PASCAL

Quelques aspects de son œuvre mathématique

Lorsqu'en 1666, COLBERT crée « l'Académie des Sciences »[1], il ne fait qu'institutionnaliser des réunions de savants qui se tiennent régulièrement depuis 1635, d'abord chez le Père Marin MERSENNE[2] où Etienne PASCAL, le père de Blaise, emmène son fils afin que celui-ci s'initie aux mathématiques, puis chez LE PAILLEUR après la mort de MERSENNE en 1648 et enfin chez Habert de MONTMOR qui prend le relais à la mort de LE PAILLEUR en 1654. Le caractère beaucoup plus mondain d'Habert de MONTMOR explique sans doute le décret de COLBERT.

Ces réunions scientifiques rassemblent la fine fleur des savants de l'époque : GASSENDI, BOUILLAUD, PASCAL, ROBERVAL, DESARGUES, CARCAVI, DESCARTES (jusqu'à sa mort en 1650),... et à l'occasion des étrangers comme HUYGENS, et on y lit la correspondance de provinciaux comme celle de FERMAT, magistrat à Toulouse[3].

C'est donc dans ce milieu que PASCAL va développer son œuvre scientifique dont on analyse ici que quatre points d'ordre mathématique, mais il faudrait aussi parler des travaux de physique bien que ces deux disciplines n'aient pas été séparées au XVII[e] siècle.

1. La géométrie projective

Il ne faut pas prendre trop au sérieux les dires de Gilberte PASCAL, la future madame PERIER, sur le génie précoce de son frère ; cependant, il faut noter que c'est dès l'âge de 16 ans que le jeune Blaise découvre une propriété fondamentale des coniques, ce qui deviendra le théorème de PASCAL sur l'hexagone inscrit, propriété tellement importante qu'il sera conduit à publier très rapidement l'*Essay pour les coniques* (1640). C'est plus un programme de travail de quelques pages avec des idées qui montrent qu'il est peut-être le seul de ses contemporains à avoir compris l'intérêt du célèbre essai de géométrie projective de DESARGUES : *le brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan* (1639). Notons que DESARGUES écrit dans un style archaïque, en utilisant un vocabulaire déroutant et en refusant les notations algébriques. PASCAL lui-même rend hommage à DESARGUES dans son *Essay*.

Grâce à PASCAL, la géométrie projective, qui jusqu'alors a surtout été développée par les artistes : ALBERTI (1404-1472), Léonard de VINCI (1452-1519), DURER (1471-1528),... pour la représentation perspective des tableaux, va devenir une branche particulière des mathématiques, permettant d'unifier en une même théorie les propriétés des cercles, des ellipses, des hyperboles et des paraboles, ces courbes que l'on baptise coni-

---

[1] On sait que COLBERT voulait avoir son Académie à l'exemple de RICHELIEU, mais que l'Académie Française s'insurgea contre la création d'une concurrente. Le Roi s'inclina en limitant la nouvelle Académie aux sciences. Les statuts définitifs ne furent promulgués qu'en 1699.

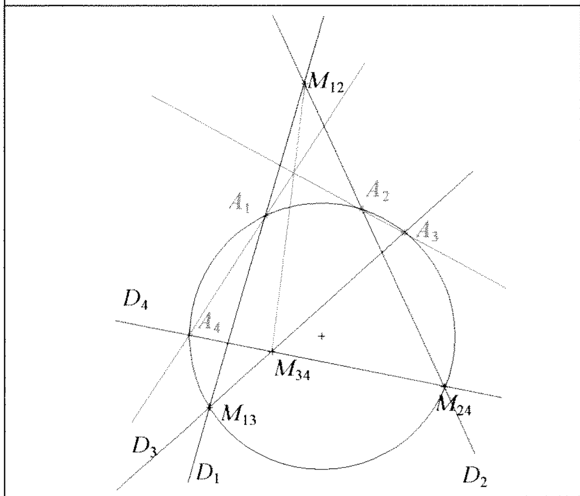
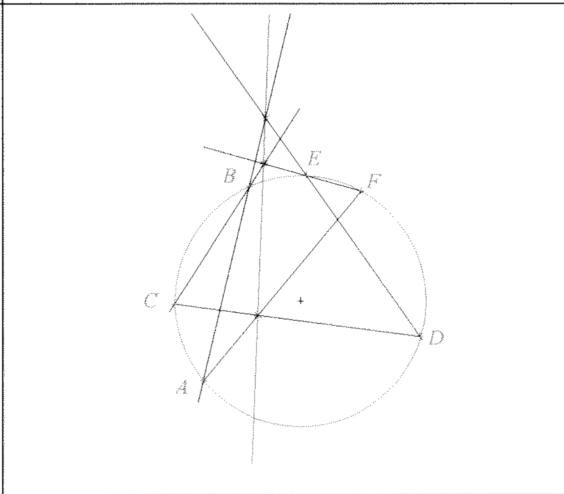
[2] Les mathématiciens connaissent les nombres de MERSENNE qui sont de la forme $2^p - 1$ où p est premier. Ces nombres ont de fortes chances d'être premiers et font l'objet de recherches toujours actuelles.

