APERÇU HISTORIQUE DE L'ÉVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DES VECTEURS EN FRANCE DEPUIS LA FIN DU XIXe SIÈCLE

Cissé BA, Jean-Luc DORIER

Résumé : Le présent texte s'insère dans un projet plus global d'une thèse en cours sur les liens entre mathématiques et physique dans l'enseignement. Cet article présente une analyse de l'histoire de l'enseignement des vecteurs en France depuis leur timide apparition dans les programmes des classes du secondaire à la fin du XIXe jusqu'à nos jours. Le cadre théorique sur lequel s'appuient nos analyses s'inspire de l'écologie des savoirs tel qu'elle a été développée par Yves Chevallard (1994). Au-delà de l'intérêt historique, nous voulons ainsi éclairer un domaine de l'éducation mathématique, qui ne cesse de rétrécir au fur et à mesure des réformes récentes, et dont le lien avec l'enseignement de la physique, s'il paraît naturel aux deux parties, semble néanmoins ne pas pouvoir réellement servir d'appui efficace pour les enseignants de l'une et l'autre discipline.

Mots-clés : Vecteur – Enseignement – Programme – Histoire – Niche – Habitat.

Introduction

Même si l'on retrouve des traces du parallélogramme des forces dès l'antiquité, l'origine du vecteur est à chercher dans des périodes beaucoup plus récentes. La critique de Leibniz de la géométrie de Descartes, qui prônait la recherche d'une caractéristique purement géométrique qui puisse s'appliquer aux positions de la même façon que l'algèbre s'applique aux grandeurs, est restée vaine pendant plus d'un siècle. C'est vraiment avec l'interprétation géométrique des quantités imaginaires et le désir de généralisation à l'espace, que le concept de vecteur se fait jour dans le courant du XIXe, à la croisée de l'algèbre et de la géométrie, puis dans les applications à la physique (CROWE, 1967 et FLAMENT, 1997 et 2003). De même, les liens qui ont uni la genèse du calcul vectoriel et l'élaboration de l'algèbre linéaire sont aussi plus complexes et plus ténus qu'ils n'en ont l'air (DORIER, 1997, 1ère partie).

Notre propos n'est pas ici de retracer l'histoire des vecteurs, nous renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages cités ci-dessus. Nous nous intéressons plutôt à l'histoire de l'enseignement des vecteurs en France depuis leur timide apparition dans les programmes des classes du secondaire à la fin du XIXe jusqu'à nos jours. Au-delà de l'intérêt historique, nous voulons ainsi éclairer un domaine de l'éducation mathématique, qui ne cesse de rétrécir au fur et à mesure des réformes récentes, et dont le lien avec l'enseignement de la physique, s'il paraît naturel aux deux parties, semble néanmoins ne pas pouvoir réellement servir d'appui efficace pour les enseignants de l'une et l'autre discipline.

Nous allons étudier dans cet article les différentes places occupées par le vecteur dans les programmes qui se sont succédés depuis la réforme de 1852. La question initiale que nous nous posons porte sur les conditions qui ont amené à faire vivre et évoluer les vecteurs dans l'enseignement secondaire français. Du point de vue théorique de l'analyse, nous nous situons dans une perspective écologique, c'est-à-dire que nous identifions l'évolution de l'habitat et des niches des vecteurs, selon les termes définis par CHEVALLARD (1994) dans son approche de l'écologie didactique des savoirs :

> *Les écologistes distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce.* (Op. cité, p. 142).

À la suite de CHEVALLARD, ARTAUD (1997) montre alors comment un objet émerge et peut vivre dans un écosystème didactique.

> *Pour qu'un objet O émerge dans un écosystème didactique, il est nécessaire qu'existe un milieu pour cet objet, c'est-à-dire un ensemble d'objets connus (au sens où il existe un rapport institutionnel non problématique) avec lesquels O viendra se mettre en interrelation. Cette condition est à mettre en rapport avec une condition citée plus haut, la loi du tout structuré, dont je rappelle l'énoncé : un objet mathématique ne peut exister seul ; il doit venir prendre place dans une organisation mathématique, organisation qu'il faut faire exister. La nécessité qu'existe un milieu dit alors que cette émergence d'une organisation mathématique ne peut se faire ex nihilo. Il faut prendre appui sur des organisations, mathématiques ou non mathématiques, déjà existantes.* (Op. cité, p. 124).

L'analyse écologique permet alors de mettre à jour un réseau de conditions et de contraintes qui vont déterminer la place que peut occuper l'objet vecteur et son évolution au cours des changements de programmes en prenant en compte le fonctionnement global des institutions scolaires où il intervient, mais aussi d'institutions plus larges liées au fonctionnement du savoir savant chez les mathématiciens ou les physiciens.

Nous allons procéder par ordre chronologique depuis 1852 jusqu'à nos jours, en différentes phases qui correspondent aux grandes réformes scolaires. Notons que nous ne nous attarderons pas trop sur les réformes les plus récentes, qui sont mieux connues des lecteurs et ont fait l'objet d'analyses fines dans des travaux que nous citerons en conclusion, en débouchant sur quelques réflexions didactiques qui orientent un travail en cours.

1. Les débuts (1852 – 1925)

1852 – Une première référence au mot vecteur

Les astronomes avaient pour habitude de parler de *tourbillon vecteur* pour désigner le mouvement d'une planète et de *rayon vecteur* pour désigner le segment qui joint le foyer de la conique décrivant la trajectoire de la planète à une position sur l'orbite. L'emploi du terme *rayon vecteur* s'est ensuite généralisé en géométrie, mais n'a finalement rien à voir avec le vecteur tel qu'on l'entend actuellement. C'est pourtant dans cette expression qu'il apparaît pour la première fois dans des programmes de mathématiques du secondaire en 1852 (pour la classe de première), suite à la réforme dite de la « bifurcation ». C'est une réforme à visée exclusivement utilitaire comme le rappellent GISPERT et HULIN (2000) :

> *Avec cette réforme, un double but est poursuivi : réserver aux sciences une place plus importante (compte tenu de leur développement), mais aussi constituer un enseignement plus approprié aux besoins de la société productive. L'enseignement est alors marqué par une conception utilitaire et tournée vers les applications. Jean-Baptiste Dumas, l'un des protagonistes de la réforme, explique qu'il convient de « réduire la géométrie aux propositions vraiment usuelles, l'algèbre à ce qu'il faut pour étudier les éléments de physique et de mécanique ».* (Op. cité, p.1).

