Fiabilité et Multimoteurs

Jean Moreau de Saint-Martin

La recherche d'une plus grande fiabilité est une des raisons de mettre plusieurs moteurs sur des appareils tels que des avions, mais cela a pu donner lieu à quelques controverses. Plus il y a de moteurs, plus cela donne de ressources, mais aussi plus cela donne d'occasions de pannes ! Et on peut se trouver devant des résultats un peu paradoxaux, ou du moins inattendus, quand on calcule les probabilités de non-défaillance.

Certes, le bon sens ne perd pas ses droits : de deux avions capables de voler sur un seul moteur, le trimoteur serait plus sûr que le bimoteur ; mais celui-ci est plus sûr qu'un trimoteur qui ne peut pas voler avec deux moteurs en panne (on suppose ici, comme dans toute la suite, que le risque de panne au cours d'un vol est le même pour tous les moteurs). Quant à comparer deux avions (bimoteur et quadrimoteur) pouvant voler avec la moitié de leurs moteurs en panne, le résultat dépend du risque de panne d'un moteur ; s'il est faible (cas normal), le quadrimoteur est plus sûr que le bimoteur ; mais si ce risque dépassait 1/3 (on n'en est heureusement plus là, avec les progrès faits depuis Clément Ader !), l'avantage reviendrait au bimoteur.

Pour étendre les résultats ci-dessus, Edith Kosmanek a demandé (dans la revue **Quadrature** de mars-avril 1990) s'il y avait une *formule générale* pour comparer la fiabilité de deux types d'avion. La réponse est oui, comme on va le voir.

L'avion A va être décrit par la donnée de son nombre m de moteurs, et du nombre minimal f de moteurs dont il a besoin pour pouvoir se maintenir en vol. Les données analogues pour l'avion B sont n et g. La probabilité de panne d'un moteur est p, et je noterai $1 - p = q$.

Le nombre de moteurs de A qui tombent en panne au cours d'un vol est une variable aléatoire X_A suivant la loi binomiale de paramètres m et p c'est-à-dire

$$\text{proba}(X_A = k) = C_m^k p^k q^{m-k} \ ,$$

d'où la probabilité globale de non-défaillance pour A :

$$F_A = \text{proba}(0 \leq X_A \leq m - f) = \sum_{k=f}^{m} C_m^k p^{m-k} q^k,$$

et de même pour B :

$$F_B = \sum_{i=g}^{n} C_n^i p^{n-i} q^i \ .$$

Il s'agit de comparer F_A et F_B.

Si $m = n$, la comparaison est immédiate, l'une des sommes se réduisant aux termes communs. La différence $F_A - F_B$ a le signe de $(g - f) = (m - f) - (n - g)$; le type le plus sûr est le moins « exigeant » (en nombre minimal f ou g de moteurs en état), ou encore le plus « tolérant » (en nombre maximal $m-f$ ou $n-g$ de moteurs en panne).

Mais nous cherchons une formule générale; supposons par exemple $m > n$. Quelques transformations vont permettre d'identifier de nouveau des termes communs dans les deux expressions F_A et F_B.

L'expression F_A est un polynôme homogène de degré m en p et q. Donnons à F_B la même propriété en le multipliant par $(p+q)^{m-n}$ qui vaut 1.

$$(p+q)^{m-n} = \sum_{j=0}^{m-n} C_{m-n}^j p^{m-n-j} q^j ,$$

d'où F_B comme polynôme de degré m :

$$F_B = \sum_{k=g}^{m} p^{m-k} q^k \sum_{i=g}^{n} C_n^i C_{m-n}^{k-i} ,$$

en admettant que $C_a^b = 0$ si b est extérieur à $[0, a]$. Mettons maintenant les termes de F_A sous la même forme, grâce à l'identité bien connue

$$C_m^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_{m-n}^{k-i}$$

(considérer par exemple le développement de $(1+x)^m = (1+x)^n (1+x)^{m-n}$).

$$F_A = \sum_{k=f}^{m} p^{m-k} q^k \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_{m-n}^{k-i} .$$

Si $g \geq f$, tous les termes (i, k) de F_B se trouvent dans F_A. Le type A est le plus sûr, c'est aussi le plus « tolérant » au sens donné plus haut à cette expression, car $n - g < m - f$; en même temps il n'est pas plus « exigeant » car $f \leq g$.

Si $f > g$, les termes communs (i, k) correspondent à $f \leq k \leq m$ et $g \leq i \leq n$, et on obtient pour la différence

$$F_A - F_B = \sum_{k=f}^{m} \sum_{i=0}^{g-1} p^{m-k} q^k C_n^i C_{m-n}^{k-i} - \sum_{k=g}^{f-1} \sum_{i=g}^{n} p^{m-k} q^k C_n^i C_{m-n}^{k-i} .$$

En outre, dans la première somme, les termes non nuls vérifient

$$k \leq m - n + i \leq m - n + g - 1 ,$$

ce qui permet d'écrire, avec $k = g + j$,

$$\frac{F_A - F_B}{p^{m-g} q^g} = \sum_{j=f-g}^{m-n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j \sum_{i=0}^{g-1} C_n^i C_{m-n}^{g-i+j} - \sum_{j=0}^{f-g-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j \sum_{i=g}^{n} C_n^i C_{m-n}^{g-i+j} .$$

Si $m - n > f - g > 0$, le second membre est un polynôme en q/p de degré $m - n - 1$ (> 0), avec un seul changement de signe dans la suite de ses coefficients. Conformément à un théorème de DESCARTES, ce polynôme a exactement une racine positive u (fonction implicite de m, n, f, g).

Il est positif (donc A est le plus sûr) si $q/p > u$, ou $0 < p < 1/(1+u)$.

Il est négatif (donc B est le plus sûr) si $q/p < u$, ou $1/(1+u) < p < 1$.

Un des types (ici A) est alors à la fois le plus « tolérant » et le plus « exigeant ». C'est le seul cas où le résultat dépend de p. En effet, les termes négatifs disparaissent si $m-n \geq 0 \geq f-g$ (A n'est pas moins « tolérant » ni plus « exigeant ») ; de même, les termes positifs disparaissent si $f-g \geq m-n \geq 0$ (A n'est pas moins « exigeant » ni plus « tolérant »).

On peut résumer le résultat de la discussion par les règles suivantes :

— le plus « tolérant » n'est pas le moins sûr, sauf s'il est aussi le plus « exigeant » et si p dépasse la valeur-limite $1/(1+u)$;

— à « tolérance » égale, le moins « exigeant » est le plus sûr.

Autre formulation équivalente :

— le moins « exigeant » n'est pas le moins sûr, sauf s'il est aussi le moins « tolérant » et si p est inférieur à la valeur-limite $1/(1+u)$;

— à « exigence » égale, le plus « tolérant » est le plus sûr.

La valeur-limite peut être explicitée quand $m - n = 2(f - g) = \pm 2$, cas où le polynôme se réduit au premier degré :

$$p_{\text{limite}} = (f + g - 1)/(m + n) \ .$$

Jean MOREAU DE SAINT-MARTIN
Ancien élève de l'Ecole Polytechnique
jean.moreau-de-saint-martin@polytechnique.org