytope bien sûr, mais non régulier, puisqu'il y a des faces triangulaires. Ces triangles témoignent du passage d'un cube à l'autre. Ils sont l'angle de rotation d'un cube à l'autre. On pourrait dire qu'ils sont l'angle temporel si le temps est pris comme quatrième dimension. En chaque sommet de K^3 , tous les angles sont orthogonaux. Nous sommes dans la quatrième dimension, puisque en chaque sommet, pour le cube, il y a 4 arêtes.



¹ Jacques Lacan disant « l'inconscient est structuré comme un langage » a schématisé la Psyché selon un nœud borroméen à trois ronds liant les trois registres fondamentaux : réel, symbolique, imaginaire. La propriété borroméenne est liée au fait que la coupure d'un rond libère les deux autres.

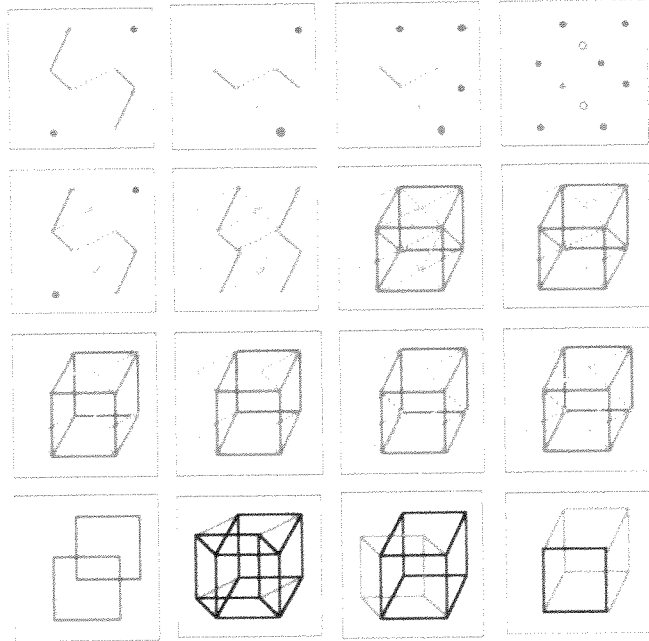
² Regular Polytopes p.124 Regular Coxeter Polytopes p.37

La modélisation de K^3 en 3D m'a longtemps posé problème. Alors qu'en 2D la représentation en perspective cavalière nous paraît orthogonale, et qu'elle est strictement orthogonale en 4D, la 3D oblige à tronquer 2 cubes en parallélépipèdes.

	Sommets	Arêtes	Faces	Espaces	Schläfli
Polytope K^3	12	24	15	3-Cell	$\{4\} \times \{3\}$

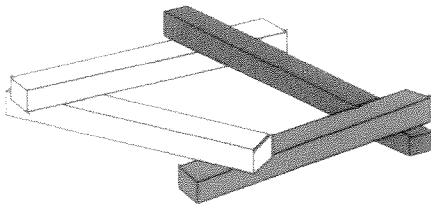
Construction et évolution de K^3

- carré
- cube
- 2 cubes
- 3 cubes
- 3 carrés
- K^3
- la tour
- le berceau
- le haut-fourneau
- le livre
- la totale
- l'aile volante
- les lunettes
- l'éolienne
- le scarabée
- le rossignol
- la voie lactée

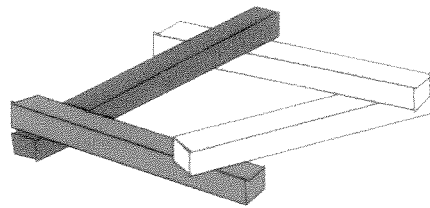


Plus loin, je regardais les gravures d'Escher. Comment faisait-il pour évoquer sur son dessin des espaces tellement difficiles en 3D ? Je trouvais une solution en donnant une épaisseur aux arêtes du plan et en les superposant dessus-dessous. Cela formait des plans hélicoïdaux qui pouvaient être soit lévogyre, soit dextrogyre. J'apprenais que l'espace courbe est orienté.

