

LE RAISONNEMENT ET LE JUGEMENT D'EXISTENCE

par le groupe Mathématiques-Philosophie de l'IREM de Strasbourg¹

Pour préciser la réflexion sur les fonctions, procédures et possibilités du raisonnement dans le domaine de la philosophie, on pourra partir d'un exemple « extrême » issu de la philosophie scolastique : la démonstration de l'existence de Dieu par SAINT ANSELME DE CANTERBURY dans son *Proslogion, Allocution sur l'existence de Dieu*. Cet exemple conduit :

- 1) à examiner les procédures et surtout les possibilités du raisonnement dans le domaine de la philosophie ;
- 2) à partir de là, on pourra en un second temps, s'interroger sur les démarches de la réflexion philosophique ;
- 3) et finalement aborder la question de la démonstration d'existence en mathématique.

1. La démonstration de Saint Anselme de Canterbury

Proslogion, Chapitre 2 : « Que Dieu est vraiment ».

« Donc, Seigneur, toi qui donnes intellect à la foi, donne-moi, autant que tu sais faire, de comprendre que tu es, comme nous croyons, et que tu es ce que nous croyons. Et certes, nous croyons que tu es quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand. N'y a-t-il pas une nature telle parce que l'insensé a dit dans son cœur : « Dieu n'est pas ». Mais il est bien certain que ce même insensé, quand il entend cela même que je dis : « quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand », comprend ce qu'il entend, et que ce qu'il comprend est dans son intellect, même s'il ne comprend pas que ce quelque chose est. Car c'est une chose que d'avoir quelque chose dans l'intellect, et autre chose que de comprendre que ce quelque chose est. En effet, quand le peintre prémédite ce qu'il va faire, il a certes dans l'intellect ce qu'il n'a pas encore fait, mais il comprend que cette chose n'est pas encore. Et une fois qu'il l'a peinte, d'une part il a dans l'intellect ce qu'il a fait, et d'autre part il comprend que ça est. Donc l'insensé aussi, il lui faut convenir qu'il y a bien dans l'intellect quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand, puisqu'il comprend ce qu'il entend, et que tout ce qui est compris est dans l'intellect. Et il est bien certain que ce qui est tel que rien ne se peut penser de plus grand ne peut être seulement dans l'intellect. Car si c'est seulement dans l'intellect, on peut penser que ce soit aussi dans la réalité, ce qui est plus grand. Si donc ce qui est tel que rien ne se peut penser de plus grand est seulement dans l'intellect, cela même qui est tel que rien ne se peut penser de plus grand est tel qu'on peut penser quelque chose de plus grand; mais cela est à coup sûr impossible. Il est donc hors

¹ Cet article est extrait d'une brochure à paraître dont les auteurs sont des professeurs de mathématiques ou de philosophie, de l'Académie de Strasbourg, qui ont participé au groupe philosophie-mathématiques de l'I.R.E.M. de Strasbourg.

de. I doute qu'existe quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand, et cela tant dans l'intellect que dans la réalité... » Psaume 14 :1 ; 53 :1.

1. Analyse de la procédure de validation dans la raisonnement.

On pourra utiliser la réflexion suivante², qui a recherché quels éléments logiques et mathématiques pouvaient être repérés dans la démarche démonstrative de SAINT ANSELME

Notions premières :

ce qu'on peut penser = les pensées ?
les objets de pensée

Postulat

Les pensées peuvent être classées par ordre de grandeur.

Remarques et questions :

Dans la phrase « Quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand » on peut se demander si ce sont les pensées qui sont classées ou les objets de la pensée (les choses pensées).

D'après la suite du texte, Anselme semble plutôt avoir choisi les pensées, du moins dans les premières lignes. Comme tout postulat, celui-ci est bien sûr tout à fait acceptable, bien qu'il pose des questions :

Beaucoup d'ensembles ne peuvent pas être ordonnés de façon satisfaisante, par exemple l'ensemble des points d'un plan ou de l'espace.

Imaginer un classement dans les pensées n'est pas simple. Comment pourrais je par exemple définir le plus grand d'une collection aussi banale que les objets de ma maison ? Le plus long, le plus volumineux, le plus lourd, celui que j'utilise le plus, celui que je préfère ?

Définition

« Quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand ». Le problème, c'est que cette phrase ne définit peut-être rien du tout.

« Un nombre entier tel qu'il n'y en a pas de plus grand » n'existe pas, pas plus qu' « un point du plan plus loin de l'origine que tous les autres » et je ne me prononcerais pas sur « une étoile plus loin de nous que toutes les autres ».

Anselme s'appuie sur le postulat suivant :

Postulat

Le « quelque chose » que nous venons de définir existe bien. En effet le texte admet l'existence de ce plus grand là.

Dans la 3ème ligne, il dit « nous croyons que tu es quelque chose de tel... »

Au milieu du texte, il dit de l'insensé « il lui faut convenir qu'il y a bien dans l'intellect... »

² réflexion proposée par Nicole Vogel

Ce postulat aussi est tout à fait légitime, mais il ne semblerait probablement pas très naturel à un Japonais ou à un Africain animiste.

Il reste une autre question qui n'est pas évoquée par Anselme (sans doute parce que sa réponse est évidente) : ce quelque chose est-il unique ?

Amusons-nous un peu avec la notion d'ordre en mathématique :

Si l'ordre est total (entre deux éléments, on peut toujours décider lequel est le plus grand) et s'il existe un plus grand élément, il est unique...

Donc si l'ordre sur les pensées est total et si Dieu existe, il est unique...

Par contre, si l'ordre n'est pas total, il peut y avoir une infinité d'éléments plus grands que tous ceux auxquels on peut les comparer et il peut y avoir une infinité de « dieux »...

De plus, des ensembles aussi « naturels » que l'ensemble des entiers par exemple, n'ont pas de plus grand élément.

Et si l'on veut contourner l'obstacle avec la notion d'infini, on sait depuis Cantor que l'infini n'est pas unique non plus...

On passe ensuite à une démonstration par l'absurde.

Postulat

La réalité d'une chose (ou la pensée de la réalité d'une chose ?) est supérieure à la pensée de la chose.

Démonstration

Ce qu'il y a de plus grand dans les pensées existe aussi dans la réalité, car la réalité d'une chose (ou la pensée de la réalité d'une chose ?) est supérieure à la pensée de la chose donc on pourrait trouver quelque chose de plus grand que la plus grande des pensées, ce qui est une contradiction.