Cette citation montre que la conception dominante au niveau de l'enseignement des sciences était plutôt d'ordre utilitaire. Les mathématiques sont avant tout vues comme une discipline au service des autres. C'est pourquoi, il faudra attendre le début du XX[e] siècle pour voir le concept de vecteur, encore en cours de constitution, apparaître dans l'enseignement secondaire. C'est la même année, en 1852, qu'apparaît en mécanique la composition des forces, des vitesses et des mouvements, avec une allusion au parallélogramme des forces et à la composition des forces concourantes ou parallèles. Mais le lien avec la notion de vecteur n'était pas encore clair.

La réforme de 1902 : apparition du vecteur en géométrie

À l'orée du XX[e] siècle, les conceptions épistémologiques sur l'enseignement des sciences change. En 1902, une réforme inspirée par des enseignants du supérieur (comité présidé par DARBOUX pour les mathématiques), donne une nouvelle vision de l'enseignement des sciences. Cette réforme opérée dans l'enseignement secondaire vise à faire des sciences des humanités au même rang que les humanités classiques. Elles doivent contribuer à former l'homme et le citoyen.

> *L'accroissement notable de la place accordée aux sciences, et en particulier à la physique, s'accompagne d'un discours sur l'apport spécifique des diverses disciplines tout en soulignant l'unité de la science.* (GISPERT et HULIN, 2000, p. 2).

Lors de cette réforme, le terme rayon vecteur disparaît des programmes laissant la place à la notion de vecteur défini comme segment orienté. Jusque-là confinée dans le monde savant, la notion de vecteur va commencer à pénétrer dans les programmes de première en mécanique et en cinématique. Les points abordés sont : les projections, la somme et la différence de vecteurs concourants, le théorème des projections, le moment linéaire. En statique et dynamique, on parle de travail des forces (produit scalaire). Le vecteur entre donc dans l'enseignement secondaire par l'habitat paraphysique et trouve une niche dans la représentation de grandeurs physiques. C'est une réforme qui consacre la place des mathématiques dans la connaissance de la nature. Lors de cette réforme majeure de 1902, les concepteurs des programmes accordent une importance accrue à la collaboration entre les professeurs des deux disciplines. D'ailleurs, l'intérêt de cette collaboration est souligné par une circulaire de 1909 :

> *Il serait bon [..] que les professeurs de mathématiques et les professeurs de physique d'un même établissement se prêtassent un mutuel appui. Le professeur de physique doit, à chaque instant, savoir à quel degré d'avancement se trouve l'éducation mathématique de ses élèves et réciproquement, le professeur de mathématiques a tout intérêt à ne pas ignorer quels exemples il peut choisir, dans les connaissances expérimentales déjà acquises, pour illustrer les théories qu'il a expliquées d'une façon abstraite.* (Op. cité, p. 3).

La surcharge des programmes est dénoncée par les enseignants qui demandent et obtiennent des allégements en 1905. Ainsi, les vecteurs passent de la première à la Terminale dans l'habitat de la géométrie pour se constituer en outils pour la physique (ce qui constitue leur niche).

> *En mécanique, […] le professeur devra éviter tous les développements et les exercices présentant uniquement un intérêt géométrique ; c'est pour supprimer toute occasion de développements de ce genre que les théorèmes se rapportant aux vecteurs ont été réduits au minimum indispensable et transportés dans le programme de géométrie, où ils se présentent*

> *sous leur véritable jour.* (Instruction du 27 juillet 1905 relative à l'enseignement des mathématiques, p. 676)

Les vecteurs se retrouvent donc « basculés » de la physique dans la géométrie en réponse à un problème purement didactique.

1925 – Un nouvel habitat potentiel

En 1925, sans être explicitement au programme, les vecteurs apparaissent au niveau de la classe de troisième, pour la représentation des nombres relatifs comme « notions concrètes sur les nombres positifs et négatifs » en arithmétique :

> *La définition des nombres positifs et négatifs, au moyen des grandeurs mesurables susceptibles de sens, n'offre pas de difficultés spéciales. Leur correspondance avec des vecteurs portés par un axe n'en présente guère plus […] l'appel à la représentation des nombres algébriques sur un axe donne une solution tout à fait satisfaisante de ces difficultés, du point de vue théorique tout au moins.* (Instructions pour les programmes de 1925)

On voit ainsi que l'habitat potentiel des vecteurs en classe de troisième est l'arithmétique et la représentation des grandeurs mesurables susceptibles de sens leur tient lieu de niche. C'est un fait tout à fait nouveau.

Pour la terminale, les vecteurs apparaissent à présent en trigonométrie, avec un contenu quasiment inchangé « Théorie des projections. Somme géométrique des vecteurs. Formule d'addition pour le sinus, le cosinus et la tangente. » L'intervention des vecteurs en cinématique est plus précise : le vecteur vitesse est clairement nommé, les vitesses moyenne et à un instant donné sont définies comme des vecteurs. Le vecteur accélération est évoqué dans le cas particulier du mouvement circulaire. Pour les forces appliquées à un corps solide, le centre de gravité est introduit en liaison avec le centre des forces parallèles. Les vecteurs ont donc trouvé une légitimité à l'intérieur même des mathématiques, et s'y nichent comme outils pour établir les formules de trigonométrie. Cette introduction des vecteurs dans un titre de trigonométrie est jugée bénéfique par les instructions relatives à l'enseignement de la statique :

> *En statique, la confusion qui se produisait si souvent, entre les propriétés des systèmes de forces et celles des systèmes de vecteurs associés, disparaîtra avec l'étude générale de ces derniers.*

Ainsi le statut géométrique des vecteurs se renforce et leur niche dans cet habitat se consolide dans le rapport à la trigonométrie.