Plan lévogyre



Plan dextrogyre



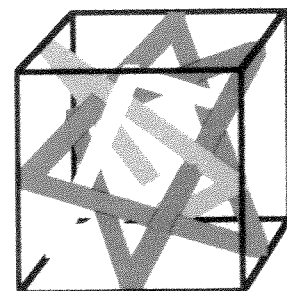
Un cube eschérien a 6 faces hélicoïdales orientées dans le même sens. L'étude des symétries y est intéressante. La courbure de l'espace augmente au fur et à mesure que l'on resserre cube sur lui-même tout en gardant l'épaisseur des arêtes.

Il arrive un moment où les 12 arêtes du cube forment un entrelacs symétrique de 4 triangles, dont les sommets sont inscrits dans un cuboctaèdre.

Pour ceux qui se sont intéressés à la théorie des nœuds, les sommets d'un cube eschérien sont des *triskels*. Ses faces sont des *quadriskels*.

Pour le tétraèdre, sommets et faces sont des *triskels*.

Pour l'octaèdre, sommets *quadriskels*, faces *triskels*.



Dans l'espace eschérien, il s'agit d'une courbure des directions de l'espace qui n'est pas encore de l'hyperespace. C'est de la 3D courbée telle qu'Einstein le montre avec la relativité aux abords des très grandes masses et de la vitesse de la lumière.

L'hyperespace en tant que tel demande une gymnastique de l'esprit un peu particulière. C'est que nous sommes très habitués à réfléchir et à nous représenter le monde cartésien avec trois dimensions: largeur, hauteur, profondeur.

La première idée pour symboliser une 4^e dimension est de dire que c'est du temps. C'est la position de la physique newtonienne. Faire de cette idée de temps une idée de géométrie spatiale, voilà la difficulté.

Et pourtant, nous y sommes tous les jours invités. Le chant d'un oiseau qui brise le silence et traverse l'espace, c'est une quatrième dimension. Un tableau dans une chambre change l'atmosphère et l'espace s'en trouve recentré ou dispersé, oppressé ou agrandi. Un musicien fait vibrer à travers l'espace de la salle celui de son violon, de la musique qu'il interprète, de l'époque qu'il met en jeu dans la situation présente.

En fait toute irruption du langage dans le monde me paraît comme une invitation à l'*hyperspatialité*.

Comment s'échafaude les lieux des dimensions entre elles ?

J'ai souvent remonté l'échelle de ce qui est apparent, bien connu de nos consciences:

- un point	fait parti de la dimension	0
- un segment	"	1
- un plan	"	2
- un espace	"	3
- un temps	"	4
- une lumière	"	5

Cela demanderait de long développements qu'il n'est pas utile de faire ici.

Mais pour comprendre spécifiquement l'hyperespace, il faut essayer de penser le bord de ces dimensions.

- une arête	est bordée par des	points
- un plan	est bordé par des arêtes	
- un espace	est bordé par des plans	
- un hyperespace	sera bordé par des	espaces.

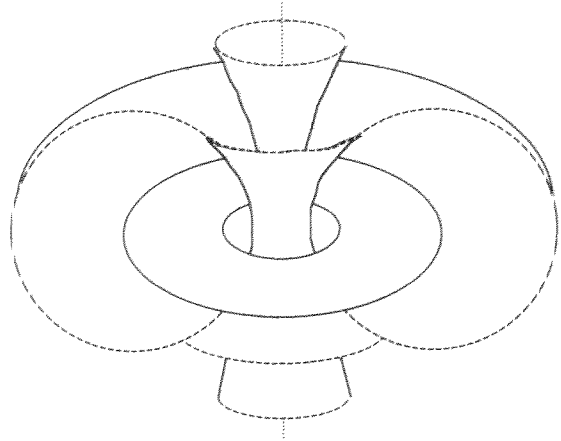
Un hyperespace n'est absolument pas un objet 3D. Ce qu'on peut représenter en 2D ou 3D ne sont que des projections, tout comme un plan d'architecture n'est pas la maison même, ou une carte du Club Vosgien, le ballon d'Alsace. Edwin Abbott en 1884 écrivait son livre *Flatland*, où il raconte l'existence d'êtres vivants 2D sur des plans. Le narrateur y est un carré et se demande ce que pourrait être *Spaceland*. Nous sommes les êtres de *Flatland* pour l'hyperespace.

