

LES AIRES ET LE RAISONNEMENT GÉOMÉTRIQUE

Michel DE COINTET, Marie-Agnès EGRET

Résumé : D'une part, la notion d'aire parcourt en filigrane le cursus scolaire : objet de l'activité géométrique à l'école puis au collège, lieu de synthèse des acquis géométriques en seconde, lien entre géométrie et analyse en terminale des lycées. D'autre part, le raisonnement géométrique est fait à la fois de visualisation et de déduction. L'article cherche à préciser, dans des situations mettant en jeu la notion d'aire, ce que signifie une visualisation qui constitue un réel apport heuristique à une démarche géométrique, en examinant sur des exemples la façon dont fonctionnent les interactions entre une telle visualisation et l'élaboration d'une démonstration. L'article s'efforce de montrer que la visualisation dans le raisonnement géométrique mérite un apprentissage qui lui soit propre, tout autant que le raisonnement déductif.

Mots-clés : Aire - Raisonnement géométrique - Visualisation - Appréhension d'une figure - Heuristique - Démonstration - Parallélogramme - Médiane - Triangle - Longueurs - Proportionnalité - Alignement - Théorème de Thalès - Théorème de Pythagore.

Introduction

« L'ambiguïté du statut des figures pèse lourdement sur les premiers apprentissages de la géométrie. Elle enferme souvent l'enseignement dans un dilemme : ou l'on s'en tient à l'évidence visuelle (c'est souvent le cas en primaire) et on reste en deçà des traitements mathématiques, ou l'on se réfère en priorité aux traitements mathématiques (à partir du collège, bien souvent) et on perd l'apport intuitif et heuristique des figures. »

(extrait du compte rendu de l'expérimentation faite par l'IREM de Strasbourg en 1995 sur l'apprentissage des aires en sixième ([1])).

Cependant, le raisonnement géométrique est fait à la fois de visualisation et de déduction : une démonstration ne peut se passer, à chacune de ses étapes, de l'apport heuristique de la lecture d'une figure. Or, l'évidence visuelle est inopérante, parfois trompeuse. Il faut la dépasser et pour cela savoir lire une figure. Cela s'apprend et on sait les difficultés que rencontre son apprentissage.

Dans cet article, nous nous proposons d'examiner des situations mettant en jeu la notion d'aire afin d'étudier :

- ◇ ce que signifie une visualisation qui constitue un réel apport heuristique à une démarche géométrique, et quel apprentissage spécifique cela demande ;
- ◇ la manière de faire fonctionner et de rendre fructueuses les interactions entre une telle visualisation et l'élaboration d'une démonstration.

1. Que disent les programmes ?

À l'école primaire

Les compétences devant être acquises en fin de l'école primaire sont les suivantes :

- ◇ classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire (par superposition, découpage et recollement ou pavage par une surface de référence) ;
- ◇ construire une surface qui a même aire qu'une surface donnée (et qui ne lui est pas superposable) ;
- ◇ différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et qu'elles peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire ;
- ◇ mesurer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (dont l'aire est prise pour unité) ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé (le résultat étant une mesure exacte ou un encadrement) ;
- ◇ calculer l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés au moins est de dimension entière ;
- ◇ connaître et utiliser les unités usuelles (cm^2 , dm^2 , m^2 et km^2) ainsi que quelques équivalences ($1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$, $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$, $1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$).

Au collège

Dans l'introduction générale pour le collège, on peut lire parmi les objectifs :

« Isoler dans une configuration les éléments à prendre en compte pour répondre à une question. »

En particulier, il est précisé pour la classe de sixième :

- ◇ parmi les objectifs principaux pour la géométrie : « Reconnaître les figures planes mentionnées ci-dessus dans une configuration complexe. »
- ◇ au début du paragraphe *Géométrie* : « L'objectif d'initier à la déduction est aussi pris en compte. A cet effet, les activités qui permettent le *développement des capacités à décortiquer et à construire des figures* et des solides simples, *à partir de la reconnaissance des propriétés élémentaires*, occupent une place centrale. »
- ◇ dans les commentaires sur les aires dans le paragraphe *Grandeurs et mesures* : « *Comparer des aires à l'aide de reports, de décompositions, de découpages et de recompositions, sans perte ni chevauchement.* »