Du point de vue logique, cette démonstration est fautive, car nous avons considéré au départ l'ensemble ordonné des pensées et le plus grand élément de cet ensemble.

Si on parle de réalité, il s'agit d'objets extérieurs à cet ensemble de référence.

En supposant qu'on puisse comparer (dire lequel est le plus grand) ceux-là aux pensées, il n'est pas contradictoire de trouver parmi eux des éléments plus grands que dans l'ensemble ces pensées.

Par exemple, en mathématiques, l'intervalle $]0,1[$ n'a pas de plus grand élément, mais 2 est plus grand que tous les éléments de $]0,1[$. Ou bien $[0 ; 1]$ a un plus grand élément qui est 1, et 2 est plus grand.

Mais on ne sait pas très bien non plus si Anselme parle de la réalité correspondant à la chose pensée ou de la pensée que la chose pensée est réelle.

Dans le premier cas, cela voudrait dire que tout ce qu'on peut penser existe dans la réalité, ce qui est un postulat plutôt étonnant...

Dans le second cas, la pensée de la chose ne pouvait pas être ce qu'on pouvait penser de plus grand dès le début du raisonnement, puisque dans l'ensemble de référence, le plus grand élément serait « la pensée de la réalité de la plus grande pensée ».

Mais alors pourquoi s'arrêter là ? On pourrait poursuivre les emboîtements « la pensée de la réalité de la pensée de la plus grande des pensées... » et ainsi de suite ?

On peut observer que, dans une théorie mathématique construite à partir d'un système d'axiomes, une propriété que l'on démontre est déjà inscrite dans les axiomes que l'on suppose, en ce sens que si l'on supprime un ou plusieurs axiomes, la propriété ne sera plus vraie. Faut-il pour autant dire qu'en admettant les axiomes on effectue une pétition de principe pour ce qui concerne la propriété? (rappel: pétition de principe = raisonnement qui consiste à supposer vrai ce qui est en question.)

On peut interpréter³ mathématiquement le texte d'Anselme comme supposant qu'on construit dans l'ensemble des pensées un ordre total et qu'on suppose qu'il existe dans cet ensemble un plus grand élément qu'on appelle Dieu; Or en mathématiques, tout ensemble ayant un ordre total n'admet pas toujours un plus grand élément. Il est alors précisé qu'il ne faut pas être « mathématicocentriste ». On peut⁴ « insister sur le fait qu'il ne faut pas vouloir chercher dans ce raisonnement une comparaison directe avec des raisonnements mathématiques. Il doit, bien plutôt, servir à comprendre ce qui distingue ces raisonnements d'autres types de raisonnements, également logiques ».

2. Réflexions sur l'intention philosophique ou théologique de SAINT ANSELME.

La réflexion critique technique (que l'on peut faire d'un point de vue mathématique) de la démonstration anselmienne conduit à s'interroger sur l'intention exacte de Saint Anselme, et sur le statut de sa démonstration. Cette problématique a donné lieu à un exposé⁵ suivi de débat; le compte rendu de ce débat pourra être utilisé pour nourrir les réflexions sur la fameuse "preuve".

Sur la démonstration de St Anselme de l'existence de Dieu:⁶

Quelle est l'ambition de St Anselme?

Une ambition explicite formulée dans le préambule du Proslogion : " Je me mis à chercher à part moi s'il n'était pas possible de découvrir un argument unique qui, pour être probant, n'eût besoin d'aucun autre que lui, et qui, à lui tout seul, suffit à garantir que Dieu est vraiment... " Pautrat. Gf. P. 35

C'est un argument a priori. Hors-contexte historique, empirique.

A qui s'adresse cette démonstration?

Le dialogue avec l'autre : celui qui dit "il n'y a pas de Dieu".

Point commun minimal: il entend ce que je dis. Il reconnaît mes éléments signifiants de mon discours.

Comment sont définis les termes de la démonstration ?

Définition de Dieu : *Aliquid quo nihil majus cogitari possit* (AQNMCP). Quelque chose par rapport à quoi on ne peut rien penser de plus grand.

Que veut-on démontrer à partir de là ? L'existence de Dieu (ainsi défini).

³ interprétation de Georges Glaeser

⁴ souhait de Jean-Pierre Friedelmeyer

⁵ l'exposé a été pris en charge par Philippe Rohrbach

⁶ compte rendu de Philippe Rohrbach avec des intertitres de Richard Cabassut

Que veut dire existence? Qui n'est pas seulement dans la pensée mais qui *en outre* existe réellement, véritablement, en dehors de la pensée.

Donc penser un être comme existant est plus grand que de le penser sans qu'il existe en dehors de la pensée, c à d comme simple concept.

Que veut dire plus grand ? La discussion devrait porter sur ce point délicat. Il est certain que chez Anselme « plus grand » ne désigne pas une relation d'ordre totale (où les éléments sont comparables suivant cet ordre). Par exemple: on ne peut pas dire « dans l'ordre des sentiments » que le courage est plus grand que la bonté. Ce que veut dire Anselme ici: penser quelque chose comme existant en dehors de la pensée, et pas seulement comme un pur concept, c'est penser « plus », c'est une pensée qui a « plus de poids ». Je peux, en effet, penser le tableau avant de l'avoir fait. Je peux en outre, penser au tableau, une fois qu'il est réalisé. Cette dernière pensée contient davantage que la première.

Quels sont les arguments de St Anselme?

Puisque j'ai défini Dieu comme AQNMCP, je ne peux pas le définir comme un simple concept, sinon je pourrais penser quelque chose de plus grand que lui, c à d cet être avec, en outre, l'idée qu'il existe en dehors de ma pensée. Ce qui serait contraire à la définition de départ. Je suis donc dans la nécessité de penser Dieu comme existant en dehors de ma pensée, par définition, sinon, ce n'est plus Dieu que je pense.

La clé de la démonstration se trouve dans l'avant-dernière phrase: si AQNMCP est seulement dans l'intellect, il n'est pas AQNMCP, puisque je peux; alors penser quelque chose de plus à son sujet qui est : il n'est pas seulement dans l'intellect, ce qui est en contradiction avec le fait qu'il est AQNMCP. Le mathématicien appelle cela une démonstration par l'absurde. Ce qui est frustrant ici, c'est que l'existence est démontrée par défaut. Le contraire de l'existence de Dieu aboutit à une contradiction en vertu de ce que nous avons admis au départ. Les matheux auraient sans doute aimé que je leur démontre positivement, par construction de l'objet, l'existence de Dieu, quelle déception!

