POINT DE CLIFFORD

VOULEZ-VOUS DES CERCLES ?
Claude COMPARON & Roland VOLTZ

1. Historique de la réalisation de la figure

— 1971 : Exercice donné par M. Claude MITCHI dans le cadre de l'enseignement de la géométrie en licence.

— Enseignant en collège, j'ai élaboré des sujets de dessins « autocorrectifs » basés sur des théorèmes de géométrie de niveau bac-deug-licence. Je me suis attaqué en vain au dessin menant au point de Clifford.

— 1998 : Rencontre avec un parent d'élève, M. Roland VOLTZ, informaticien et chef de personnel. Nous avons sympathisé, et un jour je lui ai proposé de s'attaquer à la réalisation de la construction du **point de Clifford** (nous avons, sans résultat, recherché sur INTERNET et interrogé des personnes pour savoir si quelqu'un avait déjà vu concrètement ce fameux **point de Clifford**).

— 1999 : Réalisation effective de cette figure, avec intégration d'une image (portrait du mathématicien William CLIFFORD) et d'un texte ; cette figure a été réalisée avec *Autocad 2000*. Un tableau (avec encadrement en bois massif et protection en plexiglas spécial) au format A0 a été offert au collège de Vendenheim.

— 2001 : En souvenir des TD très pédagogiques dispensés par Claude MITCHI, j'ai pensé à lui offrir un exemplaire de ce dessin.

Invité par un professeur à écrire un article sur ce sujet, je confie donc ces quelques lignes et un fichier de ce dessin au format JPEG à L'OUVERT.

Roland VOLTZ et moi-même espérons que ce dessin suscite de l'intérêt pour ce type de construction.

2. Ouvertures possibles

— Continuer cette figure en ajoutant une droite supplémentaire, donc récupérer sept points de Clifford et vérifier s'ils sont situés sur un même cercle.

— Ce problème de [points cocycliques / cercles concourants] forme une chaîne infinie de théorèmes. La démonstration se fait par récurrence.

— C'est CLIFFORD qui, le premier, a montré cette propriété générale en utilisant sa "*Geometric Algebra*".

— Terminer la démonstration « élémentaire » proposée dans les pages suivantes.

Avis aux amateurs, aux bidouilleurs et aux chercheurs.

3. Démonstration élémentaire

1. Cercles de Miguel
2. Cercles de Céva
3. Centre optique d'un quadrilatère complet
4. Cercle de Miguel de 5 droites
5. Point de Clifford