Pour se représenter mentalement un hypercube, il faut penser un cube bordé par des cubes chacun bordé par des cubes, sachant qu'il y a seulement 8 cubes dans un hypercube. et non un remplissage de l'espace 3D par des cubes. Le bord de l'hypercube est toujours un cube. Il faut que l'espace devienne mou comme chez Dalí, qu'il se relativise comme chez Einstein, et on rentre dans la 4D comme un yogi tout à fait relaxé. Il est étonnant de sculpter une pierre, parce qu'il faut toujours en enlever, et il est étonnant de pousser son esprit vers l'hyperespace parce que toute notre gloire cartésienne y est intrinsèque et ne cesse d'y demeurer.

Coordonnées euclidiennes de S_3 dans \mathbb{R}^4 :

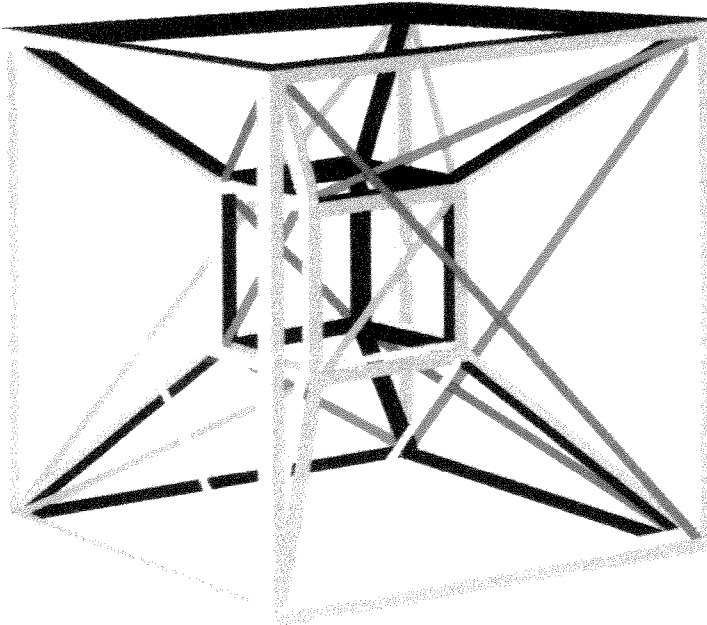
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$$

Fibration de Hopf de S_3 représentée par projection dans \mathbb{R}^3 (cf. JF Sado: La frustration géométrique)

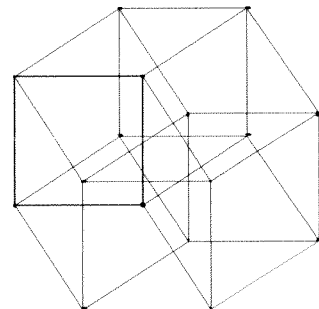


Penser les polytopes réguliers de la 4^e dimension ne peut se faire sans passer par l'hypersphère S_3 . Tout comme un polyèdre est la solidification de la sphère S_2 dans \mathbb{R}^3 , un polytope sera la solidification de l'hypersphère S_3 dans \mathbb{R}^4 .