Au lycée

1. En classe de seconde parmi les deux objectifs principaux assignés à cette partie du programme, on peut lire : « Proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes du collège. Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires. »
2. En classe de terminale, il est écrit dans le paragraphe *Intégration* : « Les élèves ont la notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines définis à l'aide de fonctions. Les propriétés de l'intégrale seront (...) commentées et admises ; l'interprétation en terme d'aire (...) les rend conformes à l'intuition. Les élèves s'en serviront comme règles opératoires. »

On voit, à la lecture des programmes, l'importance donnée à l'activité géométrique sur les aires (avant toute formule de calcul) à l'école puis au collège, l'intérêt attribué aux

problèmes d'aires comme lieu de synthèse géométrique à l'entrée au lycée, enfin le rôle donné à la notion d'aire dans la compréhension du concept d'intégrale en classe terminale. On peut dire que c'est une notion qui parcourt en filigrane tout le cursus scolaire. En outre, elle y constitue un lien important entre la géométrie et l'analyse.

2. Visualisation en mathématiques : le cas des aires

Ces réflexions prennent appui sur le travail de Raymond Duval ([2]) et le compte-rendu de l'expérimentation de l'IREM de Strasbourg en 1995 ([1]).

2.1. Appréhensions d'une figure

On sait que dans la pratique de la géométrie et particulièrement dans son apprentissage, les figures constituent un support intuitif et jouent un rôle heuristique. Pour analyser la façon dont fonctionne l'intuition heuristique donnée par une figure géométrique, on peut distinguer deux modes d'appréhension de cette figure :

- ◇ l'appréhension dite « perceptive » : il s'agit de la reconnaissance spontanée, à partir des formes élémentaires comme le trait, le carré, le rond, des objets géométriques tels que la droite, le triangle, différents quadrilatères, un demi-cercle, etc.
- ◇ l'appréhension dite « opératoire » mobilisée pour un raisonnement géométrique :
 - elle consiste d'abord à penser les objets géométriques à travers leurs propriétés puis à regarder la figure en fonction des propriétés formulées comme hypothèses : celles-ci sont écrites ou font l'objet d'un codage¹.
 - à partir de là, une étude de la figure conduit à se poser des questions ou à énoncer une conjecture, si ce n'est déjà fait dans l'énoncé du problème ;
 - puis un véritable travail de recherche sur cette figure est nécessaire pour trouver, tout à la fois, les enchaînements déductifs et les propriétés à mettre en œuvre pour résoudre le problème posé.

A cet effet, cette appréhension s'approfondit en complétant la figure par de nouveaux tracés (points, lignes, figures) et en procédant à des « reconfigurations ».

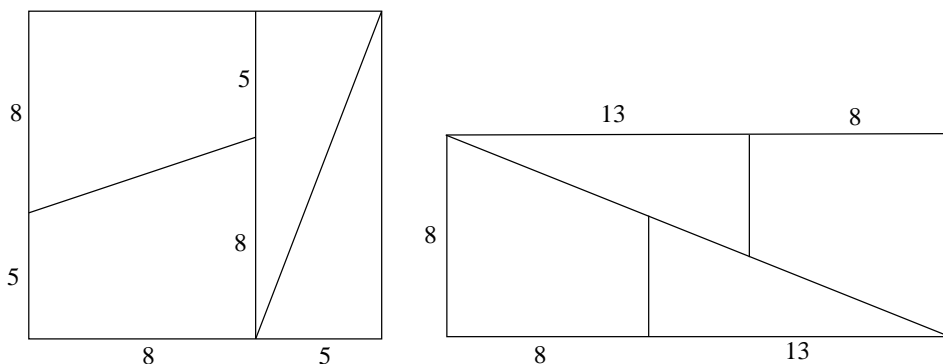
De quoi s'agit-il ? Toute figure peut être modifiée de plusieurs manières, par exemple, elle peut être partagée en sous-figures, incluse dans une autre figure, agrandie, déplacée, tournée. On appelle *reconfiguration* l'opération qui consiste à réorganiser une ou plusieurs sous-figures d'une figure donnée en une autre figure, à la manière d'un tangram qu'on déconstruirait puis reconstruirait pour obtenir une nouvelle image.