[3] FERMAT est réputé pour ses travaux en arithmétique ; en particulier, sa célèbre conjecture : « $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution en x, y, z entiers non nuls pour n > 2 » a défié les mathématiciens jusqu'à ces dernières années. Après l'avancée spectaculaire obtenue par FALTINGS en 1989, elle a été démontré par WILES en 1995.

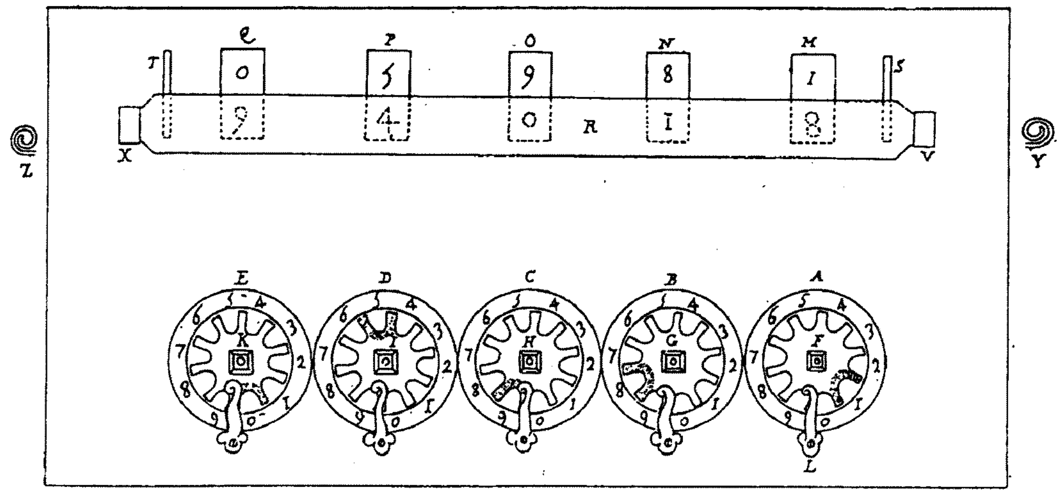
ques car elles sont l'intersection d'un cône et d'un plan. Ce passage du plan à l'espace est à la base même de l'enseignement moderne de la géométrie projective.

Le théorème de l'hexagone inscrit sera dénomme par PASCAL **« L'hexagramme mystique »** (peut-être d'après le fameux pentagramme kabbalistiques). DESARGUES, rendant par là un vibrant hommage à son découvreur, l'appellera **« La Pascale »**. Ce théorème sera le point de départ de deux ouvrages de Blaise PASCAL : l'*Introduction à la géométrie* et le *Traité des coniques*, œuvres inachevées qui seront commentées par LEIBNIZ en 1676 et en partie publiées par ce dernier. Malheureusement certains chapitres en sont perdus et peut-être à jamais.

1. L'hexagramme mystique

Version initiale avec un vocabulaire moderne	Version moderne du théorème de Pascal
	
Si D_1 , D_2 , D_3 , D_4 forment un quadrilatère complet et si M_{ij} est l'intersection des droites D_i et D_j , un cercle passant par M_{13} et M_{24} recoupe les droites D_i en A_i tels que les droites A_1 A_4 et A_2 A_3 se coupent sur la droite $M_{12}M_{34}$	Si A , B , C , D , E , F sont six points d'une conique (ici un cercle), les droites AB et DE , BC et EF , CD et FA se coupent en trois points alignés.