2. Une évolution lente (1937-1967)

1937-38 – L'habitat arithmétique se concrétise

En 1937-38, en classe de quatrième, en algèbre et arithmétique, les vecteurs sur un axe sont introduits avec la question de l'orientation et du repérage sur l'axe réel et la relation de Chasles. La projection de vecteurs de même direction sur un autre axe apparaît comme une illustration de la multiplication des nombres relatifs. Il s'agit toujours de vecteurs liés (segments orientés) de même direction avec la notation $\overrightarrow{AB}$.

Figurent aux programmes :

✓ les notions de droites orientées ou axes, de vecteur unitaire, de direction orientée,

- ✓ de mesure algébrique d'un vecteur sur un axe ou parallèle à une direction donnée (notée $\overline{u}$, la relation de Chasles étant traitée),
- ✓ de somme géométrique de deux vecteurs de même direction, de somme algébrique de leurs mesures,
- ✓ de repérage sur une droite : abscisse d'un point sur une droite orientée comportant un point origine, changement d'origine,
- ✓ mesure d'un vecteur vue comme accroissement de l'abscisse de l'origine à l'extrémité, abscisse du milieu du segment,
- ✓ interprétation géométrique des inégalités, position d'un point par rapport à un segment.

On peut noter aussi que l'homothétie est introduite à partir de segments interceptés sur deux parallèles par des sécantes concourantes. La définition de l'homothétique d'un point est donnée à l'aide de mesures algébriques. Ce sont donc réellement les mesures algébriques qui sont en jeu, plus que les vecteurs.

Le contenu sur les vecteurs en trigonométrie apparaît à présent au niveau de la première.

Les habitats et les niches n'ont pas changé, sauf que l'habitat algébrique se renforce tout en montrant qu'il reste limité à la dimension 1 et que l'habitat trigonométrique est descendu d'un niveau. Dans l'habitat algébrique, c'est la multiplication par un scalaire qui est importante.

Mais c'est seulement en 1942, que les entités vectorielles commencent à investir le champ de l'enseignement secondaire de la physique avec la représentation vectorielle d'une force en seconde. Cependant, l'articulation entre les concepts de vecteur et de grandeur physique vectorielle n'y est pas explicitée, mais on commence déjà à relever des difficultés des élèves à propos des grandeurs vectorielles.

1947 – Un pont entre les deux habitats

En 1947, pas de changements majeurs. Tout d'abord, en seconde, en algèbre, apparaît une révision du programme de quatrième et un prolongement au repérage dans le plan et en géométrie : « Rapport de deux vecteurs parallèles, point divisant un segment dans un rapport donné, théorème de Thalès. » L'homothétie plane est introduite, en vue de donner les figures homothétiques d'une droite et d'un cercle, propriétés qui seront réinvesties dans l'étude du périmètre du cercle. L'emploi des vecteurs à son sujet n'est pas imposé.

En première, le vecteur sort de la trigonométrie et revient en géométrie, avec pour la première fois les termes de « vecteurs équipollents » qui servent à définir la translation, et de « rapport de deux vecteurs parallèles » qui sert à introduire vectoriellement l'homothétie, somme et différence vectorielle, projections et mesure algébrique, dans un plan orienté, angles orientés de vecteurs ou de droites. On retrouve une allusion aux vecteurs dans la partie trigonométrie : la somme géométrique des vecteurs est introduite pour faciliter l'établissement des formules donnant le cosinus ou le sinus de la différence ou de la somme de deux arcs. L'utilisation du vecteur en cinématique s'amplifie avec l'introduction des notions de vecteur vitesse et de vecteur accélération que l'on retrouve en mathématiques en terminale scientifique.

On voit donc que les mêmes habitats et niches demeurent par rapport à la période précédente. Sauf que la trigonométrie disparaît comme habitat de référence au profit d'un élargissement dans la géométrie.

Mais surtout un pont est fait entre les deux habitats jusqu'alors disjoints de l'algèbre et de la géométrie, par le théorème de Thalès qui associe géométrie et mesure algébrique. Ainsi le vecteur géométrique s'algébrise, la multiplication par un scalaire prend de l'importance, et l'équipollence qui apparaît pour la première fois devient nécessaire pour une bonne définition des opérations.

1957 – Statu quo

De 1957 à 1967, on retrouve le vecteur en physique en classe de première à propos d'électromagnétisme : il y est défini comme un segment de droite orienté, ayant une origine et une extrémité ; son traitement est le plus souvent, sinon exclusivement, analytique. Un usage des vecteurs est fait aussi en cinématique qui reste un domaine d'étude en mathématiques en classe de première C, avec les notions de vecteur vitesse et de vecteur accélération dans l'étude des mouvements rectilignes et des mouvements circulaires uniformes. Dans ce contexte, tous les calculs, portent sur les coordonnées cartésiennes qui sont fonctions du temps. En seconde, les vecteurs apparaissent en géométrie, on y reprend les segments orientés vus en troisième. Ceci comprend l'équipollence, l'addition et ses propriétés, les projections et leur effet sur la somme et la différence de vecteurs, la multiplication d'un vecteur par un nombre ; de plus, les translations et homothéties sont définies par des vecteurs.