1. Cercles de Miguel

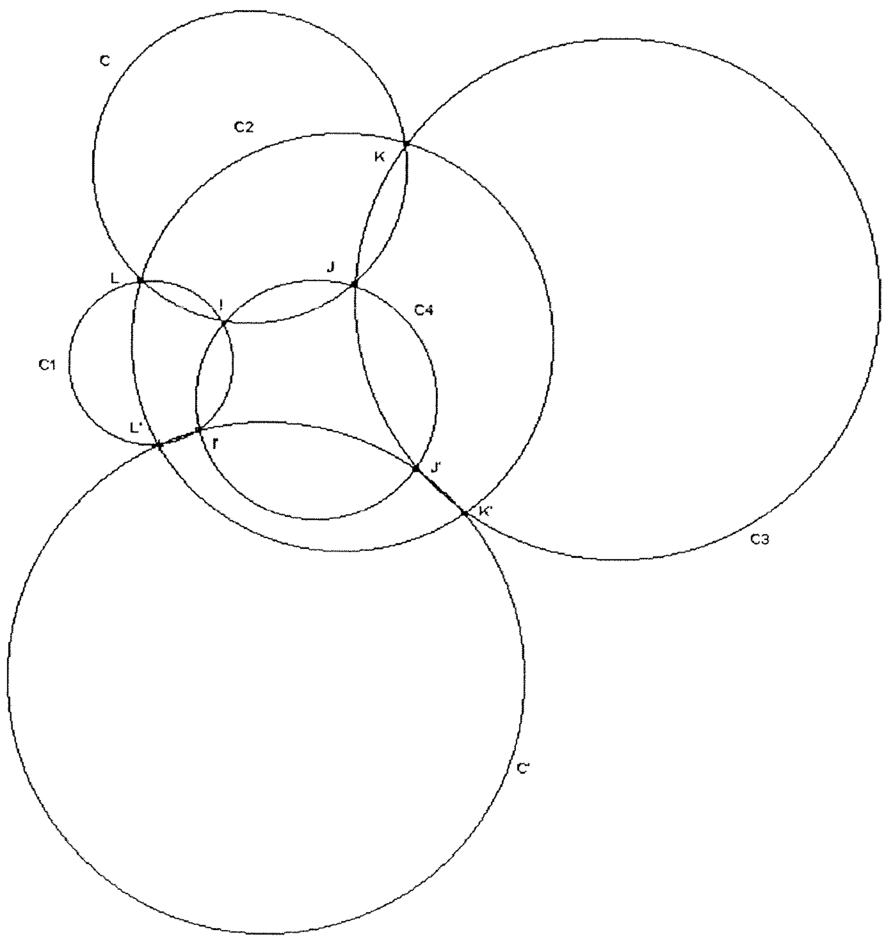
Hypothèses

I, J, K, L	cocycliques sur C ;
I, I', J, J'	cocycliques sur C4 ;
J, J', K, K'	cocycliques sur C3 ;
K, K', L, L'	cocycliques sur C2 ;
L, L', I, I'	cocycliques sur C1.

Conclusion

I', J', K', L' cocycliques sur un cercle C'.

Figure



Théorème

Soient 4 cercles C1, C2, C3, C4, L et L' les intersections de C1 et C2, K et K' celles de C2 et C3, J et J' celles de C3 et C4, enfin I et I' celles de C4 et C1.
Si quatre points choisis respectivement dans les intersections des Ci et Cj sont cocycliques, alors les quatre points restant le sont aussi.

Démonstration

$$\begin{aligned}
(L'I',L'K') &\equiv (L'I',L'L) + (L'L,L'K') \ [\pi] \\
&\equiv (I\,I',IL) + (KL,KK') \ [\pi] \\
&\equiv (I\,I',IJ) + (IJ,IL) + (KL,KJ) + (KJ,KK') \ [\pi] \\
&\equiv (J'I',J'J) + (J'J,J'K') \ [\pi] \\
&\equiv (J'I',J'K') \ [\pi] \qquad \textit{cqfd}
\end{aligned}$$