2. La machine arithmétique



Dessin de Belair représentant la machine de Pascal, vue de dessus

Vers 1623 SCHICKARD de l'université de Tübingen construit une machine à roues dentées qui « calcule à partir de nombres donnés d'une manière instantanée et automatique, car elle ajoute et retranche, multiplie et divise »[4]. En fait, multiplication et division ne sont pas instantanées. Ce qui est important, c'est le mécanisme de report des retenues qui s'effectue grâce à une roue à une seule dent qui engrène sur une roue à dix dents la faisant tourner d'un dixième de tour. Malheureusement, la machine de Schickard est détruite très tôt dans un incendie et il n'en fera plus mention. Il est donc plus que probable que PASCAL n'en a pas entendu parler. Disons seulement que l'idée d'une machine était dans l'air du temps. Les principes mécaniques mis en œuvre par PASCAL sont d'ailleurs tout à fait différents. Le mécanisme de report des retenues est assez compliqué, il fait intervenir la pesanteur (la machine doit donc être horizontale), il n'est pas réversible ce qui fait qu'on ne peut effectuer la soustraction que par la méthode de l'addition du complément qui est facilitée par la création d'une double numérotation sur chaque roue, chacune des numérotations apparaissant selon le besoin grâce au déplacement d'une réglette mobile.

La construction de sa machine d'après ses conceptions théoriques fut plus difficile qu'il ne l'avait cru et PASCAL faillit y renoncer. C'est sur l'insistance de ses amis qu'il se remit à la tâche faisant réaliser divers prototypes. La roue *pascaline*, comme elle fut baptisée par ses contemporains, fut construite en petite série à partir de 1645 et c'est ROBERVAL qui en assura l'exploitation commerciale. Un privilège royal garantissait à PASCAL la propriété de son invention et ce ne fut pas une garantie sans objet car PASCAL aura à se battre contre des imitations fort médiocres au demeurant mais qui sont suscitées par la cherté de sa machine arithmétique : 100 livres.

Il est intéressant de noter que cette calculatrice suscitera parmi ses contemporains des réflexions qui sont du même ordre que celles que suscitent aujourd'hui les ordinateurs et l'intelligence artificielle. PASCAL lui-même écrit : « La machine arithmétique fait des effets qui approchent plus de la pensée que tout ce que font les animaux, mais elle ne fait rien qui puisse faire dire qu'elle a de la volonté comme les animaux »[5]. LEIBNIZ aura une réflexion encore plus moderne a ce sujet.

Il reste actuellement huit exemplaires de la *pascaline* et malgré l'antériorité de SCHICKARD, il est indéniable que PASCAL fut le premier à assurer la diffusion d'une machine arithmétique mécanique, le premier d'une série de savants ou d'ingénieurs comme LEIBNIZ (en 1673), Thomas de COLMAR avec l'arithmomètre (en 1820), Dorr E. FELT avec la *comptometer* (en 1884), Léon BOLLEE avec sa calculatrice à multiplication directe (en 1888), William S. BURROUGHS avec la fameuse *Adding and Listing Machine* (en 1893) et enfin Kurt HERZSTARK du Lichtenstein avec la célèbre *Curta* (en 1948) qui ne sera détrônée que par l'avènement des calculatrices à microprocesseurs qui prendront la relève des machines tant mécaniques qu'électromécaniques.

2. Le triangle arithmétique

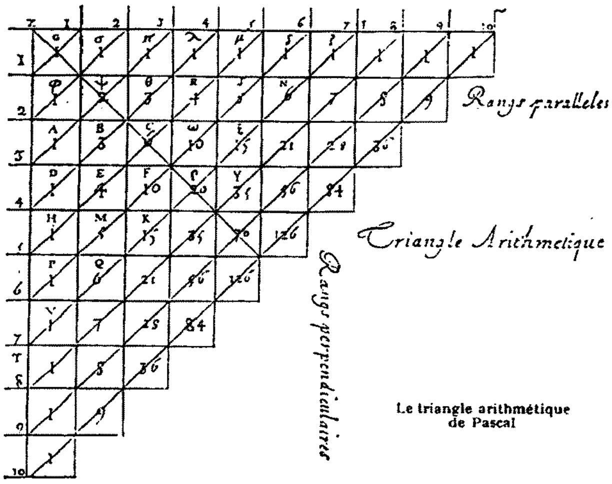
Si on demande à un lycéen ce qu'il connaît de l'œuvre mathématique de PASCAL, il citera le *triangle de Pascal*, persuadé que c'est PASCAL lui-même qui l'a inventé. Ce

---

[4] Correspondance de SCHICKARD à KEPLER.