C'est en première, que la distinction entre vecteurs liés équipollents et vecteur libre[1] est faite. Les applications des vecteurs à la géométrie et à la cinématique prennent de plus en plus d'importance : pour la première fois on aborde le barycentre de deux points et le produit scalaire de deux vecteurs avec ses propriétés. C'est à ce niveau aussi, qu'on note un intérêt grandissant pour l'utilisation des vecteurs en géométrie analytique qui en est un passage obligé.

On peut donc dire que, dans cette période, les habitats et niches restent inchangés alors que l'outil vectoriel s'impose de plus en plus.

3. Période des mathématiques modernes (1968-1985)

La réforme

Face à la nécessité et à l'urgence de rénover l'enseignement secondaire et particulièrement celui de la géométrie, on assiste à partir des années 1970 à une réforme en profondeur des contenus d'enseignement sous l'influence du mouvement dit des mathématiques modernes. Cette réforme est mise en œuvre et soutenue de manière radicale par des universitaires dont l'une des figures de proue est Jean DIEUDONNÉ, qui, en 1964, dans un ouvrage intitulé « Algèbre linéaire et géométrie élémentaire », défend fortement sa vision de la réforme concernant l'enseignement de la géométrie, avec souvent un ton polémique.

> *Ce volume donne un exposé détaillé et complet des notions et théorèmes d'algèbre linéaire élémentaires qui devraient constituer le bagage minimum du bachelier ès sciences au moment où il entre dans les classes du 1^er^ cycle de l'enseignement supérieur. L'orientation générale et la substance en ont été déterminées par le souci de préparer l'étudiant à assimiler le plus facilement possible l'enseignement actuel donné dans ces classes, qui devrait lui apparaître*

[1] Ce vocabulaire qui permet de distinguer le segment orienté de la classe d'équipollence a disparu avec les mathématiques modernes. Les termes de *libre* et *lié* n'ont rien à voir ici avec les notions de famille libre ou liée de l'algèbre linéaire.

> *comme le prolongement naturel de ce qu'il a déjà appris. Le fait qu'à l'heure présente, il n'y a sans doute pas un bachelier sur mille qui serait en état de lire ce livre sans aide et sans fournir un travail personnel considérable en dit long sur l'incohérence de nos programmes d'enseignement.* (Op. cité, p. 7).

De cet argumentaire, DIEUDONNÉ déduit qu'il ne faut enseigner dans le secondaire que ce qui prépare au supérieur (sans élitisme !). Ainsi, il faut préparer les élèves à l'algèbre linéaire qui unifie la géométrie synthétique et la géométrie analytique, riche en applications les plus variées et qui est la base de la plupart des notions enseignées en propédeutique (premières années d'université).

> *Il me semble qu'il y a intérêt à familiariser le débutant le plus tôt possible avec les notions essentielles de cette discipline, à lui apprendre à « penser linéairement », ce qui est d'autant plus facile qu'il y a peu de notions, en mathématiques, qui soient plus simples à définir que celles d'espace vectoriel et d'application linéaire. A notre époque de prolifération intense dans toutes les sciences, tout ce qui condense et tend à l'unification a une vertu qu'on ne saurait surestimer. […] D'autre part, j'ai cherché à résister à la tentation d'introduire prématurément les théories qui seront enseignées à l'Université. Il me semble que la nature nous a heureusement fourni « une ligne de démarcation » toute tracée, en nous douant de l'intuition géométrique pour les espaces à 2 et 3 dimensions ; il est donc possible de représenter graphiquement tous les phénomènes de l'Algèbre linéaire limités à ces deux dimensions (et bien entendu aux scalaires réels).* (Op. cité, p. 12-14).

On voit bien que DIEUDONNÉ se soucie beaucoup plus de la nature unificatrice de l'Algèbre linéaire permettant ainsi de présenter la géométrie élémentaire avec toute la rigueur mathématique qui lui sied. Pour lui, l'intérêt de la géométrie dans l'enseignement secondaire tient en ce qu'elle représente un :

> *[…] merveilleux laboratoire où se familiariser avec des cas particuliers d'aspect fort simple et susceptibles d'images concrètes, de notions dont l'essence est beaucoup plus générale mais aussi beaucoup plus abstraite, et qu'il faudra assimiler sous cette forme générale plus tard ; il serait vraiment dommage de ne pas profiter au maximum de cette heureuse circonstance.* (Ibid., p. 14)

En revanche, CHOQUET (1964), qui a aussi joué un rôle dans cette réforme, tout en étant en retrait voire opposé aux Bourbaki, conçoit l'enseignement de la géométrie pour les jeunes enfants non pas comme un enseignement déductif mais plutôt basé sur l'observation et ayant pour but l'élaboration des concepts fondamentaux à partir de l'expérience. Il pense que la « voie Royale » qui modélise l'espace géométrique comme un espace affine euclidien de dimension 3 n'est pas accessible directement à des élèves de moins de 17 ans, et propose une axiomatique intermédiaire.

CHOQUET prône

> *l'utilisation d'une axiomatique simple aux axiomes forts, c'est-à-dire donnant très vite accès à des théorèmes non évidents, et intuitifs, c'est-à-dire traduisant les propriétés de l'espace qui nous entoure faciles à vérifier.*(Op. cité, p. 10).

DELACHET (1967) reprend les points de vue développés dans ces deux ouvrages en les complétant :

> *L'ouvrage de Dieudonné utilise directement les notions d'espace vectoriel et de produit scalaire bien qu'il permette d'aller plus vite beaucoup plus loin, il nous paraît laisser un vide entre*

> *l'utilisation de la méthode expérimentale, la seule que l'on puisse employer avec des jeunes enfants et une initiation de la méthode axiomatique, qui nous semble bien adaptée aux élèves du second cycle de nos lycées.* (Op. cité, p. 7).