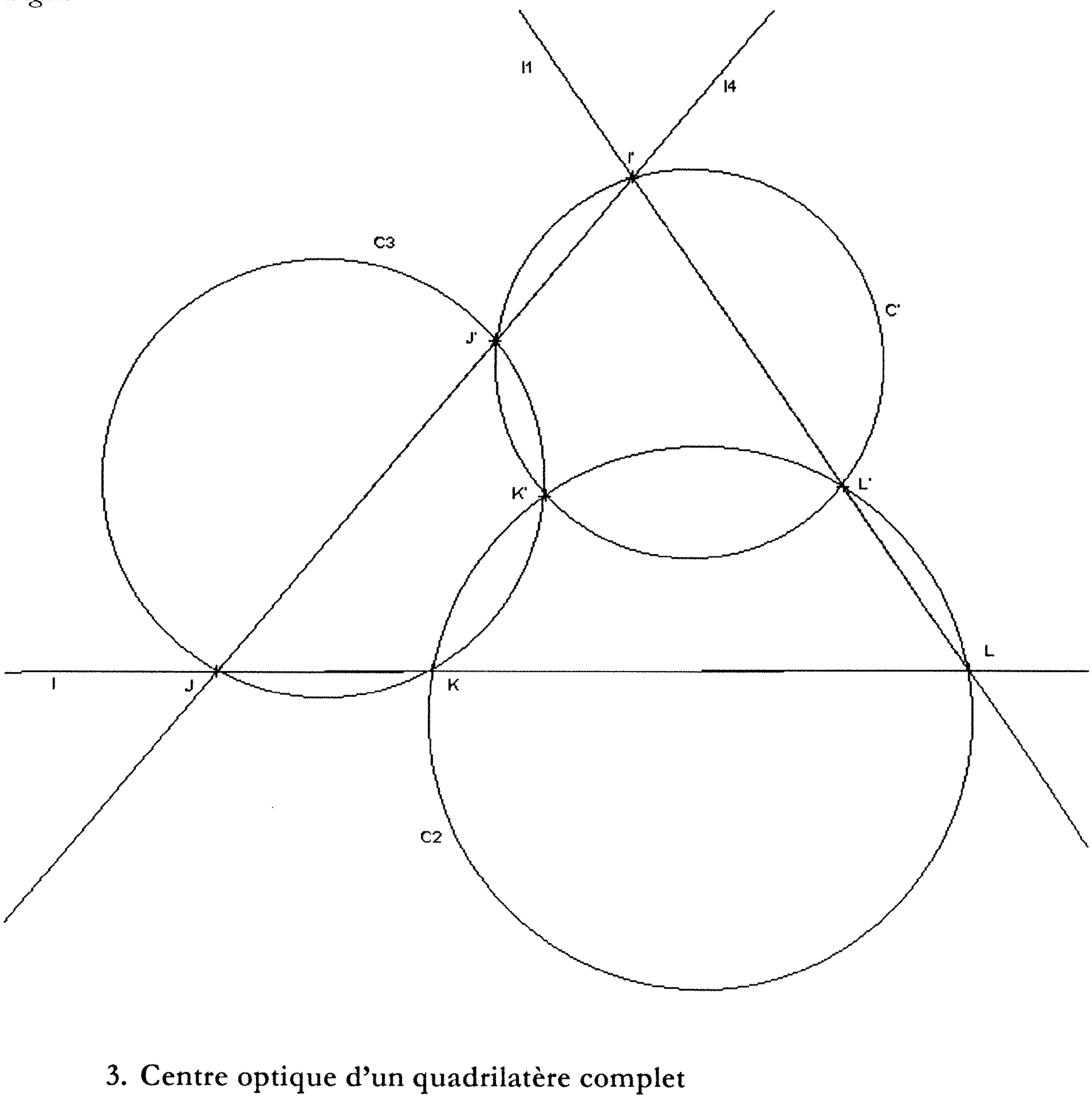
2. Cercles de Céva

On retrouve la configuration de Céva en envoyant, dans la configuration des cercles de Miguel, le point I à l'infini ; on obtient alors le *théorème de Céva* :

Hypothèses
(I),I',J',J alignés sur l4 ;
(I),I',L',L alignés sur l1;
(I),J,K,L alignés sur l ;
J,J',K,K' cocycliques sur C3 ;
K,K',L,L' cocycliques sur C2.

Conclusion
I', J', K', L' cocycliques sur un cercle C'.

Figure



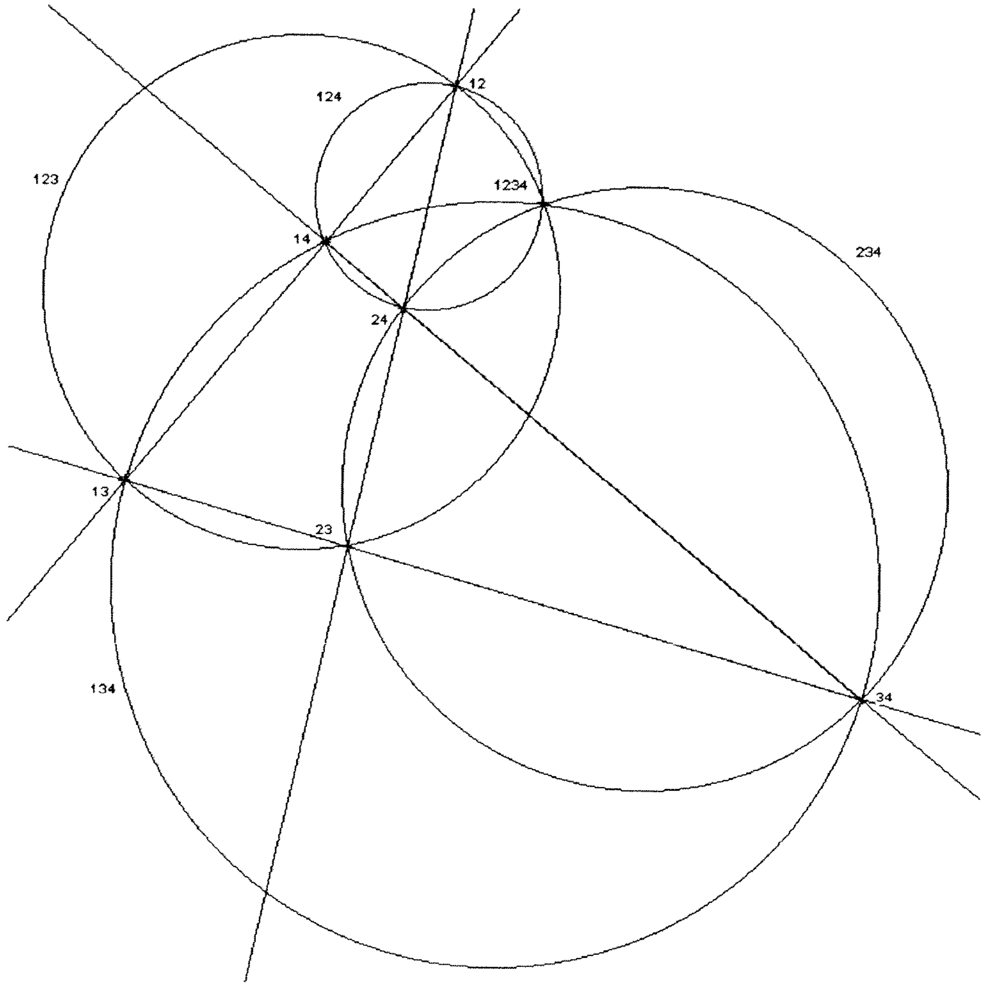
3. Centre optique d'un quadrilatère complet