Anselme dit-il qu'exister est plus que penser? Certes, il accorde à l'être une priorité sur le connaître. Mais l'intérêt de ce texte, me semble-t-il, c'est qu'il se place entièrement du point vu de la pensée: il est plus grand de penser qu'un être n'est pas seulement dans la pensée que de le penser seulement. Donc ce "plus grand" fait signe de l'intérieur même de la pensée. C'est la pensée elle-même, en elle-même, qui doit reconnaître l'impossibilité d'une existence seulement dans l'intellect de AQNMCP.

Nous avons ici une démarche formellement correcte: il y a une définition, il y a des axiomes (Penser que la chose existe est plus grand que penser la chose comme simple concept)

Discussion sur la critique du mathématicien:

Les mathématiciens, lorsqu'ils parlent d'existence d'un objet, soit ils construisent l'objet, soit ils assurent l'existence de l'objet, sans le construire, par défaut (par exemple en montrant dans une disjonction des cas que le seul cas restant possible est en cohérence avec les axiomes).

Sur quoi porte alors la discussion à propos de cet exemple ?

Une question fondamentale: l'argument d'Anselme tombe-t-il sous le coup de la critique technique d'un mathématicien qui consiste à dire: dans un ensemble ordonné il n'y a pas toujours de plus grand élément (par exemple comme pour les nombres entiers).

On peut répondre à cela qu'Anselme ne dit pas que AQNMCP est le plus grand élément que l'on puisse penser. Il dit: Il est tel que rien ne se peut penser de plus grand. Anselme ne part pas d'une comparaison qui permettrait de dire: Dieu est le plus grand des éléments de l'ensemble E.

1) Moreau, dans Pour ou contre l'insensé ? " Il ne faut pas dire : plus grand que toute chose existante, plus grand que tout ce qui existe, un objet désigné ainsi peut être une réalité contingente. Le aliquid quo... est conçu absolument comme l'être auprès de qui rien de plus grand ne peut être pensé. L'expression majus omnibus est une détermination objective, relative au donné empirique. Aliquid quo majus... est une notion réflexive où est impliqué l'absolu.

Cette formule traduit donc une exigence absolue de la pensée où se révèle la transcendance de l'être, sans laquelle notre pensée n'aurait aucun sens. "

Moreau montre qu'il faut distinguer entre la grandeur quantitative pour laquelle " il peut toujours y avoir de plus grand " et une grandeur de valeur, comme le bien absolu. Cf. la discussion sur la juste mesure dans le Politique 283 d sq. Le bien suprême a une valeur propre en dehors de tout accroissement. Cf. Eth. Nic. II 6 1107a 6-8, 20-21 " C'est pourquoi dans l'ordre de la substance et de la définition exprimant la quiddité, la vertu est une médiété, tandis que dans l'ordre de l'excellence et du parfait, c'est un sommet ". Cf plus loin. Il n'y a pas excès ou défaut de courage en tant que tel, " du fait que le moyen est en un sens un extrême ".

2) La conception anselmienne de la vérité nous a fait voir que penser un être seulement dans l'intellect est moins que penser cet être " dans la vérité ". Penser seulement un être c'est moins que, en outre, penser à lui. C'est-à-dire qu'il est plus grand pour un être de ne pas seulement être dans l'intellect. Or, nous pouvons *penser* que Dieu n'est pas seulement dans l'intellect, donc, comme il est ce par rapport à quoi nous ne pouvons rien penser de plus grand, il ne peut être pensé comme existant seulement dans l'intellect. (autre formulation qui rendra plus sensible le point sur lequel j'aimerais faire porter mon commentaire : Nous pouvons penser que nous pouvons penser à Dieu et pas seulement le penser) Notez ici également l'équivalence " être plus grand " et " penser quelque chose de plus grand ". En d'autres termes encore, d'un être qui est seulement dans l'intellect, je peux penser quelque chose de plus grand, c'est qu'il existe en dehors de la pensée, dans la chose, et pas seulement dans l'intellect. Cf. le tableau ! Mais ici, ce qui rend cet axiome décisif, c'est que l'être dont nous parlons est tel que rien de plus grand ne peut être pensé que lui ! Le Dieu intra-mental n'a pas cette propriété. Un Dieu qui serait un pur idéal, ne répond pas à la définition, je dois donc penser Dieu nécessairement comme existant véritablement et pas seulement dans la pensée.

Éléments de discussion sur le texte d'Anselme :

Dans le texte précédent on a souhaité présenter l'argumentation de St Anselme hors contexte, de manière an-historique, ce qui permet se rapprocher des mathématiques lorsque celles ci se veulent également universelles et éternelles.

On⁷ peut replacer le texte de St Anselme dans le contexte historique: St Anselme, moine du XVI^e siècle, à la demande de ses autorités, produit ses méditations: c'est une prière avec laquelle St Anselme remercie Dieu de lui avoir donné l'idée de la preuve de

⁷ suggestion de Bruno de Solère

l'existence de Dieu. Il y a deux manières de connaître Dieu: la foi ou la raison. Ici St Anselme veut connaître Dieu dans la foi. Descartes aura le projet de constituer une connaissance sans le recours à la foi en utilisant la raison naturelle. Descartes estime que parmi toutes les idées, une idée n'est pas le produit de mon imagination: l'idée d'un Dieu infiniment parfait. L'existence appartient à la nature d'un être parfait. Une objection: la pensée ne fait pas nécessité aux choses.

On peut se référer⁸ à un texte de Roger Cuppens " *Les mathématiques d'une machine sont-elles préhilbertiennes ?* " ⁹ Dans ce texte Cuppens rappelle à propos de Brouwer et de l'intuitionnisme: « L'existence des entiers repose sur l'intuition. Tous les autres objets doivent être construits explicitement. Dans son refus des démonstrations d'existence non constructives, il est amené à refuser les démonstrations par l'absurde, le principe du tiers exclus et bien entendu l'axiome du choix ». On voit l'analogie avec la démonstration de St Anselme qui ne démontre pas l'existence de Dieu par construction mais par un raisonnement par l'absurde.