La position de DIEUDONNÉ, qui a dominé la réforme des mathématiques modernes, est un modèle idéologique du haut vers le bas : plaquer le modèle de l'espace euclidien normé pour l'introduction du vecteur au collège dans la perspective de l'enseignement de l'algèbre linéaire, et même plus loin de l'analyse fonctionnelle.

Dans ce contexte, le vecteur est introduit dès la classe de quatrième comme classe d'équivalence de bipoints équipollents. L'étude des propriétés algébriques doit faire apparaître, sans le dire, la structure d'espace vectoriel sous-jacente à l'espace géométrique (en commençant par la droite, puis le plan). Dans ce but, les résultats élémentaires de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie sont introduits dans les programmes du lycée dès la classe de seconde en 1969. En classe de première C, les vecteurs interviennent en géométrie vectorielle, mais le sens de ce mot s'élargit avec la nouvelle structuration du savoir mathématique :

> *[…] ce mot a recouvert longtemps une certaine description du monde physique, une énumération (parfois incomplètement explicitée) de propriétés que des raisons expérimentales lui faisaient attribuer, enfin - et c'est l'essentiel – l'étude des propriétés qui pouvaient être déduites des précédentes par un raisonnement logique. Il désigne dorénavant une construction mathématique, logique par nature, s'appuyant sur un système cohérent d'axiomes où interviennent au premier chef les structures algébriques (espaces vectoriels, groupes…) et topologiques (*$\boldsymbol{R}$*,* $\boldsymbol{R}^n$ *…).* (PRESSIAT, 1999, p. 204)

Dans cette organisation verticale, la géométrie devient une propédeutique à l'algèbre linéaire et le vecteur géométrique devient le prototype quasiment exclusif des espaces vectoriels. C'est une solution technique au problème idéologique de l'apprentissage de l'abstrait à partir du concret, qui impose une certaine stratégie d'exposition.

> *En effet, la nature du vecteur géométrique ne se résume pas à ses seules propriétés linéaires (parce qu'elles ne rendent compte ni de sa nature géométrique ni de l'aspect constitutif de la dialectique entre algébrique et géométrique, ni de l'importance de la multiplication vectorielle*[2] *dans la genèse du vecteur). C'est pourquoi l'introduction des axiomes d'espace vectoriel par leur vérification sur les vecteurs géométriques a pour intérêt essentiel de montrer que de tels ensembles abstraits existent à un niveau plus « familier ». Le choix du vecteur géométrique se justifie alors comme illustration, à condition d'être très explicite sur la fonction de cette illustration.* (DORIER, 2000, p. 53)

Autrement dit on assiste alors à une véritable linéarisation de la géométrie. Un des effets de ce choix est que des notions comme les sous-espaces vectoriels, les vecteurs linéairement dépendants ou indépendants et les bases constituent le fondement de cette nouvelle géométrie vectorielle. Elle va servir de point d'appui pour introduire la cinématique du point, avec entre autres, les notions de vecteur vitesse et de vecteur accélération en classe de terminale C.

Dans cette nouvelle organisation mathématique, les vecteurs vont occuper une nouvelle niche. Ainsi ils ont pour fonction de préparer les élèves à l'enseignement de l'algèbre linéaire, ils en seront le ferment et l'exemple central. Cette vision descendante de

---

[2] Que ce soit le produit scalaire ou le produit vectoriel.

l'organisation mathématique, caractéristique des mathématiques modernes, va conditionner et modeler l'organisation mathématique autour des vecteurs au collège.

En résumé, on voit que, pendant cette période, l'habitat « naturel » du vecteur est la géométrie et sa niche est de servir de fondement à la géométrie, mais surtout de préparer à l'algèbre linéaire.

On remarque alors une filiation directe mais lointaine avec les espaces de Hilbert enseignés quelques 5 ou 6 ans plus tard, et encore uniquement à une élite !

Critique de la réforme

Dès lors, l'aspect intuitif qui a eu un rôle déterminant dans la genèse du calcul vectoriel est abandonné (comme le souligne BOULIGAND (1944) c'est à la mécanique et à l'électromagnétisme qu'il appartient d'avoir mis l'élément vecteur au premier plan des préoccupations mathématiques) au profit de la théorie abstraite des espaces vectoriels.

> *[…] la nature du vecteur géométrique […] est l'aboutissement nécessaire d'une mise en rapport dialectique de la structuration algébrique et de l'intuition géométrique. Nous devons souligner ici que l'usage du terme « structuration algébrique » ne doit pas faire croire que le calcul vectoriel est par essence l'émergence de la théorie des espaces vectoriels en géométrie. En effet, il ne faut pas ici se laisser abuser par la similitude du vocabulaire. La théorie des espaces vectoriels est de nature axiomatique, les vecteurs algébriques ne sont pas construits, ils existent a priori et ne sont définis que par leurs propriétés structurelles. Le calcul vectoriel relève quant à lui d'une modélisation dynamique, l'objet se crée dans la combinaison algébrique en interaction avec l'intuition géométrique. De plus, le rôle de la multiplication a été fondamental dans la genèse du vecteur géométrique, alors que la structure linéaire ne comporte pas de produit.* (DORIER, 1997, p. 76-77)

Il semble alors qu'on a très peu tenu compte de cette interaction avec l'intuition géométrique dans l'étude du calcul vectoriel. C'est ce que souligne CHOQUET en 1973 :

> *Je suis effaré par ce je constate dans l'enseignement à l'école primaire et dans le premier cycle du secondaire. Certes j'ai été l'un des promoteurs de la réforme de l'enseignement mathématique, mais ce que je préconisais était simplement un élagage de quelques branches mortes et encombrantes, et l'introduction d'un peu d'Algèbre […] mais il y a eu toute une atmosphère nocive qui a accompagné leur mise au point : en particulier une attaque contre la géométrie et contre le recours à l'intuition ; on a dit aux enseignants qu'ils étaient minables s'ils étudiaient les triangles, que l'Algèbre linéaire remplaçait toute l'ancienne géométrie […]*
> (Cité par LICOIS, 2005, p. 17)

C'est ainsi que dès 1985 les programmes des lycées changent, en réaction aux choix bourbakistes. S'entame alors la période que l'on qualifiera de contre-réforme des mathématiques modernes. L'algèbre linéaire disparaît entièrement des programmes du secondaire. Commencée avec les programmes de la seconde indifférenciée de 1981, cette disparition atteint toutes les classes des lycées avec les programmes de 1985.