Théorème du centre optique

Étant données quatre droites 1, 2, 3 et 4, elles forment quatre triangles dont les cercles circonscrits sont 123, 124, 134 et 234.

Alors les cercles 123, 124, 134 et 234 sont sécants en un point 1234.

Figure



Démonstration

Primo, voyons l'intersection des cercles 124, 134 et 234.

Dans le triangle 123, puisque 34 ∈ 3 et 24 ∈ 2 et 14 ∈ 1, d'après la configuration de Céva, les cercles 124 (passant par 12, 14, 24), 134 (passant par 13, 14, 34), 234 (passant par 23, 24, 34), sont sécants en un point I.

Secundo, voyons l'intersection des cercles 124, 134 et 123.

Dans le triangle 234, puisque 14 ∈ 4 et 13 ∈ 3 et 12 ∈ 2, d'après la configuration de Céva, les cercles 124 (passant par 24, 14, 12), 134 (passant par 34, 13, 14), 123 (passant par 23, 12, 13), sont sécants en un point J.

Tertio, comme I et J sont intersection de 124 et 134 autre que 14, on a I=J (= 1234).

4. Cercle de Miguel de 5 droites

Théorème

Cinq droites 1, 2, 3, 4 et 5 forment cinq quadrilatères complets auxquels correspondent cinq centres optiques du type ijkl où i, j, k, l ∈ {1, 2, 3, 4, 5} qui sont cocycliques (sur un cercle 12345).

Démonstration Primo le théorème des cercles de Miguel appliqué aux cercles 123, 134, 145 et 125, sachant que

$$123 \cap 134 = \{13\,;1234\} \quad 134 \cap 145 = \{14\,;1345\}$$
$$145 \cap 125 = \{15\,;1245\} \quad 125 \cap 123 = \{12\,;1235\},$$

permet de dire que, comme 12, 13, 14 et 15 sont alignés, 1234, 1345, 1245 et 1235 sont cocycliques sur 1345.

Secondo le théorème des cercles de Miguel appliqué aux cercles 234, 245, 215 et 213, sachant que

$234 \cap 245 = \{24 ;2345\}$ $245 \cap 215 = \{25 ;2145\}$

$215 \cap 213 = \{21 ;2135\}$ $213 \cap 234 = \{23 ;2134\}$

permet de dire que, comme 23, 24, 25 et 21 sont alignés, 2134, 2345, 2145 et 2135 sont cocycliques sur 1345.

En conséquence 1234, 1235, 1245, 1345 et 2345 sont cocycliques sur un cercle 12345.

5. Point de Clifford

Théorème

Six droites 1, 2, 3, 4, 5 et 6 fournissent six cercles de Miguel du type ijklm où i, j, k, l, m $\in \{1,2,3,4,5,6\}$ qui passent par un même point (123456).

Démonstration

Appliquons le théorème des cercles de Miguel à 1356, 356, 456 et 1456.
D'après le théorème du centre optique et le théorème du cercle de Miguel de cinq droites $12356 \cap 3564 = \{2356 ;1356\}$ $356 \cap 456 = \{56 ;3456\}$

$456 \cap 12456 = \{2456 ;1456\}$ $1456 \cap 12356 = \{1256 ; \Omega\}$

Montrons que $\Omega \in 13456$ et $\Omega \in 23456$.