Précédemment on a invoqué¹⁰ la pétition de principe que constituent les deux hypothèses suivantes :

- je pense à Dieu qui est défini comme quelque chose par rapport à quoi on ne peut rien penser de plus grand ;
- penser à quelque chose et penser que ce quelque chose existe est plus grand que penser à quelque chose sans penser qu'il existe.

On en conclut alors que si on pense à Dieu, on pense nécessairement qu'il existe. Or, d'après Nicole Vogel, la conclusion est déjà inscrite dans les deux hypothèses.

2. La critique de la preuve ontologique par KANT

KANT, *Critique de la raison pure*, Dialectique transcendantale III, section 4.

1. De l'impossibilité d'une preuve ontologique de l'existence de Dieu

On voit aisément, d'après-ce qui précède, que le concept d'un être absolument nécessaire est un concept pur de la raison, c'est-à-dire une simple idée dont la réalité objective est bien loin d'être encore prouvée par cela seul que la raison en a besoin, qui, d'ailleurs, ne fait que nous indiquer une certaine perfection inaccessible et qui sert proprement à limiter l'entendement plutôt qu'à l'étendre à de nouveaux objets. Or, il y a ici quelque chose d'étrange et de paradoxal : c'est que le raisonnement concluant d'une existence donnée en général à quelque existence absolument nécessaire paraît être pressant et rigoureux, et que nous avons pourtant tout à fait contre nous toutes les conditions nécessaires à l'entendement pour se faire un concept d'une telle nécessité.

On a de tout temps parlé de l'être absolument nécessaire et l'on ne s'est pas donné autant de peine pour comprendre si et comment, on peut seulement concevoir une chose de cette espèce que pour en prouver l'existence. Or, il est vrai qu'il est très aisé de donner une définition nominale de ce concept, en

⁸ référence proposée par François Pluvinage

⁹ Actes de l'Université d'été "Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques", 29 août-2 septembre 1994, Caen. IREM de Caen.

¹⁰ invocation de Nicole Vogel

disant que c'est quelque chose dont la non-existence est impossible ; mais on n'est pas plus instruit pour cela en ce qui concerne les conditions qui rendent impossible de regarder la non-existence d'une chose comme absolument inconcevable et qui sont proprement ce que l'on veut savoir, je veux dire que l'on ignore si, par ce concept, nous pensons ou non quelque chose en général. En effet, écarter par le mot inconditionné toutes les conditions, dont l'entendement a toujours besoin, pour considérer quelque chose comme nécessaire, cela ne suffit pas, encore à me faire comprendre si, par ce concept d'un être inconditionnellement nécessaire, je pense encore quelque chose ou si, peut-être, je ne pense plus rien du tout.

Bien plus, on a cru encore expliquer par une foule d'exemples ce concept risqué, d'abord, à tout hasard, et, à la fin, devenu tout à fait familier, de telle sorte que toute recherche ultérieure sur son intelligibilité parût tout à fait inutile. Toute proposition de géométrie, par exemple : qu'un triangle a trois angles, est absolument nécessaire ; et l'on a parlé ainsi d'un objet qui est entièrement hors de la sphère de notre entendement, comme si l'on avait parfaitement compris ce qu'on en voulait dire par le concept qui l'intéresse.

Tous les exemples qu'on avance ne sont tirés, sans exception, que des jugements, et non des choses et de leur existence. Mais la nécessité inconditionnée des jugements n'est pas une nécessité absolue des choses. Car la nécessité absolue du jugement n'est qu'une nécessité conditionnée de la chose ou du prédicat dans le jugement. La proposition précédente ne disait pas que trois angles existent d'une manière absolument nécessaire, mais que, si l'on pose la condition qu'un triangle existe (soit donné), il y a aussi en lui trois angles nécessairement. Toutefois, cette nécessité logique a montré une si grande puissance d'illusion qu'après s'être fait d'une chose un concept a priori agencé de telle façon que, de l'avis commun, l'existence rentrait dans sa compréhension (das Dasein mit seinen Umfang begriff), on a cru pouvoir en conclure sûrement que, puisque l'existence appartient nécessairement à l'objet de ce concept, c'est-à-dire sous la condition que je pose cette chose comme donnée (comme existante), son existence est aussi posée nécessairement (en vertu de la règle d'identité) et que cet être est, en conséquence, absolument nécessaire lui-même, parce que son existence a été conçue dans un concept arbitraire et sous la condition que j'en pose l'objet.

Si je supprime le prédicat, dans un jugement identique, et que je garde le sujet, il en résulte une contradiction, et c'est pourquoi je dis que ce prédicat convient nécessairement au sujet. Mais si j'enlève le sujet en même temps que le prédicat, il n'y a plus de contradiction, car il ne reste plus rien que la contradiction puisse affecter. Poser un triangle en en supprimant les trois angles est contradictoire ; mais faire disparaître à la fois le triangle et les trois angles, il n'y a plus là de contradiction. Il en est exactement de même du concept d'un être absolument nécessaire, Si vous lui ôtez l'existence, vous supprimez la chose même avec tous ses prédicats ; d'où peut alors venir la contradiction ? Il n'y a rien extérieurement avec quoi il puisse y avoir contradiction, car la chose ne doit pas être extérieurement nécessaire ; il n'y a rien non plus intérieurement, car en supprimant la chose elle-même, vous avez supprimé en même temps ce qui est intérieur. Dieu est tout-puissant : c'est là un jugement nécessaire. La toute-puissance ne peut pas être supprimée dès que vous posez une divinité, c'est-à-dire un être infini avec le concept duquel cet attribut est identique, Mais si vous dites : Dieu n'est pas, ni la toute-puissance, ni aucun autre de ces prédicats n'est donné, car ils ont été supprimés tous ensemble avec le sujet et il n'y a plus la moindre contradiction dans cette pensée.

Vous avez donc vu que, si je supprime le prédicat d'un jugement en même temps que le sujet, il ne peut jamais en résulter de contradiction interne, quel que soit ce prédicat. Or, il ne vous reste pas d'autre refuge que de dire : il y a des sujets qui ne peuvent pas du tout être supprimés et qui, par conséquent, doivent subsister. Mais cela reviendrait à dire qu'il y a des sujets absolument nécessaires, supposition dont j'ai précisément contesté la légitimité et dont vous vouliez essayer de me montrer la

possibilité. Car il m'est impossible de me faire le moindre concept d'une chose qui, même supprimée ainsi que tous ses prédicats, donne encore lieu à la contradiction et, en dehors de la contradiction, je n'ai, par de simples concepts purs a priori, aucun critérium de l'impossibilité.