Les raisons de cette remise en cause des programmes des mathématiques modernes ont été en particulier soulignées par le rapport de la commission KAHANE (2000) :

> *[…] ce projet (tout linéaire), s'il pouvait sembler cohérent du point de vue mathématique, a été introduit sans qu'ait été menée une véritable réflexion didactique préalable. Il a conduit à un échec retentissant que ne suffit pas à expliquer l'impréparation du corps enseignant. Il*

semble y avoir, en effet des raisons didactiques essentielles qui font qu'une introduction précoce de l'algèbre linéaire n'est pas aussi simple que ne l'avaient pensé les collègues des années soixante. (Op. cité, p. 110).

Cependant, notons que la nouvelle définition du vecteur, comme élément d'un espace vectoriel issue de la nouvelle structuration de l'enseignement de la géométrie autour de l'algèbre linéaire, n'a pas eu d'incidence immédiate sur les pratiques enseignantes en physique, comme le souligne HULIN (1996) :

La coordination physique - mathématique se complique : à côté du décalage dans le temps entre l'enseignement de mathématiques et les besoins de l'enseignant de physique, il existe un décalage entre les mathématiques modernes enseignées et les mathématiques applicables utilisées dans l'enseignement de la physique. D'ailleurs un groupe sera créé à la charnière de la commission Lagarrigue et de la commission Lichnerowicz pour étudier les relations entre les deux enseignements. (Op. cité, p. 112).

Malgré la bonne volonté des réformateurs, il y aura un constat d'échec dans les enseignements des deux disciplines. Ce qu'exprime aussi BELHOSTE (1996) quand il dit :

Une réforme pilotée par l'enseignement supérieur en fonction de ses intérêts et de ses préoccupations et sans vision claire des missions propres du secondaire, était sans doute vouée dès le départ à l'échec, quelle que soit sa légitimité scientifique et la bonne volonté de ses promoteurs. (Op. cité, p. 37).

Les études des didacticiens de la physique par exemple mettent à jour certaines difficultés liées aux vecteurs et à leur utilisation en physique, et tentent d'éclaircir ce constat d'échec. C'est ainsi qu'en 1973, MALGRANGE, SALTIEL et VIENNOT réalisent une enquête par questionnaire auprès d'étudiants entrant en première année d'université pour chercher à caractériser les significations que ceux-ci attachent aux vecteurs et leur utilisation en physique. Parmi les difficultés repérées, la plus tenace concerne l'addition vectorielle, à laquelle s'ajoutent celles dues au langage de la physique qui ne distingue pas en général la grandeur vectorielle de la grandeur scalaire (la vitesse désigne aussi bien le vecteur vitesse que l'intensité de la vitesse). Ce qui fait dire à ces auteurs que :

[…] La présentation géométrique est sans doute plus proche de l'intuition de l'espace physique que réel. Elle permet de développer des « images mentales » (« on voit ce qui se passe ») dont l'importance dans les raisonnements est incontestable, quoique difficile à définir exactement. Elle permet, ou devrait permettre de résoudre des problèmes qualitativement (sans référence aux intensités). Elle est nécessaire lorsque le géométrique est seul en cause (problème de symétrie par exemple). Cependant, outre que ces divers aspects ne sont pas systématiquement exploités, s'en tenir à une présentation uniquement géométrique conduit aux défauts que nous connaissons. (Op. cité, p. 12).

En somme, ces auteurs attribuent ces difficultés à

l'influence trop grande d'une géométrie mal articulée sur l'algèbre et qui laisse dans l'ombre bien des aspects des relations entre forces, mouvements et géométrie des déplacements. (Ibid., p. 13).

On ne tardera pas à reconnaître les effets néfastes de l'abstraction au niveau du secondaire et le lien des mathématiques avec les autres disciplines sera mis en valeur : les nouveaux programmes [de 1978], et tout particulièrement leur partie géométrique, mettent l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves. La théorie n'est pas un but en soi, mais un outil pour répondre à des questions que pose la vie : technologie, physique, économie.

4. La contre réforme (de 1985 à 2006)

Suite à ce constat d'échec des mathématiques modernes dans les programmes d'enseignement secondaire, un processus de changement de point de vue s'est opéré : la théorie des espaces vectoriels qui servait de cadre d'étude à la notion de vecteur disparaît petit à petit des programmes du lycée laissant la place à un cadre géométrique plus « concret ». Dans le même sens, le texte du programme précise que : « Le calcul vectoriel ne doit pas constituer un terrain purement algébrique ; la maîtrise de ses relations avec les configurations joue un rôle essentiel pour la résolution des problèmes de géométrie ».

