

# LA DÉMONSTRATION

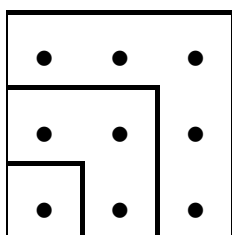
Alain CHAUVÉ

## 1. L'exigence platonicienne

L'exigence de démonstration apparaît avec les mathématiques. L'idée de mathématiques elle-même prend forme lorsque Platon distingue et sépare les choses mathématiques elles-mêmes des choses « visibles », concrètes, sur lesquelles on effectue des calculs ou des constructions. Les points, les lignes, les plans, les angles, les nombres ne nous sont pas donnés comme le sont des hommes, des animaux ou des arbres. Ce ne sont pas des choses concrètes que l'on peut observer ici ou là, que l'on peut décrire et dont on peut constater les propriétés. Nous ne pouvons que les concevoir, les saisir par la pensée (la « *dianoia* »). En séparant les choses visibles des choses intelligibles et invisibles, Platon assigne une nouvelle tâche aux mathématiciens.

Jusque là, en effet, les mathématiciens face à un problème concret, comme, par exemple, le problème de Délos (la duplication du cube) cherchaient une solution en traçant des figures et en procédant à des constructions. Certes « sous » les figures tracées, un carré, par exemple, ils considéraient le « carré en soi » qui est le « modèle invisible » de la figure, l'« hypothèse ». Ils « supposaient » sous les choses visibles quelque chose d'invisible et d'intelligible mais toujours en procédant à des constructions ou à des calculs effectués sur des choses visibles qui servent à représenter cet invisible : nombres et objets géométriques. Il ne s'agissait pas encore de démonstrations mais de procédés de construction ou de calcul que les mathématiciens mettaient en œuvre un peu empiriquement sur les figures qu'on trace ou sur les choses qu'on dénombre pour faire apparaître des propriétés mathématiques.

Par exemple, pour montrer que la somme des nombres impairs donne les carrés successifs, les Pythagoriciens se servaient du « *gnomon* », c'est-à-dire de cailloux disposés en équerre pour former des carrés successifs :

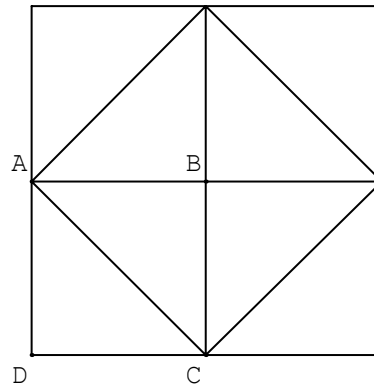


$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

etc.

En géométrie, on se souvient de l'exemple donné dans le *Ménon* de la duplication du carré. Il suffit de construire sur la diagonale d'un carré ABCD le carré qui a pour côté cette diagonale et de compter les triangles égaux qui composent la surface des carrés pour s'assurer que le carré qui a pour côté la diagonale a bien une surface égale au double de celle du carré dont c'est la diagonale.



C'est en songeant à ces procédés que Platon exprime une exigence nouvelle en *République* VII, 527a : reformuler le discours dans lequel on parle des choses mathématiques et raisonne sur elles. On ne peut plus parler de ces choses comme on parle de choses concrètes :

*« Aucun de ceux qui savent un peu de géométrie ne nous contestera que la nature de cette science est directement opposée au langage qu'emploient ceux qui la pratiquent. Ce langage, assurément, est fort ridicule et méprisable ; car c'est en homme de pratique, ayant en vue des applications, qu'ils parlent de carrer, de construire sur une ligne, d'ajouter et qu'ils utilisent partout des expressions de ce genre alors que cette science tout entière n'a d'autre objet que la connaissance. »*

Dès l'instant où il est apparu que les choses mathématiques devaient être séparées des choses visibles apparaît aussi l'exigence de faire passer au premier plan ces choses mathématiques toujours « supposées » à l'arrière-plan des figures qu'on trace ou des cailloux que l'on compte pour avoir enfin affaire au « carré en soi », à la « diagonale en soi », etc., et pour les considérer eux-mêmes. Apparaît alors en même temps l'idée qu'il faudrait développer une autre sorte de discours qu'il faudra expliciter et dont il faudra codifier les formes et les enchaînements d'expressions, c'est-à-dire la syntaxe, qui ne seront plus celles d'un discours où l'on exprime des opérations concrètes de construction ou de calcul : comment faudra-t-il exprimer ce qu'est un point, une ligne et leurs propriétés ? En faisant passer au premier plan les choses mathématiques, on fait passer au premier plan le discours mathématique.