La fibration de Hopf donnant le sens de l'espace courbe permet d'inscrire les sommets du polytope sur une grille ressemblant à des méridiens sur S_2 . Sur S_3 les fibres de Hopf sont des parallèles courant sur les 3 tores dans \mathbb{R}^3 ou sur l'hypersphère dans \mathbb{R}^4 .

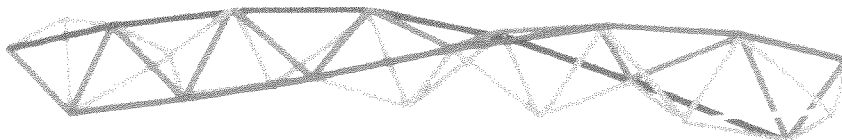


Projection centrale d'un hypercube quadridimensionnel dans l'espace à trois dimensions avec les fibres de Hopf



	Sommets	Arêtes	Faces	Espaces	Schläfli
Hypercube C8	16	32	24	8-Cell	{4, 3, 3}

L'hélice de Coxeter est un empilement de tétraèdres qui rend bien compte de la nature de ces fibres structurant l'espace courbe.

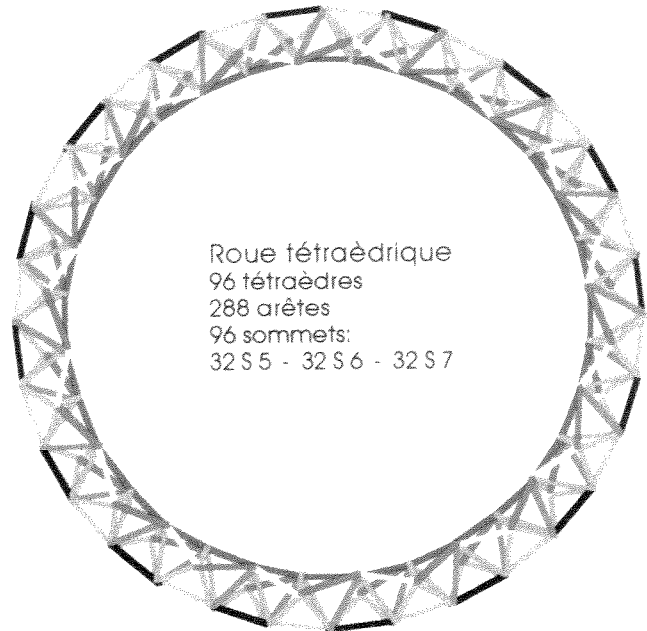
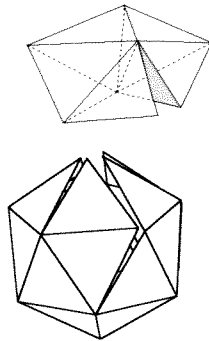


Je me suis rendu compte par hasard qu'en inversant la chiralité (le sens de la courbure) tous les six tétraèdres, on obtenait une roue tétraédrique plane de 96 tétraèdres

– 32 fois 3 tétraèdres formant un bateau :



Plastiquement, cette roue se ferme bien. Mathématiquement, il y a cependant un trou angulaire de $6^{\circ} 36' 11''$. La roue de 5 tétraèdres nous avait déjà montré un angle de cette nature.



Il a été nommé par J.F. Sadoc, lors de son étude des symétries de l'icosaèdre et des structures moléculaires de dimension 4: la frustration géométrique. Il s'agit là d'une porte qui mène de l'icosaédricisme (structures basées sur le polyèdre régulier le plus proche de la sphère : l'icosaèdre) vers l'espace courbe quand les tétraèdres non réguliers de l'icosaèdre deviennent réguliers.

C'est par un manque que la structure s'ouvre, comme dans le cycle des tonalités musicales, un manque qui fait la vibration de la musique, l'élan du discours, la source du désir. L'imperfection de la 3D mène vers un monde plus vaste et plus conscient, où le cartésianisme est intrinsèque. C'est le passage qu'explore Alice vers les lieux de son rêve.