> *C'était oublier que le vecteur géométrique est algébrique par essence et que cette nature algébrique n'a nullement besoin de s'afficher par l'intermédiaire de l'espace vectoriel. Les opérations sur les vecteurs géométriques sont constitutives du concept même de vecteur géométrique :*
>
> ✓ *La longueur est la base de l'algébrique depuis les Grecs.*
>
> ✓ *Le sens (sur une même direction) est ce qui permet de considérer des grandeurs négatives incontournables dans la constitution de l'addition.*
>
> ✓ *La direction enfin est ce qui vient de l'idée de multiplication.*
>
> *Cette dernière hypothèse est plus difficile à comprendre. Mais regardons ce qu'est la multiplication de deux vecteurs. Dans l'algèbre géométrique des Grecs anciens, la multiplication de deux nombres (c'est-à-dire de deux segments) est l'aire d'un rectangle. Si l'on passe du rectangle au parallélogramme apparaît dans la formule de l'aire le sinus de l'angle formé par les deux côtés, c'est-à-dire la position relative de leurs directions (l'idée de négatif implique ici la prise en compte de l'orientation). Ainsi comme le souligne Grassmann dans l'introduction de l'Ausdehnungslehre, c'est le parallélogramme et non le rectangle qui symbolise le vrai concept de multiplication si l'on considère les grandeurs géométriques orientées (en direction et sens). Ce point de vue souligne l'importance de la direction des grandeurs géométriques dans l'idée de produit.* (DORIER, 2000, p. 79-80)

Ainsi, dans ces nouveaux programmes, le calcul vectoriel est présenté comme outil de résolution de problèmes de constructions géométriques ou comme pouvant servir aux enseignements en physique y afférant. Pour illustrer ce point de vue, on peut remarquer qu'en classe de première, on ne parle plus que de la pratique du calcul vectoriel avec des injonctions comme « tout point de vue axiomatique est exclu pour l'ensemble de la géométrie ». En terminale, le titre de « Outil vectoriel et configurations » en géométrie, est révélateur de ce processus de mise à l'écart de toute forme d'abstraction autour du concept de vecteur. Ainsi on peut noter que le caractère outil de l'objet mathématique vecteur se renforce, à savoir qu'il intervient plus fortement dans le cadre du processus d'étude d'autres objets mathématiques.

De même, la notion de vecteur est introduite en fin de collège de manière « naïve » en association avec la notion de translation. C'est un retour aux leçons de géométrie de HADAMARD (1898), qui traduit bien le lien naturel entre translation et vecteur quand il définit la translation :

> *Si, par tous les points d'une figure, on mène des droites égales, parallèles et de même sens, les extrémités de ces droites forment une figure égale à la première. [...] L'opération par laquelle*

> *on passe de la première figure à la seconde a reçu le nom de translation. On voit qu'une translation est déterminée quand on se donne en grandeur, direction et sens le segment tel que AA', qui va d'un point à son homologue. Aussi désigne-t-on une translation par les lettres d'un tel segment : on dit par exemple la translation AA'.* (Op. cité, p. 51).

Cependant, cette idée de droites parallèles masque souvent le lien entre mouvement de translation et translation mathématique que peu d'enseignants de mathématiques se soucient d'établir comme nous l'avons constaté dans notre travail (BA 2003). Pour autant, GIBBS (1901) avait défini le vecteur comme une translation et la liaison avec la mécanique était vite perceptible quand il énonce : *the typical vector is the displacement of translation in space*.

La cinématique, qui était le seul domaine des mathématiques permettant un pont entre mathématiques et physique, est reléguée comme secteur à part entière du programme de mécanique de la classe de seconde de physique. Cependant, l'utilisation du vecteur se généralise dans les programmes de physique du secondaire. La force, grandeur vectorielle modélisant l'action mécanique d'un objet sur un autre, voit ses caractéristiques explicitées et formellement représentées dans tous les manuels scolaires et la modélisation de la vitesse correspond à un vecteur au sens mathématique de vecteur libre.

On note ici que l'aspect outil des concepts vectoriels prime sur leur aspect objet.

Ainsi l'algèbre linéaire disparaît des programmes du secondaire, le vecteur géométrique reste introduit dans les classes de quatrième et de troisième mais avec interdiction à des références à l'algèbre linéaire. L'addition vectorielle doit être reliée à la composition des translations. La géométrie des figures revient en force. En classe de seconde, par exemple, il est précisé que tout point de vue axiomatique est à bannir en géométrie. La pratique des figures occupe une place centrale et le lien avec l'ordinateur est souligné. Le calcul vectoriel ne doit pas constituer un terrain d'activités purement algébriques, ce qui est essentiel, c'est de mettre en œuvre les vecteurs sur les configurations et les transformations. Il est précisé aussi que l'intérêt de la notion de vecteur ne se limite pas à la géométrie. Cet intérêt pouvant être illustré par des exemples issus de la physique. Les mêmes objectifs sont poursuivis en classe de première S avec la poursuite du calcul vectoriel dans le plan et l'extension à l'espace.

On voit donc que le vecteur retrouve un habitat réduit en géométrie et une niche pour l'illustration de la physique et comme outil performant pour faire de la géométrie. La référence à l'algèbre (que ce soit par l'algèbre linéaire ou par les grandeurs orientées, comme on l'a vu dans la niche arithmétique des années 40 à 60) a complètement disparu.

Conclusion

Plusieurs travaux de didactique des mathématiques ont analysé les évolutions plus récentes des programmes et mis à jour des difficultés d'enseignement des vecteurs (voir par exemple : LÊ THI HOAI, 1997, BITTAR, 1998, PRESSIAT, 1999). On trouve aussi dans ces travaux des expériences intéressantes sur l'enseignement des vecteurs. Il est bien sûr hors de question de les résumer tous ici.

Nous nous focaliserons cependant sur trois points que notre étude peut éclairer :

- ✓ Malgré le rejet de la réforme des mathématiques modernes, le modèle de l'algèbre linéaire s'il a disparu officiellement des programmes du secondaire, continue de marquer l'organisation mathématique autour du vecteur. L'importance accordée à la multiplication par un scalaire en classe de seconde en atteste. On continue de faire

« démontrer » sans le dire les axiomes de la structure linéaire. Cependant des aspects algébriques plus propres au vecteur, comme le lien avec le théorème de Thalès, sont passés sous silence. La disparition de toute niche algébrique opère toujours comme un manque, qu'une fois rejetée (à juste titre) la référence à la structure d'espace vectoriel, rien n'est venu combler. Dans ce sens, il conviendrait de s'interroger sur la nécessité d'assumer la part intrinsèquement algébrique du vecteur, qui n'est pas celle d'une structure linéaire, mais s'exprime de façon indissociable de la nature géométrique de ceux-ci.