On voit la difficulté : il faut se rendre capable d'apercevoir l'intelligible et d'en parler autrement qu'à travers des figures et des constructions ou des calculs. Mais comment se passer de figures qu'on trace ou de choses que l'on compte en continuant néanmoins à effectuer des constructions et des calculs ? Pour répondre à l'exigence platonicienne et élaborer un discours proprement mathématique il faudra répondre à deux conditions :

1/ abstraire les procédés de construction et de dénombrement des représentations trop concrètes et empiriques de lignes qu'on trace ou de cailloux que l'on compte. Il faudra épurer le discours de tout ce qui exprime des activités concrètes de calcul ou de construction.

2/ rapporter ces procédés abstraits à des règles générales qui peuvent s'imposer comme universellement valides. Ces procédés, en effet, présupposent des règles générales qui les fondent et qu'il faudra expliciter.

C'est en suivant cette voie que des considérations philosophiques vont se trouver impliquées dans l'élaboration et la constitution d'une théorie mathématique conçue comme un discours où l'on exprime des propriétés mathématiques et où l'on raisonne sur ces propriétés.

## 2. Comment le système d'Euclide répond à l'exigence platonicienne

Euclide est le fondateur d'une école de mathématiciens à Alexandrie, sous Ptolémée I, vers 300 av. J.C. Les historiens des sciences soulignent sa dette à l'égard d'Eudoxe qui fréquentait, avec Aristote, l'Académie de Platon. C'est avec Euclide, héritier d'Eudoxe, qu'on détache nettement les mathématiques des opérations concrètes d'arpentage ou de calcul et que l'on s'efforce de considérer les propriétés des figures et de leurs éléments (points, droites, plans, etc.) en elles-mêmes. On détache la géométrie des représentations empiriques de figures qu'on trace et sur lesquelles on procède à des constructions.

Euclide met en place un système déductif où l'on ne se contente plus de supposer, sous les figures et les constructions, des choses géométriques, mais où il s'agit de se donner la possibilité d'exprimer de façon purement mathématique les choses que conçoit le géomètre et d'explicitier les règles de la syntaxe du discours sur ces choses, de manière à pouvoir enchaîner déductivement les énoncés, les tirer les uns des autres et les établir les uns à partir des autres. Apparaît ainsi la possibilité de la démonstration ; apparaît aussi sa nécessité : il faudra démontrer ce qui semble pourtant lié à l'évidence d'une représentation ; par exemple, que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre.

La construction d'un tel système gouverné par la syntaxe d'un discours mathématique repose sur une distinction fondamentale. Il y a d'un côté les *raisonnements* qu'on tient et qui obéissent aux règles de la syntaxe logique du discours, il y a d'un autre côté les *choses* sur lesquelles on raisonne avec leurs propriétés et les lois auxquelles elles obéissent. D'un côté, il y a les « axiomes » (*axiomata*), d'un autre côté, il y a les « définitions » (*horoi*) et les « postulats » (*aitèmata*).

Les **axiomes**. C'est Aristote qui en avait clairement fixé la nature et la fonction. Il les avait appelés aussi « notions communes » (*koinai doxai*). Euclide reprend cette conception et cette appellation. Ce sont les principes « à l'aide desquels a lieu la démonstration » (Aristote, *Seconds Analytiques*, I, 32) et qu'il ne faut pas confondre avec les principes à partir desquels on démontre quelque chose. Il s'agit des règles de raisonnement. Les axiomes relèvent tous du principe de contradiction : « Il est impossible que l'affirmation et la négation soient vraies et fausses en même temps » (Aristote, *Métaphysique*, Γ 3). Ce principe est le principe suprême, ultime : « toute démonstration se ramène à ce principe comme à son ultime vérité » (ibid.). Aristote expliquait que ce principe ne concerne pas un certain « genre » de choses mais qu'il a une valeur universelle. Il exprime sous une forme générale une règle de raisonnement qui s'impose à chaque science sous une forme particulière et qu'elle doit respecter dans son domaine propre. Les axiomes d'une science expriment « analogiquement », comme dit Aristote, c'est-à-dire dans un domaine particulier d'objets – celui des grandeurs dans le cas de la géométrie, par exemple – ce que le principe de contradiction exprime de