*Oh saisons,
Oh châteaux,
Quelle âme est sans défauts*

Tableau des 5 polyèdres réguliers dans \mathbb{R}^3 et des 6 polytopes réguliers dans \mathbb{R}^4

	Sommets	Arêtes	Faces	Espaces	Schläfli
Tétraèdre	4	6	4	1	{3, 3}
Hyper.tétraèdre C5	5	10	10	5-Cell	{3, 3, 3}
Hyper-tétraèdre C16	8	24	32	16-Cell	{3, 3, 4}
Cube	8	12	6	1	{4, 3}
Polytope non rég.	152	24	15	3-Cell	{4} × {3}
Hyper.cube C8	16	32	24	8-Cell	{4, 3, 3}
Octaèdre	6	12	8	1	{3, 4}
Hyper.octaèdre	24	96	96	24-Cell	{3, 4, 3}
Icosaèdre	12	30	20	1	{3, 5}
Hyper.icsaèdre	120	720	1200	600-Cell	{3, 3, 5}
Dodécaèdre	20	30	12	1	{5, 3}
Hyper.dodécaèdre	600	1200	720	120-Cell	{5, 3, 3}

Formule d'Euler pour les Segments:

$$S = 2 \quad \Leftrightarrow N_0 = 2$$

Formule d'Euler pour les Polygones:

$$S - A = 0 \quad \Leftrightarrow N_0 - N_1 = 0$$

Formule d'Euler pour les Polyèdres:

$$S - A + F = 0 \quad \Leftrightarrow N_0 - N_1 + N_2 = 2$$

Formule d'Euler pour les Polytopes:

$$S - A + F - E = 0 \quad \Leftrightarrow N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$$

Remarquer l'oscillation entre 0 et 2 autour du nombre 1

S: Nombre de Sommets = N_0

A: Nombre d'Arêtes = N_1

F: Nombre de Faces = N_2

E: Nombre d'Espaces = N_3

Code Schläfli: $\{p,q,r\}$

p: Nombre de Cotés par Face dans le Polygone ordre de Symétrie d'une Face / Polygone

q: Nombre d'Arêtes ou Faces par Sommet dans le Polyèdre ordre de Symétrie d'un Sommet / Polyèdre

r: Nombre de Polyèdres ou Faces par Arête dans le Polyèdre ordre de Symétrie d'une Arête / Polytope

Bibliographie

Les Polyèdres : Louis JOLY, éd. Blanchard, 1992

L'univers des Polyèdres : PLOT-APMEP Université d'Orléans, 1987

Regular Polytopes : H.M.S. COXETER, Dover Publication, N.Y., 1963

Frustration Géométrique : Jean- François SADOCC, éd. Eyrolles, 1997

La quatrième dimension : Thomas BANCHOFF, éd. Belin, 1996

Revue *HYPERSPACE* vol. IX n° 1BC hélix : J-F SADOCC et N.RIVIER , 2000

Dictionnaire de la Psychanalyse : Roland CHEMAMA, Larousse , 1994

Étoffe-Nœud : Jean Michel VAPPEREAU, Topologie en extension, 1997

Poésies : Arthur RIMBAUD, Poésie Gallimard, 1992

Alice au Pays des Merveilles : Lewis CARROLL , Folio Gallimard, 1998

Publications

– Livres d'artiste : Histoire du Carré

Huit navires portant chacun trésor

– Revue *HYPERSPACE* vol. IX n° 3 2000 Japan society for Hyperspace Science

Polyèdres couplés et Polytopes Commentaires du Professeur Nicolas Rivier

Exposition

Espace la Pierre Large, 25 rue des Veaux, Strasbourg du 10 au 27 mai 2001, tous les jours 13^h–19^h : *Polyèdres – Polytopes – Infographies – Aquarelles – Livres*