[5] Lettre dédicatoire à Monseigneur le chancelier (1645).

triangle est construit de proche en proche de façon que chaque nombre soit la somme des deux nombres immédiatement supérieurs.



Le triangle arithmétique de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

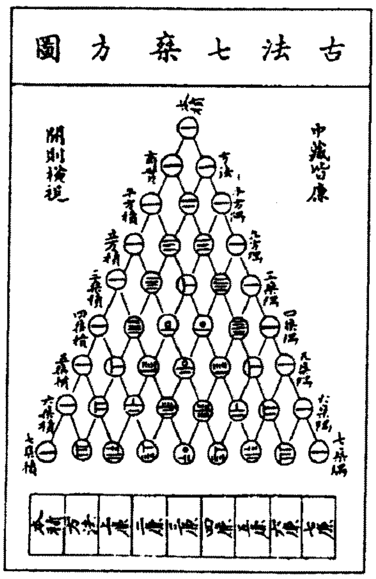
1 4 + 6 4 1

1 5 = $\boxed{10}$ 10 5 1

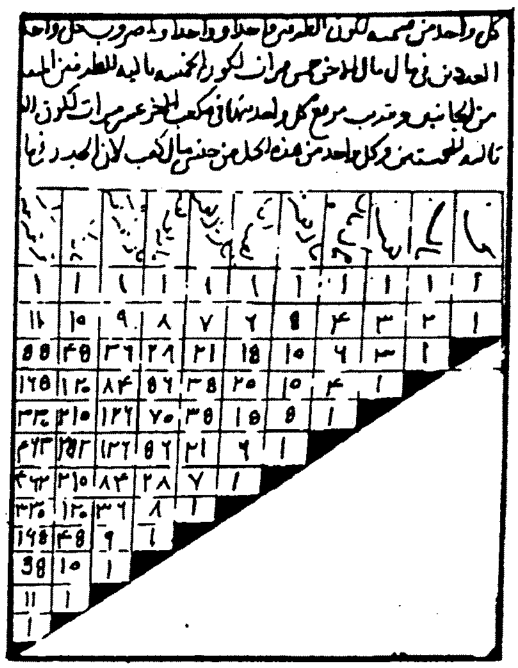
1 6 15 20 15 6 1

PASCAL n'est pour rien dans son invention puisque ce triangle est connu des arabes au moins depuis le XI^e siècle comme l'atteste l'œuvre d'AL-KARAJI et est connu des chinois depuis au moins 1303 où on le trouve dans le traité de ZHU SHI JIE (prononcez Tchou chi k'ié)

Le miroir de jade des quatre éléments.



Page extraite de l'ouvrage publié en 1303 par Zhu Shi Jie



Page extraite d'un manuscrit arabe du XII^e siècle

En fait les propriétés de ce triangle sont bien connues, par exemple – la somme des termes de chaque ligne est le double de la somme des termes de la ligne précédente –, ou bien – la somme alternée des termes d'une ligne est nulle–,… Mais, jusqu'à l'époque de Pascal, aucune démonstration rigoureuse de ces faits n'avait été donnée ; on se contentait de remarquer que ça marchait !

Or ce tableau triangulaire va prendre beaucoup d'importance car outre son intérêt en arithmétique pour le calcul des puissances de (a + b), il apparaît dans le calcul des probabilités qui naît à l'époque de Pascal, essentiellement à travers l'échange de correspondance que celui-ci aura avec Fermat à propos du problème posé par le Chevalier de MERE[6].