Comme 2356, 56, 2456 et 1256 $\in 256$; d'après le théorème des cercles de Miguel, il vient : 1356, 3456, 1456 et Ω sont cocycliques, d'où $\Omega \in 13456$ par théorème des cinq droites de Miguel ;

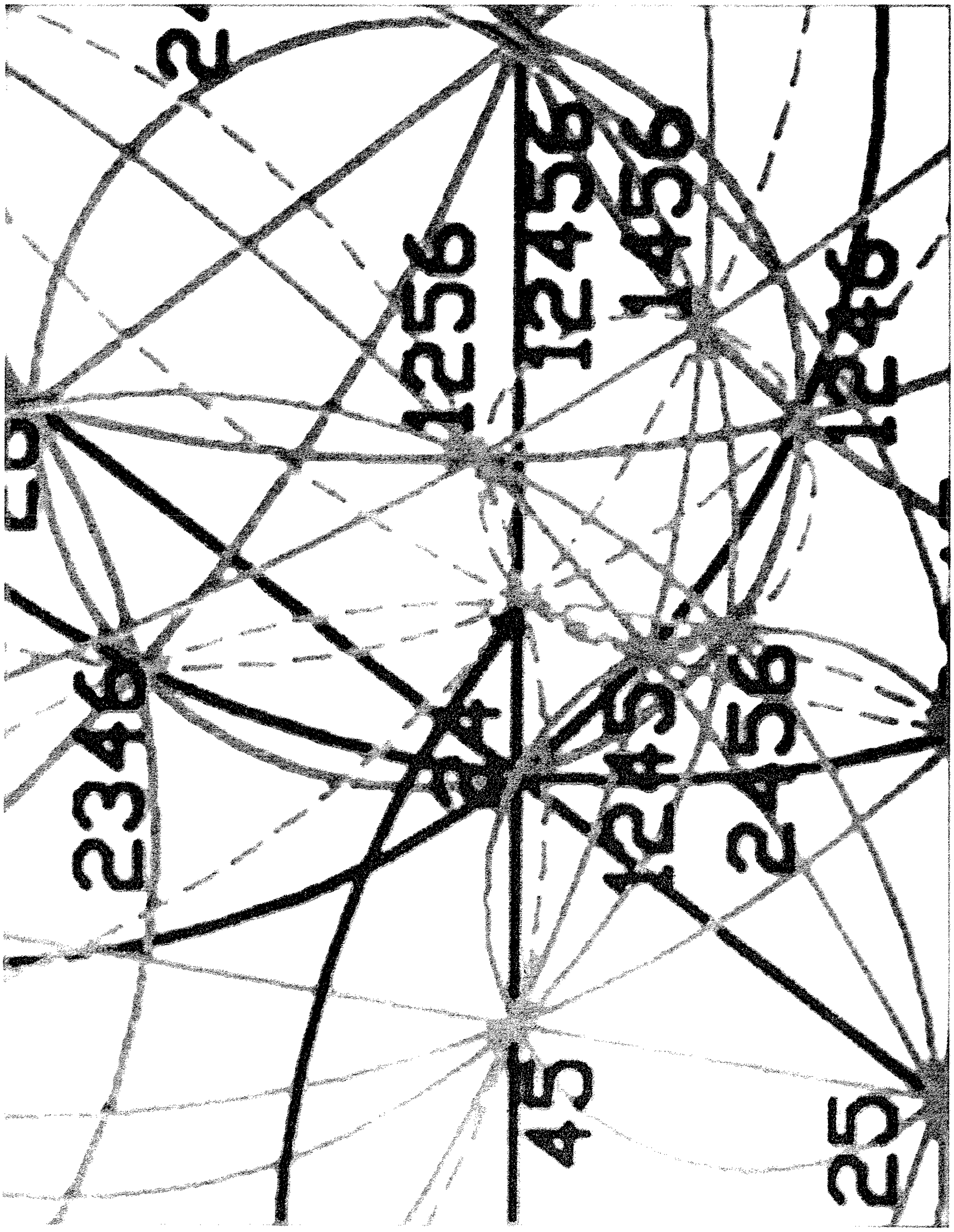
Comme 1356, 56, 1456 et 1256 $\in 156$; d'après le théorème des cercles de Miguel, il vient : 2356, 3456, 2456 et Ω sont cocycliques, d'où $\Omega \in 23456$ par théorème des cinq droites de Miguel.