Contre tous ces raisonnements généraux (auxquels personne ne peut se refuser) vous objectez un cas que vous présentez comme une preuve de fait, en me disant qu'il y a pourtant un concept, et, à la vérité, celui-là seul, où la non-existence est contradictoire en soi, c'est-à-dire dont on ne saurait sans contradiction supprimer l'objet, et que ce concept est celui de l'être infiniment réel. Il a, dites-vous, toute réalité et vous avez le droit d'admettre un tel être comme possible (ce que j'accorde pour le moment, bien que l'absence de contradiction de ce concept soit encore loin de prouver la possibilité de l'objet)¹¹. Or, l'existence est comprise elle-même dans la toute réalité : donc, l'existence est contenue dans le concept d'un possible. Par conséquent, si cette chose est supprimée, la possibilité interne de la chose est supprimée aussi, ce qui est contradictoire.

Je réponds : Vous êtes déjà tombé dans une contradiction quand, dans le concept d'une chose que vous voulez uniquement concevoir au point de vue de sa possibilité, vous avez déjà introduit le concept de son existence, sous quelque nom qu'elle se cache. Si l'on vous accorde ce point, vous avez, en apparence, partie gagnée, mais, dans le fait, vous n'avez rien dit ; car vous avez commis une simple tautologie. Je vous demande : cette proposition : telle chose ou telle autre (que je vous accorde comme possibles, quelles qu'elles soient) existe, cette proposition est-elle, dis-je, une proposition analytique ou une proposition synthétique. Si elle est analytique, par l'existence de la chose vous n'ajoutez rien à votre pensée de la chose, et alors, de deux choses l'une : ou la pensée qui est en vous doit être la chose elle-même, ou bien vous avez supposé une existence comme faisant partie de la possibilité, et alors l'existence est soi-disant conclue de la possibilité interne, ce qui n'est autre chose qu'une misérable tautologie. Le mot réalité qui, dans le concept de la chose, sonne tout autrement que celui d'existence dans le concept du prédicat, ne résout pas cette question. Car si vous appelez aussi réalité tout ce que vous posez (sans déterminer ce que vous posez), vous avez déjà posé et admis, comme réelle, dans le concept du sujet, la chose même accompagnée de tous ses attributs ; dans le prédicat vous ne faites que le répéter. Si vous avouez, au contraire, comme tout homme raisonnable doit raisonnablement le faire, que toute proposition d'existence est synthétique, comment voulez-vous soutenir que le prédicat de l'existence ne peut être supprimé sans contradiction, puisque ce privilège n'appartient proprement qu'aux propositions analytiques, dont le caractère repose précisément là-dessus !

Je pourrais sans, doute espérer avoir directement réduit à rien cette vaine argutie par une détermination précise du concept de l'existence, si je n'avais fait l'expérience que l'illusion résultant de la confusion d'un prédicat logique avec un prédicat réel (c'est-à-dire avec la détermination d'une chose) repousse presque tout éclaircissement. Tout peut servir indistinctement de prédicat logique et même le sujet peut se servir à lui-même de prédicat ; car la logique fait abstraction de tout contenu. Mais la détermination est un prédicat qui s'ajoute au concept du sujet et l'augmente. Elle ne doit donc pas y être déjà contenue.

Etre n'est évidemment pas un prédicat réel, c'est-à-dire un concept de quelque chose qui puisse s'ajouter au concept d'une chose. C'est simplement la position d'une chose ou de certaines déterminations en soi. Dans l'usage logique, ce n'est que la copule d'un jugement. Cette proposition : Dieu est tout-puissant, renferme deux concepts qui ont leurs objets : Dieu et toute-puissance ; le petit

¹¹ Le concept est toujours possible, quand il n'est pas contradictoire. C'est le critérium logique de la possibilité et par là son objet se distingue du nihil negativum. Mais Il n'en peut pas moins être un concept vide, quand la réalité objective de la synthèse par laquelle le concept est produit n'est ais démontrée en particulier, et cette démonstration, ainsi que nous l'avons montré plus haut, repose toujours sur les principes de l'expérience possible et non sur le principe de l'analyse (le principe de contradiction). Cela nous avertit de ne pas conclure aussitôt de la possibilité (logique) des concepts à la possibilité (réelle) des choses.

mot est n'est pas du tout encore par lui-même un prédicat, c'est seulement ce qui met le prédicat en relation avec le sujet. Or, si je prends le sujet (Dieu) avec tous ses prédicats (dont la toute-puissance fait aussi partie) et que je dise : Dieu est, ou il est un Dieu, je n'ajoute aucun nouveau prédicat au concept de Dieu, mais je ne fais que poser le sujet en lui-même avec tous ses prédicats, et en même temps, il est vrai, l'objet qui correspond à mon concept. Tous deux doivent exactement renfermer la même chose et, par conséquent, rien de plus ne peut s'ajouter au concept qui exprime simplement la possibilité, par le simple fait que je conçois (par l'expression : il est) l'objet de ce concept comme donné absolument. Et ainsi, le réel ne contient rien de plus que le simple possible. Cent thalers réels ne contiennent rien de plus que cent thalers possibles. Car, comme les thalers possibles expriment le concept et les thalers réels, l'objet et sa position en lui-même, au cas où celui-ci contiendrait plus que celui-là, mon concept n'exprimerait pas l'objet tout entier et, par conséquent, il n'en serait pas, non plus, le concept adéquat. Mais je suis plus riche avec cent thalers réels qu'avec leur simple concept (c'est-à-dire qu'avec leur possibilité). Dans la réalité, en effet, l'objet n'est pas simplement contenu analytiquement dans mon concept, mais il s'ajoute synthétiquement à mon concept (qui est une détermination de mon état), sans que, par cette existence en dehors de mon concept, ces cent thalers conçus soient le moins du monde augmentés.