façon générale pour toute chose, pour « tout être en tant qu'être ». Dans cet esprit, Euclide formule 9 axiomes qui expriment l'exigence de non contradiction dans le domaine géométrique des grandeurs. Par exemple, « si, de choses égales, on ôte des choses égales, les restes sont égaux » (c'est la formulation d'Aristote, *Seconds Analytiques*, I, 10), ou encore le fameux « le tout est plus grand que la partie ».

Les **définitions** et les **postulats**. Ils constituent ce qu'Aristote avait appelé les « principes propres ». Dans les définitions, Euclide s'efforce d'exprimer dans un langage abstrait les choses mathématiques élémentaires – le point, la droite, etc. –, avec lesquelles on pourra exprimer de façon abstraite les figures géométriques. Considérons, par exemple, la définition du point : « le point est ce qui n'a pas de parties ». A l'évidence, Euclide cherche à dire ce qu'est le point géométrique en évitant d'avoir recours à une image, celle d'un grain de sable ou d'un minuscule caillou, par exemple. Il utilise des termes qui veulent évoquer une chose abstraite, la monade, dont il n'y a pas d'image sensible. Euclide a voulu reformuler abstraitement les expressions utilisées par les géomètres qui évoquaient des images sensibles de constructions et de figures qu'on trace. Par exemple encore, l'étrange définition de la droite – « la ligne qui repose également en tous ses points » (ou « qui est interposée également entre ses points ») – s'explique si l'on songe à l'architecte qui utilise un instrument de visée pour s'assurer qu'un alignement, celui d'un mur, par exemple, est parfaitement rectiligne.

Cependant, si les choses mathématiques, le point, la ligne, etc. reçoivent une définition abstraite, celle-ci reste purement nominale. De telles définitions nous disent ce que signifient droite, point, ligne, en nous disant seulement comment les concevoir sans image sensible, mais on ne peut rien faire de ces définitions. On ne sait comment les utiliser pour construire les objets géométriques. Il faudrait alors donner des définitions « réelles » qui explicitent comment ces choses mathématiques sont obtenues et construites intellectuellement. Il faudrait, par exemple, définir le point par l'intersection de deux droites. Ou encore, lorsque, par exemple, on définit le cercle comme une figure plane enfermée par une courbe telle que tous ses points sont à égale distance d'un point fixe appelé centre, on ne dit pas comment construire un cercle. La définition réelle est dans la construction abstraite : une figure obtenue par la rotation d'un segment de droite autour d'une de ses extrémités qui reste fixe.

Dès lors, il faut chercher les vraies définitions dans les postulats qui énoncent des règles de construction, règles fondamentales et générales qui norment tous les procédés de constructions. Hobbes avait dit fort justement que « ce qu'on appelle postulats et demandes sont certes réellement des principes, non pas cependant de démonstration mais de construction » (*De Corpore*, VI, 13). Que demande Euclide ? Qu'on puisse utiliser la règle et le compas. D'où les trois premiers postulats :

- 1/ « de tout point à tout point mener une droite » (tracer une droite avec une règle) ;
- 2/ « prolonger d'un trait continu [et un seul !] toute droite limitée dans sa direction » (prolonger une droite, de sorte que « deux droites n'ont pas de partie commune ») ;
- 3/ « d'un point quelconque, décrire un cercle de rayon quelconque » (utiliser le compas).

Ces trois postulats figurent en tête des *Éléments* avec les définitions et marquent bien le souci de s'exprimer avec exactitude plutôt que de se rapporter à une figure. Il y a en outre deux autres postulats :

4/ – « tous les angles droits sont égaux entre eux » ;

5/ – « si une ligne droite qui en coupe deux autres forme d'un même côté avec ces droites des angles internes dont la somme est inférieure à deux droits, les deux lignes ou leur prolongement se couperont du côté où la somme des angles est inférieure à deux droits ».