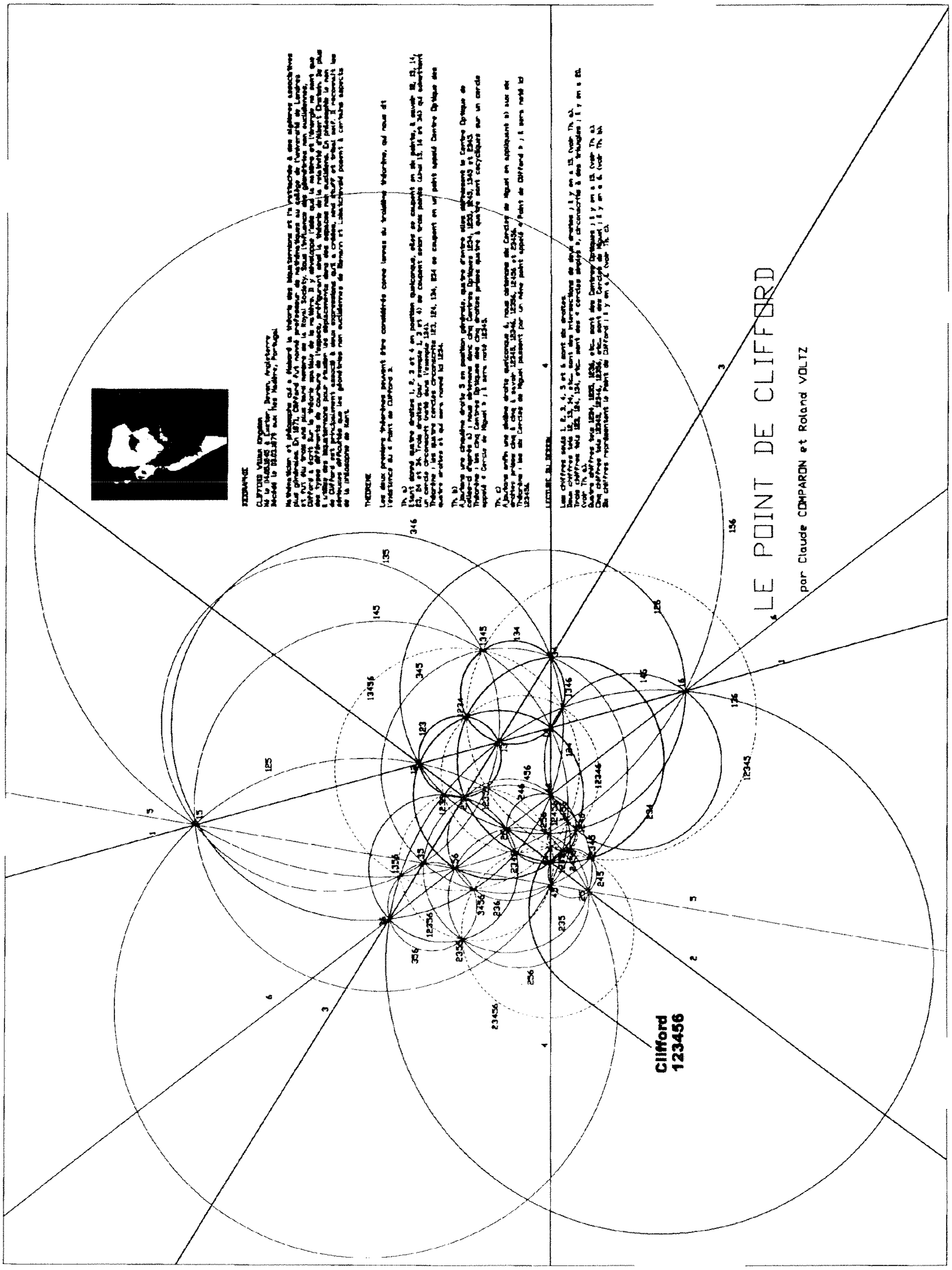
On montrerait de même que $\Omega \in 12456$ et ainsi de suite, ce qui montre que tous les cercles du type ijklm passent par un même point 123456 dit **point de Clifford**.

Bibliographie

BERGER : *Problèmes de géométrie*, Éd. CÉDIC (1982)

Détail




LE POINT DE CLIFFORD
par Claude COMPARON et Roland VOLTZ
Clifford
123456