Quand donc je conçois une chose, quels que soient et si nombreux que soient les prédicats par lesquels je la pense (même dans la détermination complète), en ajoutant, de plus, que cette chose existe, je n'ajoute absolument rien à cette chose., Car autrement, ce qui existerait ne serait pas exactement ce que j'avais conçu dans mon concept, mais bien quelque chose de plus, et je ne pourrais pas dire que c'est précisément l'objet de mon concept qui existe. Si je conçois aussi dans une chose toute réalité sauf une, du fait que je dis qu'une telle chose défectueuse existe, la réalité qui lui manque ne s'y ajoute pas, mais au contraire cette chose existe avec exactement le même défaut qui l'affectait lorsque je l'ai conçue, car autrement il existerait quelque chose d'autre que ce que j'ai conçu. Or, si je conçois un être à titre de réalité suprême (sans défaut), il reste toujours à savoir, pourtant, si cet être existe ou non. En effet, bien qu'à mon concept il ne manque rien du contenu réel possible d'une chose en général, il manque cependant encore quelque chose au rapport à tout mon état de pensée, à savoir que la connaissance de cet objet soit aussi possible a posteriori. Et ici se montre la cause de là difficulté qui règne sur ce point. S'il était question d'un objet des sens je ne pourrais pas confondre l'existence de la chose avec le simple concept de la chose. Car le concept ne me fait concevoir l'objet que conformément aux conditions universelles d'une connaissance empirique possible en général, tandis que l'existence me le fait concevoir comme enfermé dans le contexte de toute l'expérience; si donc, par sa liaison avec le contenu de toute l'expérience, le concept de l'objet n'est pas le moins du monde augmenté, notre pensée du moins en reçoit en plus une perception possible. Si, au contraire, nous voulons penser l'existence seulement par la pure catégorie, il n'est pas étonnant que nous ne puissions indiquer aucun critérium pour la distinguer de la simple possibilité.

Quelles que soient donc la nature et l'étendue de notre concept d'un objet, il nous faut cependant sortir de ce concept pour attribuer à l'objet son existence. Pour les objets des sens, cela a lieu au moyen de leur enchaînement avec quelqu'une de mes perceptions suivant des lois empiriques ; mais pour des objets (Objecte) de la pensée pure, il n'y a absolument aucun moyen de connaître leur existence, parce qu'elle devrait être connue entièrement a priori, alors que notre conscience de toute existence (qu'elle vienne soit immédiatement de la perception, soit de raisonnements qui lient quelque chose à la perception) appartient entièrement et absolument à l'unité de l'expérience, et que si une existence hors de ce champ ne peut pas, à la vérité, être absolument déclarée impossible, elle est pourtant une supposition que nous ne pouvons justifier par rien.

Le concept d'un Etre suprême est une idée très utile à beaucoup d'égards , mais, par le fait même qu'il est simplement une idée, il est incapable d'accroître par lui seul notre connaissance par rapport à ce qui existe. Il ne peut même pas nous instruire relativement à la possibilité d'une pluralité. Le caractère analytique d'une possibilité consistant en ce que de simples positions (des réalités) n'engendrent aucune contradiction, ne peut sans doute lui être contesté ; mais comme la liaison de toutes les propriétés réelles dans une chose est une synthèse dont nous ne pouvons pas juger a priori la possibilité, parce que les réalités ne nous sont pas données spécifiquement (49) et que, quand même cela arriverait, il n'en résulterait aucun jugement, le caractère de la possibilité de connaissances synthétiques ne devant jamais être cherché que dans l'expérience à laquelle l'objet d'une idée ne peut pas appartenir, il s'en faut bien que le célèbre LEIBNIZ ait fait ce dont il se flattait, c'est-à-dire qu'il soit parvenu, comme il le voulait, à connaître a priori la possibilité d'un être idéal aussi élevé.

Par conséquent, la preuve ontologique (cartésienne) si célèbre, qui veut démontrer par concepts l'existence d'un Etre suprême, fait dépenser en vain toute la peine qu'on se donne et tout le travail que l'on y consacre ; nul homme ne saurait, par de simples idées, devenir plus riche de connaissances, pas plus qu'un marchand ne le deviendrait en argent, si, pour augmenter sa fortune, il ajoutait quelques zéros à l'état de sa caisse. »

2. Analyses ¹²:

On souhaite replacer le texte de St Anselme dans le contexte historique et intellectuel: St Anselme, moine du XI^{ème} siècle, à la demande de ses autorités, produit ses méditations: c'est une prière avec laquelle St Anselme remercie Dieu de lui avoir donné l'idée de la preuve de l'existence de Dieu. Il y a deux manières de connaître Dieu: par l'autorité des Ecritures et par la nécessité de la Raison., qui s'opposent et s'articulent au sein de la foi. C'est seulement après St Thomas que la Raison sera opposée non seulement à l'autorité des Ecritures, mais à la foi elle-même, et c'est dans ce nouveau contexte intellectuel que Descartes formulera « sa » preuve ontologique. Donc St Anselme veut connaître Dieu au sein de la foi. Descartes aura le projet de constituer une connaissance sans le recours à la foi en utilisant la seule raison naturelle. Descartes estime que parmi toutes les idées, une idée ne peut être le produit de mon imagination: l'idée d'un Dieu infiniment parfait, l'imagination ne pouvant jamais donner que des représentations limitées. Pour Descartes, si nous concevons l'idée d'un être parfait, l'existence appartient nécessairement à un tel être. Descartes accepte cependant une objection: la pensée ne fait pas nécessité aux choses et répond à cette objection dans la troisième méditation. Cette troisième méditation propose une première preuve de l'existence de Dieu – dite « preuve par les effets », sans laquelle la seconde ne serait pas garantie -, preuve qui est un moyen par rapport à la solution du problème de la valeur objective des idées : il s'agit de montrer qu'une réalité objective correspond aux idées claires et distinctes, de « transformer les vérités nécessaires de la science en vérité des choses »¹³. Cela fait, Descartes pourra alors dans la Méditation

¹² analyses de Bruno de Solère

¹³ citation de M. Guérault, dans *Descartes dans l'ordre des raisons*.

Vème développer la preuve dite ontologique : un être parfait ne peut pas ne pas exister sinon il lui manquerait une perfection : l'existence.

C'est la preuve de la V^e méditation que Kant critique. Notons que dans les méditations le problème de Descartes était de garantir la certitude des sciences par l'existence de Dieu ; ce problème n'est plus celui de Kant qui part du fait de l'existence des sciences et cherche simplement à réfléchir aux conditions des possibilités et aux limites de celles-ci : la vérité des sciences dépend alors de la structure du sujet (on peut parler de « mort épistémologique de Dieu »).