L'apport de Pascal est décisif pour deux raisons : d'une part il montre l'utilité de ce triangle en dehors de l'arithmétique, d'autre part il va démontrer toutes les propriétés connues à son époque[7] et cela grâce au raisonnement par récurrence qu'il invente, sans doute au cours du seul mois d'août 1654 quand il rédige le *Traité du triangle arithmétique*. Pascal appelle sa méthode **induction**, mais on prendra garde de confondre avec les autres acceptions que les philosophes modernes donnent à ce mot. Il évite une infinité de raisonnement pour démontrer une infinité de propositions grâce au schéma suivant :

* la proposition $P(n)$ qui dépend de l'entier n est vraie pour $n = 1$;

* si la proposition $P(n)$ est vraie pour l'entier n alors elle est vraie pour le successeur $n + 1$;

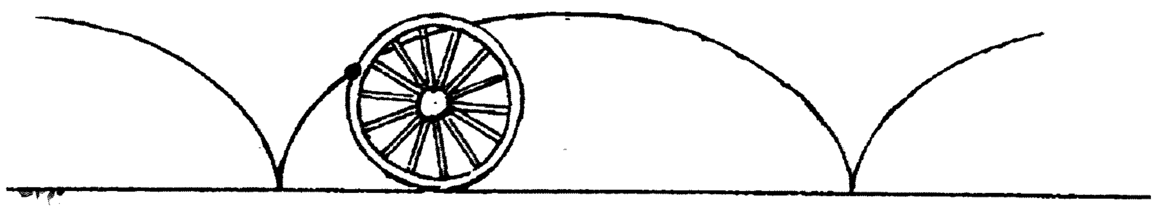
* la proposition $P(n)$ est alors vraie pour tout entier.

Il est donc naturel que le monde entier attribue depuis le nom de Pascal à ce triangle arithmétique.

3. La roulette et le calcul infinitésimal

C'est peut-être Cavalieri qui ouvre la voie du calcul infinitésimal avec son ouvrage en latin sur *La géométrie des continus indivisibles* (1635). Il y compare des longueurs, des aires ou des volumes infiniment petits. Pascal va rapidement exceller dans le calcul infinitésimal, maîtrisant parfaitement les ordres de grandeurs, mais il appliquera davantage sa pensée à ce que nous nommons le calcul intégral, plutôt que ce que nous nommons le calcul différentiel. Malgré l'usage d'une définition de la notion de fonction bien supérieure à celle de Descartes, Pascal ne parlera guère des tangentes (on disait *touchantes* à l'époque) mais calculera des aires, des volumes, des centres de gravité...

Sûr, peut-être même un peu trop sûr d'avoir mis au point une méthode générale lui permettant de résoudre toute une classe de problèmes, Pascal va lancer en juin 1658, dans l'anonymat le plus complet (ce qui prouve qu'il se méfie quand même), un concours sur la roulette avec une échéance au 1er octobre de la même année.



---

[6] Comment répartir la mise entre deux joueurs qui décident de se quitter sur un certain score sans aller jusqu'au bout du jeu. Ce problème est toujours présenté dans l'enseignement des probabilités aux élèves de lycée.

[7] Des propriétés assez simples sont encore découvertes de nos jours, par exemple par Gregor BERG en 1984 : "*Entdeckungen am Pascaldreieck*", ou par P. GOETGHELUCK en 1987 : "*Computing binomial coefficients*".

Au XVII^e^ siècle, tout le monde savant sait ce qu'est une roulette, même si certains l'appellent trochoïde ou cycloïde, mais c'est ce dernier nom qui survivra à l'époque moderne. La roulette ou cycloïde est tout simplement la trajectoire décrite par un clou fiché dans la roue d'un chariot quand celui-ci en avançant fait tourner celle-là.

Un jury a été réuni sous la présidence de CARCAVY (futur premier directeur de l'Académie des Sciences) qui a toute la confiance de Pascal qui lui a fait remettre les 40 + 20 pistoles correspondant aux deux prix mis au concours.

Seulement la roulette passionne ses contemporains ; tous la courtisent au point qu'on l'a surnommée « la belle Hélène de la géométrie » et Pascal est contraint de modifier, de préciser et d'affiner à plusieurs reprises les questions de son concours. Il apprendra en particulier que Roberval a répondu à certaines questions avant qu'il ne les pose, bien que Roberval n'ait rien publié sur le sujet (sans doute parce que ses travaux remontent à l'époque de la Fronde et qu'il s'est intéressé à d'autres thèmes par la suite). C'est Roberval qui a démontré que l'aire de l'arche de cycloïde vaut trois fois l'aire du cercle générateur.