Ces postulats 4/ et 5/ interviennent inopinément dans le cours d'une démonstration. Sans eux, il faudrait, dans cette démonstration, s'en tenir à constater ce qui se passe sur les figures que l'on construit. Au lieu de s'en remettre à ce qu'on voit sur les figures qu'on trace et qui semble évident, on explicite sous la forme d'une règle générale, qu'on énonce, ce qui se passe quand on trace des figures. On explicite la règle qui se cache sous les évidences de la figure. Par exemple, l'évidence du parallélisme de deux droites relève d'une règle de construction qui n'a rien d'évident et que le postulat 5/ énonce d'une façon qui n'est pas immédiatement claire et visible. Il ne faut surtout pas considérer que les postulats énoncent des évidences. C'est au contraire parce que ce qu'ils disent n'est pas évident qu'on est obligé de le dire et qu'il serait possible de le nier. Ils ne s'imposent pas par leur évidence ; ils s'imposent quand on veut démontrer géométriquement, c'est-à-dire quand on veut non pas s'en tenir à ce qu'on voit sur les figures ou à des suppositions et des conventions évidentes, mais quand on veut s'en remettre aux règles qu'il y a dans ces évidences et ces suppositions, les règles qui autorisent les constructions et qu'il faut énoncer rigoureusement et exactement.

Euclide a ainsi édifié une théorie mathématique où l'objet de la géométrie n'est plus les points, les lignes, les plans, etc., mais les propriétés et les lois des grandeurs constructibles à la règle et au compas dans l'espace. Il ne s'agit plus d'apercevoir des objets, même abstraits, mais d'effectuer des opérations et des constructions sur des grandeurs et des figures dans l'espace. On est ainsi passé de la considération des figures dans lesquelles on voyait l'image de choses géométriques à la considération des façons de construire des figures dans l'espace et de raisonner sur des grandeurs. Les postulats sont les règles qui explicitent les possibilités de constructions qui y sont autorisées et qui nous autorisent à nous représenter des points, des droites, des angles, etc., avec lesquels nous construisons des triangles, des carrés, des cercles, etc. Les axiomes explicitent les règles des raisonnements qu'on peut tenir sur les grandeurs qu'on construit. Les démonstrations font appel à ces règles qui expriment abstraitement et en général les possibilités d'effectuer des constructions avec des points, des lignes, etc. Elles les expriment abstraitement : elles ne parlent pas de la manière d'utiliser un compas ou de tirer un trait avec une règle ou une équerre. Elles les expriment en général : elles n'indiquent pas quel procédé de construction il faut utiliser ; c'est le géomètre qui doit trouver ce qu'il faut construire pour résoudre un problème : tracer, par exemple, une parallèle pour montrer que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.

### 3. Kant et l'interprétation philosophique de la démonstration

En donnant une réponse de type euclidien à l'exigence platonicienne d'un discours proprement et rigoureusement conforme au caractère abstrait des choses mathématiques, on fait surgir une question de type philosophique. A partir du moment où l'on fait passer au premier plan les règles ou lois de la géométrie, une question se pose inévitablement : d'où viennent-elles ? D'où tenons-nous cette possibilité de considérer des grandeurs et de les construire ? Poser cette question c'est considérer qu'au-delà des règles de construction, il y a plus fondamentalement des règles universelles et nécessaires qui fondent la possibilité de se donner des axiomes et des postulats qui norment toute construction géométrique.

C'est dans cette direction que s'oriente la réflexion kantienne sur la démonstration dans les mathématiques : sur quoi se fondent les lois de la géométrie qu'expriment les axiomes et les postulats ? Kant commence par préciser ce qu'il faut entendre par démonstration : « Seule une preuve apodictique, en tant qu'elle est intuitive, peut s'appeler démonstration »<sup>1</sup>. Il s'agit d'une preuve dont on est certain *a priori*, qui est irrécusable et qui s'impose nécessairement à tous. Le terme important qui donne la clé de ce caractère apodictique est le mot « intuitive ». La démonstration est une preuve apodictique parce qu'elle est intuitive et qu'elle n'est pas purement conceptuelle, c'est-à-dire purement logique : sa certitude n'est pas due à sa seule non contradiction. C'est pourquoi Kant soutient : « Il n'y a que les mathématiques qui contiennent des démonstrations, parce qu'elles ne dérivent pas leurs connaissances de concepts, mais de la construction de concepts, c'est-à-dire de l'intuition qui peut être donnée *a priori* comme correspondant aux concepts »<sup>2</sup>. Procéder à des constructions, c'est faire appel à l'intuition : « construire un concept c'est représenter *a priori* l'intuition qui lui correspond »<sup>3</sup>. Et Kant donne l'exemple de la démonstration de la somme des angles d'un triangle<sup>4</sup>. Il y a bien d'un côté le concept de triangle, c'est-à-dire sa définition pure et simple, et, de l'autre côté, une intuition, c'est-à-dire une représentation obtenue par une construction. Cette représentation n'est certes pas empirique ; ce n'est pas celle du dessin qu'on fait sur le papier et dont il faudrait examiner empiriquement les