La preuve de Descartes déduisait l'existence de Dieu de son essence après s'être efforcé de montrer qu'on avait le droit de faire ces déductions. Kant s'attaque à ce droit en montrant que l'existence n'est pas un élément de l'essence parmi d'autres, mais quelque chose qui peut ou non s'ajouter à l'essence.

Commentons le texte de Kant. On propose de réfléchir au cas d'une personne se trouvant devant un restaurant proposant un menu 100 F. Quatre possibilités peuvent se présenter :

je crois avoir 100 F, je mange et je trouve effectivement les 100 F dans ma poche : à l'idée de 100 F correspond effectivement l'existence des 100 F.

je crois avoir 100 F, je mange mais je me rends compte que j'ai oublié les 100 F à la maison : à l'idée de 100 F dans ma poche ne correspond pas l'existence de 100 F dans ma poche.

je ne pense pas avoir 100 F dans ma poche, je ne rentre pas dans le restaurant et, en marchant, je découvre les 100 F dans ma poche : à l'idée de la non existence des 100 F dans ma poche répond la découverte de leur existence dans ma poche.

je ne crois pas avoir 100 F dans ma poche, et effectivement je ne les y trouve pas : l'idée de l'inexistence est confirmée par l'expérience.

La thèse de Kant est ainsi que seule la perception sensible permet de distinguer le concept d'un être réel et la réalité de cette chose. Pour attribuer une existence à un objet il faut sortir du concept de l'objet. L'existence d'un être parfait est possible mais elle n'est que possible ; l'idée de Dieu, être parfait, ne peut accroître notre connaissance, il faudrait pour cela une expérience qui nous apporterait la confirmation de l'existence.

3. Réflexions sur les démarches de la philosophie d'aujourd'hui

Un philosophe aujourd'hui ne tenterait plus de prouver l'existence ; la leçon de Kant a été retenue : l'existence ne se démontre pas, il faut qu'elle soit donnée dans une expérience possible.

Il paraît alors intéressant de s'interroger sur d'une part sur la place des jugements d'existence tant en mathématique qu'en philosophie et d'autre part sur la spécificité des démarches philosophiques par rapport à celle des mathématiques.

En un premier temps les philosophes tendent à penser que pour les mathématiciens un objet existe dès lors qu'il est logiquement possible ; alors que c'était justement

L'objet de la réfutation kantienne démontrer qu'un concept sans contradiction ne garantit pas l'existence d'une réalité lui correspondant.

S'interroger sur l'existence pour un philosophe, c'est au fond se demander si telle chose est réelle dans la perspective même du bon sens qui distingue entre fiction et réalité.

Un problème du mathématicien est qu'il éprouve le besoin de préciser au départ le vocabulaire qu'il utilise, en donnant d'emblée un contenu exact et non équivoque à chaque notion : existence, réalité, ... L'aboutissement de cette démarche est la présentation axiomatique. Une fois cette présentation minimale faite, il commence à raisonner.

En revanche le point de départ du philosophe est une situation vécue de sorte que le sens des termes s'éclaire (à des degrés divers, mais c'est justement l'objet de la démarche philosophique d'éclairer progressivement les notions tendant à cerner et à problématiser les situations vécues) tout au long de sa réflexion.

Il apparaît, par ailleurs, que l'entreprise anselmienne ou cartésienne, de prouver l'existence de Dieu ne correspond plus aux entreprises de la philosophie depuis Kant ; jusqu'à Kant les métaphysiciens ambitionnaient de prouver des existences par les seules ressources de la raison. Depuis la démarche philosophique part de la réalité vécue en s'efforçant à partir de là de réfléchir aux conditions de possibilités de celles-ci (Kant : la science existe, quelles sont les conditions qui la rendent possible ?)

Peut-on faire une analogie dans ce débat pré-kantien / post-kantien avec le débat entre les mathématiciens constructivistes qui ne conçoivent une existence que par construction effective (ce qui renvoie au « vécu »), et les mathématiciens formalistes qui acceptent une existence par la seule force du raisonnement (existence « par défaut » d'objets qui ne sont pas construits). ?

4. La démonstration d'existence en mathématique

Comme l'a montré le débat précédent, le débat kantien/pré-kantien peut renvoyer au débat existant en mathématique entre les constructivistes et les formalistes.

1. Exemples de démonstration d'existence

Pour éclairer le débat sur la démonstration d'existence, et le nourrir, nous proposons d'abord des exemples de démonstrations d'existence *sans et avec construction*.

Démonstration d'existence d'objet:

L'exemple suivant est extrait de "*Mathématiques constructives: hier et demain*" de Henri Lombardi¹⁴.

Un théorème affirme que lorsqu'on effectue successivement trois symétries par rapport à 3 droites dans un ordre de succession donné, le résultat est le même dans l'ordre inverse de succession si et seulement si les trois droites sont concourantes ou parallèles. Il se pose alors le problème suivant:

¹⁴ publié dans "*La démonstration mathématique dans l'histoire*" actes du 7^{ème} colloque inter-irem épistémologie et histoire des mathématiques, de Besançon, 1989, édition IREM de Lyon.

Connaissant deux droites D_1 et D_2 et un point M extérieur montrer qu'il existe une troisième droite D_3 passant par M et qui soit parallèle ou concourante aux deux premières droites

Existence sans construction (point de vue Cantorien, formaliste ou "abstrait"):

Il y a deux cas (**disjonction des cas**) illustrés par la figure 1:

1^{er} cas : les deux droites sont sécantes en un point I ; la droite D_3 est la droite (IM)

2^e cas : les deux droites sont parallèles ; la droite D_3 est la parallèle à D_1 passant par

M

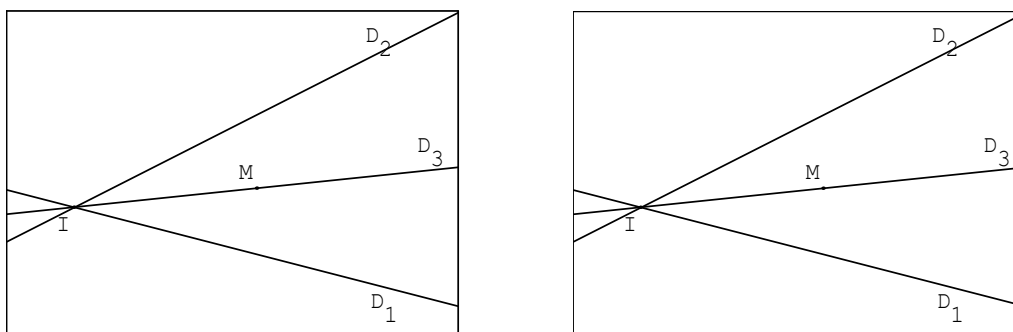


FIGURE 1

Il se pose un problème pratique pour un dessinateur si les deux droites D_1 et D_2 se coupent en dehors de la feuille de papier ou s'il ne sait pas si les deux droites D_1 et D_2 sont parallèles ou non (on n'a pas de méthode générale permettant de le savoir).