Pascal devra admettre l'antériorité de Roberval. De plus c'est Wren qui calculera le premier la longueur de l'arche de cycloïde (quatre fois le diamètre du cercle générateur). Cependant Pascal gardera une courte avance sur ses concurrents malgré l'intense activité intellectuelle qu'il aura favorisée en cet été 1658.

Il pourra donc publier en octobre de la même année son *Histoire de la roulette* suivie en janvier 1659 par le *Traité général de la roulette*. Mais preuve que Pascal se méfie toujours, il publié sous le pseudonyme d'Amos DETTONVILLE[8] ce qui lui permettra de régler leur compte à deux mauvais joueurs: Wallis qui prétexte de son éloignement pour exiger un long délai supplémentaire et surtout le Père LALOUERE qui nonobstant ses calculs faux avait de plus le tort d'être jésuite !

Signalons que la cycloïde est à la fois la courbe brachystochrone[9] comme le montrera Bernoulli en 1696 et la courbe tautochrone[10] ce qui permettra à Huygens de construire son pendule cycloïdal en 1676 assurant ainsi la régularité de la marche des horloges sur les navires en mer.

Conclusion

Ce très, voir trop rapide survol, d'une partie de l'œuvre scientifique et mathématique de Pascal aura, espérons-le, montré combien il existe d'aspects méconnus dans les écrits d'un homme illustre.

Chaque époque se construit sa culture. La nôtre se veut au carrefour de l'humanisme, des sciences et des techniques. Depuis une quinzaine d'années, la culture scientifique, grâce au développement des musées, a acquis droit de cité. N'oublions pas la culture n'est pas ce qui reste quand on a tout oublié mais tout simplement la capacité à s'adapter à la société et au monde qui se fait, pour être armés à s'adapter au monde de demain.

[8] Les connaisseurs y retrouveront l'anagramme de LOUIS DE MONTALTE, l'auteur des Provinciales.

[9] Ce qui veut dire que c'est le long d'une cycloïde retournée que doit se mouvoir un point pour mettre le temps le plus bref pour aller de A en B.

[10] Ce qui veut dire que quel que soit le lieu de départ d'un point mobile le long d'une cycloïde retournée, il met le même temps pour aller jusqu'au fond.

Terminons sur un sujet d'actualité : il s'agit des recherches sur le chaos et plus particulièrement sur ce que l'on appelle l'***effet papillon*** : le battement des ailes d'un papillon quelque part au Mexique influe sur le temps en Europe quelques semaines ou mois plus tard. Dans ses pensées Pascal écrit : **« Le nez de Cléopâtre, s'il eut été plus court, toute la face de la Terre aurait été changée »**[11]. Voyons le commentaire qu'en a fait le mathématicien Ivar EKELAND[12] : « Si la flotte d'Antoine se débande à la bataille d'Actium, alors que la victoire était à sa portée, c'est qu'on voit le vaisseau amiral fuir le champ de bataille, à la poursuite de la galère de Cléopâtre qui abandonne un combat trop rude. Un monde romain où Antoine aurait régné plutôt qu'Auguste aurait-il été fort différent ? On peut en douter, mais on peut estimer aussi que la floraison intellectuelle qui a marqué le siècle d'Auguste était très liée à la personnalité de celui-ci et de son ami Mécène, et que, sans cet accident, nous n'aurions aujourd'hui ni Virgile, ni Horace, ni tant d'autres créateurs qui ont profondément marqué notre civilisation ». Ce qui nous ramène à la culture classique !

4. Bibliographie

L'œuvre scientifique de Pascal, Préface de René TATON (PUF) 1964.

Histoire universelle des chiffres, G. IFRAH (Seghers).

Nombre, mesure et continu Épistémologie et histoire, Jean DHOMBRES (Cédic).

La démonstration mathématique dans l'histoire I.R.E.M. de Lyon

Panorama de la culture scientifique, technique et industrielle en Alsace, 1989 (Cestim)

Au hasard, Ivar EKELAND (Seuil).

[11] *Pensées*, fragment 180.

[12] Dans *Au hasard : la science, la chance et le monde* aux éditions du Seuil. Ivar EKELAND reçut le prix D'ALEMBERT de vulgarisation mathématique pour cet ouvrage.