---

<sup>1</sup> *Critique de la Raison pure*, Théorie transcendantale de la méthode, ch. I, 1<sup>re</sup> section.

<sup>2</sup> *ibid.*

<sup>3</sup> *ibid.*

<sup>4</sup> *ibid.* *Que l'on donne à un philosophe le concept d'un triangle et qu'on le charge de trouver à sa manière quel peut être le rapport de ses angles avec l'angle droit. Tout ce qu'il a, c'est le concept d'une figure renfermée entre trois lignes droites et, dans cette figure, le concept d'un égal nombre d'angles. Il aura beau réfléchir, tant qu'il voudra, sur ce concept, il n'en fera sortir rien de nouveau. Il peut analyser et rendre clair le concept de la ligne droite, ou celui d'un angle, ou celui du nombre trois, mais non pas arriver à d'autres propriétés qui ne sont pas du tout contenues dans ces concepts. Mais que le géomètre s'empare de cette question. Il commence aussitôt par construire un triangle. Sachant que deux angles droits pris ensemble valent autant que tous les angles contigus qui peuvent être tracés d'un point pris sur une ligne droite, il prolonge un côté de son triangle et obtient deux angles contigus dont la somme égale deux droits. Il partage ensuite l'angle externe en traçant une ligne parallèle au côté opposé du triangle et voit qu'il en résulte un angle contigu qui est égal à un angle interne, etc. De cette manière, il arrive, par une chaîne de raisonnements, toujours guidés par l'intuition, à la solution parfaitement claire et en même temps générale de la question.*

Trad. Tremesaygues et Pacaud, P.U.F.

On soulignera dans ce passage les expressions « il prolonge », « il partage », « il voit », « toujours guidé par l'intuition ».

propriétés, en mesurant, par exemple, les angles pour constater qu'ils sont égaux à deux droits. Il s'agit d'une représentation que l'on ne doit qu'à une intuition pure qui gouverne les constructions que l'on peut faire dans l'espace. La définition du triangle n'est mathématique que si elle correspond à une règle de construction, et cette règle elle-même est rendue possible et nécessaire par des règles plus fondamentales, des règles de représentation dans une intuition pure, des règles constitutives de toute représentation.

Ainsi, du point de vue de Kant, les démonstrations font appel à des constructions de figures ; ces constructions à leur tour font appel à des règles qu'on a dégagées et explicitées à titre d'axiomes et de postulats – Kant cite : le tout est égal à lui-même ; le tout est plus grand que la partie ; deux lignes droites ne circonscrivent pas d'espace ; entre deux points on ne peut mener qu'une ligne droite, etc. Mais fondamentalement ces règles ne relèvent pas du pur raisonnement et de ses principes logiques ; elles relèvent d'un principe dit « mathématique » que Kant appelle « axiome de l'intuition » : « Toutes les intuitions sont des grandeurs extensives »<sup>5</sup>. Ce principe n'est pas lui-même un axiome des mathématiques ; il est le « fondement de la possibilité des axiomes » en vertu duquel « ces axiomes mêmes [...] ne sont admis dans la Mathématique que parce qu'ils peuvent être représentés dans l'intuition »<sup>6</sup>.

Parler de démonstration revient donc à dire que les propriétés des objets mathématiques ne sont accessibles que dans une intuition pure, de sorte que le géomètre doit au fond rapporter ces propriétés à des règles fondamentales qui gouvernent les procédures géométriques de construction. Ces règles sont celles de toute représentation. Elles sont les règles ultimes que nous impose une représentation dans une intuition pure. A ce titre, elles sont incontournables et irrécusables – apodictiques – lorsqu'on veut se représenter des objets mathématiques. La démonstration reste tributaire d'une intuition. Sans doute cette intuition n'a rien d'empirique. C'est une intuition pure à laquelle nous devons des représentations qui ne sont pas celles de choses concrètes. Elle commande des actes de représentation et elle est constitutive de nos facultés universelles de représentation. Néanmoins elle reste une intuition qui nous oblige à nous représenter les choses mathématiques et qui oblige les mathématiciens à se soumettre aux exigences fondamentales de la représentation. En ce sens, la démonstration ne serait qu'un instrument de représentation.