Il existe alors une méthode qui permet de construire la troisième droite D_3 quelle que soit la situation.

Existence par construction:

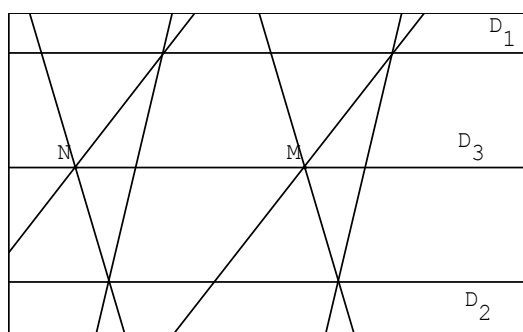


FIGURE 2

On construit un triangle dont un sommet est M .

On construit alors un second triangle comme suit:

- d'abord un côté parallèle au côté ne passant pas par M du premier triangle; ce côté coupe D_1 et D_2 en deux points qui seront des sommets de ce second triangle;

- puis on trace par ces sommets les parallèles aux deux autres côtés passant par M du premier triangle; ces deux autres côtés du second triangle se coupent en N .

La droite (MN) est la droite D_3 .

Autre exemple:

Montrer que l'équation $x^3-3x+5=0$ admet deux solutions distinctes.

Existence sans construction:

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

On obtient le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	↗		↘	↗

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $f(x) > 0$ sur $[-3; -1]$, et comme :

$f(-3) = -13 < 0 < f(-1) = 7$ il existe a élément de $] -3; -1[$ tel que $f(a)=0$. Mais le théorème ne donne pas de construction de a. Cependant la méthode de dichotomie permettrait une construction approchée.

Autre exemple:

Montrer que l'équation $3x^2-2x-1=0$ admet deux solutions distinctes.

Existence avec construction:

Les formules d'un théorème donnent les deux seules solutions :

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 3} = 1 \text{ et } \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 3} = -\frac{1}{3}$$

2. Le constructivisme et l'axiome de choix¹⁵

L'**axiome du choix** en mathématiques admet la propriété suivante.

On suppose qu'on a un ensemble quelconque I et qu'on peut associer à tout élément i de I une partie A_i non vide de A (A étant un autre ensemble quelconque). Alors l'axiome du choix affirme qu'il existe une application f (un choix f) de I dans A qui à chaque élément i de I associe (choisit pour image) un élément a de A_i .

Reformulons cet axiome: si on peut "indexer" des parties de A avec un ensemble d'index I, alors on peut choisir dans chaque partie indexée un élément. *L'axiome du choix ne dit pas comment se fait ce choix. C'est ce qui pose problème aux constructivistes qui refusent d'admettre l'axiome du choix.*

Prenons un exemple vulgarisée. Supposons que toutes les classes de lycées de France soient numérotées. Alors l'axiome du choix dit que dans chaque classe, on peut choisir un élève. Dans le cas de cet exemple, on peut construire une procédure de

¹⁵ exposé de Richard Cabassut

choix: prendre le premier élève sur la liste alphabétique ou encore un autre choix prendre l'élève de la classe dont le numéro de sécurité sociale est le plus petit. On voit la difficulté du choix lorsque l'ensemble est infini et qu'il n'y a pas de relation d'ordre sur cet ensemble (donc il n'y a pas de premier ou de plus petit).

A partir de l'axiome du choix, on déduit deux résultats importants: le théorème de Zermelo et le lemme de Zorn.

Le théorème de Zermelo: tout ensemble peut être bien ordonné.

Ceci signifie que sur tout ensemble quelconque on peut construire une relation d'ordre (on peut mais on ne dit pas comment, c'est-à-dire il n'y a pas de construction de cette relation d'ordre). Cette relation d'ordre est une relation d'ordre total, c'est-à-dire qu'on peut classer les éléments: on peut toujours dire que parmi deux éléments l'un est plus petit que l'autre. Cette relation est un bon ordre, c'est-à-dire que chaque partie (non vide) de cet ensemble admet un plus petit élément (ou un premier).

On peut alors se poser la question: tout ensemble admet-il un élément maximal (qu'on pourrait appeler un Dieu mathématique)?

Le lemme de Zorn donne une condition d'existence d'un élément maximal (c'est-à-dire une condition d'existence d'un Dieu mathématique). Attention cet élément maximal n'est pas obligatoirement unique (le Dieu mathématique n'est pas obligatoirement unique).

Le lemme de Zorn: tout ensemble ordonné inductif (c à d un ensemble ordonné pour lequel tout sous ensemble totalement ordonné admet une borne supérieure) admet au moins un élément maximal. Vulgarisons avec un exemple.

L'intervalle $[0 ; 1]$ est un ensemble ordonné inductif. Il admet 1 pour élément maximal.

L'intervalle $[0 ; 1[$ n'est pas un ensemble ordonné inductif. Il n'admet pas d'élément maximal.

Dans ce dernier cas on est tenté de « compléter » $[0 ; 1[$ par 1 pour former le nouvel ensemble $[0 ; 1]$ qui admet un élément maximal. L'élément avec lequel on complète n'est pas toujours de même nature que les autres éléments de l'ensemble. Par exemple, l'ensemble des nombres rationnels inférieur à $\sqrt{2}$ peut être complété par le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ pour admettre un élément maximal. De même l'ensemble des entiers naturels peut être complété par ∞ pour admettre un élément maximal.

Répondre sous quelles conditions on peut compléter par un élément maximal c'est donc donner des conditions pour qu'un « Dieu mathématique » existe, sachant que ce **Dieu** sera de nature différente des autres éléments dont il est **Dieu**.