- ✓ Par ailleurs, la niche « outil performant pour la géométrie » a elle aussi du mal à fonctionner. Il est en effet difficile de trouver un problème de géométrie posé sans vecteur où la modélisation par des vecteurs conduise à un usage réellement performant de l'outil vectoriel. On a vu en effet, à travers l'évolution des programmes (et l'analyse historique le confirme) que l'habitat géométrique n'était pas si naturel qu'il y paraît pour les vecteurs. Pour une part importante, le vecteur géométrique est une création didactique qui a permis à un moment donné de résoudre un problème idéologique et pratique dans l'organisation du savoir enseigné. Ce point est particulièrement étudié dans le travail de PRESSIAT (1999).
- ✓ Reste la niche « outil pour la physique », mais elle paraît aussi difficile à faire vivre. En effet, peu de situations physiques sont utilisables en troisième ou même en seconde, dans lesquelles le formalisme vectoriel soit vraiment pertinent. Le plus souvent, on trouve dans les manuels des habillages plus ou moins cachés de situations pseudo-physiques. L'élève en est réduit à comprendre ce qu'on veut lui faire faire, faute de pouvoir avoir vraiment prise sur la situation physique en jeu.

On a vu que l'évolution des programmes n'a cessé de séparer les habitats physique et mathématique du vecteur, favorisant ainsi le cloisonnement disciplinaire. Dans notre travail de thèse en cours, nous examinons cette question. Nous analysons d'une part des situations issues de la physique qui pourraient être une bonne entrée en matière pour l'enseignement du vecteur en classe de mathématiques et d'autre part, nous examinons, dans l'enseignement de la physique, les situations où un travail mathématique pertinent sur les vecteurs est nécessaire. Idéalement, nous visons à construire des scénarios de séances communes aux deux disciplines, alliant les vecteurs et les grandeurs physiques vectorielles.

Bibliographie

ARTAUD M. (1997), Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In Bailleul et al. (eds.), *Actes de la IXème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, 1997, 101-139.

BA C. (2003), *Étude didactique de l'utilisation du vecteur en physique et des liens entre mouvement de translation et translation mathématique*, mémoire de DEA, LIRDHIST, Université Claude Bernard, Lyon1.

BELHOSTE B., GISPERT H. et HULIN N. (eds.) (1996), *Les Sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Paris : Vuibert et INRP.

BITTAR M. (1998), *Les vecteurs dans l'enseignement secondaire - Aspects outil et objet dans les manuels - Étude de difficultés d'élèves dans deux environnements : papier-crayon et Cabri-géomètre II*, thèse de l'université Joseph Fourier – Grenoble 1.

BOULIGAND G. (1944), *Les aspects intuitifs de la Mathématique*, Paris : Gallimard.

CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique*, 2ème éd., Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, 135- 180, In Arsac, G. et al. (ed.) *La transposition didactique à l'épreuve,* Grenoble : La Pensée sauvage.

CHOQUET G. (1964), *L'enseignement de la géométrie*, Paris : Hermann.

COLOMB J. (dir.) (1993), Les enseignements en Troisième et Seconde, ruptures et continuités, INRP, 49-76.

CROWE M.J. (1967) *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*, Notre Dame: University Press. Rééd., New-York : Dover, 1985.

DELACHET A. (1967), *La géométrie élémentaire*, Paris : Que sais je 418.

DIEUDONNÉ J. (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Paris : Hermann.

DORIER J-L. (ed.) (1997), *L'algèbre linéaire en question*, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

DORIER J-L. (2000), *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions*, Cahier du laboratoire Leibniz n°12. http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/index.html

FLAMENT D. (1997), *Le nombre, une hydre à n visages. Entre nombres complexes et vecteurs.* Paris, Éditions de la maison des sciences de l'Homme.

FLAMENT D. (2003), *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie.* Paris : CNRS Éditions.

GISPERT H. ET HULIN N. (2000), *L'enseignement des mathématiques dans ses liens à d'autres disciplines, Une perspective historique.* Communication à l'académie des sciences.

HADAMARD J. (1898), *Leçons de géométrie élémentaire, T1 : géométrie plane*, Paris : Hermann, réimpression Éditions Jacques Gabay, 1988.

KAHANE J-P. (ed.) (2002), *Rapport au ministère de l'Éducation nationale, l'enseignement des sciences mathématiques, Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques sous la direction de Jean-Pierre Kahane*, Paris : Odile Jacob.

LICOIS J-R. (2005), *La géométrie élémentaire au fil de son histoire dans les programmes français*, Ellipses.

LÊ THI HOAI C. (1997), *Étude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Vietnam et la classe de seconde en France,* Thèse de l'université Joseph Fourier - Grenoble 1 et École Normale Supérieure de Vinh.

LOUNIS A. (1989), *L'introduction aux modèles vectoriels en physique et en mathématiques : conceptions et difficultés des élèves, essai et remédiation,* Thèse, Université de Provence Aix-Marseille I.

MALGRANGE J-L., SALTIEL E. ET VIENNOT L. (1973), Vecteurs, scalaires et grandeurs physiques, *Bulletin SFP. Encart pédagogique*, **Janvier-Février 1973**, 3-13.

PRESSIAT A. (1999), *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison « points-vecteurs ».* Thèse de l'université Paris VII.

Cissé BA
FASTEF (ex. ENS de Dakar)
LIRDHIST Université Lyon1
Cisse.ba@univ-lyon1.fr

Jean-Luc DORIER
Equipe DDM – Laboratoire Leibniz
Jean-Luc.Dorier@imag.fr