#### 4. Conclusion

Comment doit s'exprimer le mathématicien pour tenir un discours conforme à l'exigence platonicienne de séparation entre le sensible et l'abstraction mathématique afin de pouvoir procéder démonstrativement ? Le système d'Euclide tente de satisfaire cette exigence, mais il y a une limite au caractère déductif du système euclidien : procéder à des constructions, c'est faire appel à l'intuition.

Le progrès des mathématiques a consisté à se débarrasser du support intuitif de la représentation et à s'affranchir de la limitation imposée au discours mathématique dont

---

<sup>5</sup> *Critique de la Raison pure*, Analytique transcendantale, Doctrine du jugement, ch. II, 3<sup>e</sup> section.

<sup>6</sup> *Critique de la Raison pure*, Introduction (2<sup>e</sup> éd.), V.

on exigeait qu'il ne soit pas seulement discursif mais qu'il se soumette aux exigences et aux possibilités de la représentation. Au contraire on a dégagé et codifié les possibilités et les règles de formulations d'énoncés qu'offre le discours mathématique, de sorte que ce qui est passé au premier plan c'est le discours lui-même avec ses règles de formation et d'enchaînement d'énoncés mathématiques, sa syntaxe. Apparaît alors l'idée que lorsqu'on est en présence de ce discours, on est en présence de l'objet lui-même. On a en effet élaboré et codifié un discours où il ne s'agit plus d'exprimer des constructions, des calculs ou des propriétés de choses mathématiques, mais où il s'agit de former et d'enchaîner les expressions elles-mêmes. A la considération, par exemple, des droites parallèles se substitue la considération de la syntaxe des expressions dans lesquelles on parle de parallélisme. Aux objets mathématiques se substitue le discours où il est question d'objets mathématiques. Les propriétés des expressions du discours mathématique déterminent ce qu'il est possible et nécessaire de dire mathématiquement des objets mathématiques. Elles déterminent leurs propriétés mathématiques, elles deviennent les règles auxquelles les objets mathématiques obéissent. C'est la syntaxe qui fait l'objet et qui devient l'objet ; ce n'est plus la synthèse représentative. Cette syntaxe est celle d'un discours dans lequel tout ce qu'on dit doit être dit logiquement, de manière déductive, selon des enchaînements réglés d'expressions. Celles-ci sont mises dans un ordre déductif où elles forment une suite de conséquences : une proposition dépend d'une autre proposition dont elle se conclut. Les propositions sont enchaînées déductivement les unes aux autres et forment un système. Dans ce système il n'est plus question de faire appel à des constructions pour démontrer. La démonstration se fait à l'intérieur du système des expressions où il s'agit de procéder déductivement d'après des règles qui sont celles de la pure syntaxe des énoncés.

Ce mouvement est celui de l'axiomatisation et, au-delà, celui de la formalisation. Il a conduit à arracher les choses mathématiques et leurs propriétés au domaine de l'intuition pure avec les constructions qu'elle autorise pour les inscrire dans l'ordre déductif d'un discours, dans la syntaxe d'un système. Les choses mathématiques ont été extraites du domaine du constructible pour être replacées dans le domaine du déductible.

Pour pouvoir démontrer, il faut pouvoir se situer dans un système, c'est-à-dire à un autre niveau que celui de l'intuition qui nous fait appréhender les choses mathématiques. Il faut pouvoir se situer dans un discours qui forme un système d'énoncés. C'est pourquoi, devant la géométrie d'Euclide, les mathématiciens ne se sont pas arrêtés à l'interprétation philosophique de Kant. Celui-ci a bien vu que le *fondement* de la géométrie d'Euclide est intuitif et, à ce titre, relève d'une approche philosophique, mais ce qui a retenu l'attention des mathématiciens, ce n'est pas le « fondement » de cette géométrie mais sa *structure* qui, elle, n'est pas intuitive mais discursive et systématique.