L'appréhension opératoire nécessite une démarche faite de réflexions et d'initiatives. Elle est plus « dynamique » que l'appréhension perceptive. On peut dire qu'elle « fait vivre » la figure et c'est elle qui a un rapport que l'on peut qualifier de dialectique avec le raisonnement déductif. Ceci dit, l'appréhension opératoire d'une figure dont on a démontré des propriétés préalablement peut être suffisamment familière pour qu'elle soit immédiate dès qu'on la rencontre par la suite.

¹Notons qu'on a tout avantage à ce que le codage ne traduise que ces propriétés, quitte à faire ensuite une nouvelle figure, lorsqu'une propriété change de statut (devenant hypothèse après avoir été démontrée) pour démontrer une nouvelle propriété.

2.2. Un exemple d'appréhension perceptive

A partir de quatre pièces d'un puzzle on recompose les deux surfaces qui sont dessinées ci-dessous. L'une apparaît comme un carré de côté 13 et l'autre comme un rectangle de longueur 21 et de largeur 8. Il n'est évidemment pas question d'en conclure que $13^2 = 21 \times 8$.

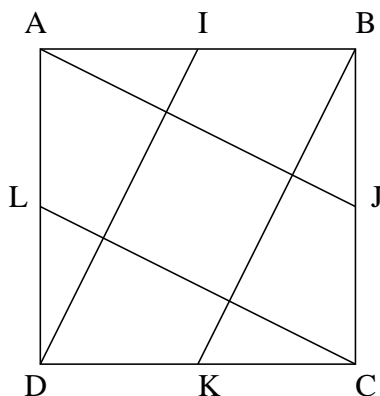


Cette activité expérimentale ne constitue pas une visualisation mathématique. Celle-ci, répétons-le, est mobilisée pour un raisonnement géométrique. Elle s'appuie sur les propriétés d'une figure prises comme hypothèses par un énoncé. Elle conduit à une conjecture qui peut être validée par une démonstration.

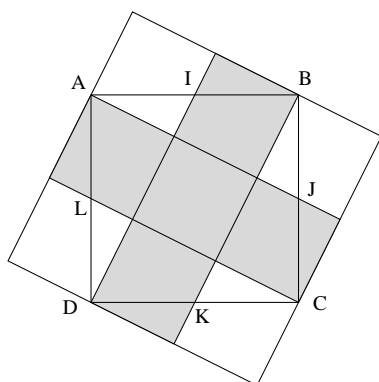
2.3. Un exemple de reconfiguration

Problème : rapport d'aires

On donne un carré $ABCD$. On désigne par I , J , K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, et $[DA]$. La figure fait apparaître un quadrilatère (qui est un carré) à l'intérieur du carré initial. Quel est le rapport des aires des deux carrés ?



La figure est invariante par une rotation dont le centre est celui du carré $ABCD$. On en déduit que le quadrilatère dont il est question est bien un carré. À s'en tenir là, la figure n'est guère parlante pour répondre à la question posée.



Cette figure de travail comporte un quadrillage. Celui-ci a été imaginé, choisi et tracé pour faire apparaître des carrés de même aire que le carré intérieur. On fait apparaître ainsi une « croix » qui a même aire que le carré de départ, ce que l'on peut voir au travers de « compensations » d'aires et vérifier en procédant à des reconfigurations portant sur quatre triangles rectangles intérieurs au carré $ABCD$. On peut alors démontrer ce résultat à l'aide de symétries centrales ayant pour centres les milieux des côtés de $ABCD$.

La résolution du problème nécessite deux étapes indépendantes :

- l'une est consacrée à démontrer que le quadrilatère intérieur est bien un carré ;
- l'autre demande une perception opératoire (compensation d'aires, reconfiguration) qui débouche, ici, sur une démonstration (symétries) que l'on peut rédiger immédiatement.

3. Aires et démonstrations

Les outils de démonstration sont de deux ordres :

- ◇ ceux liés à la conservation des aires par les transformations au fur et à mesure de leurs études : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, leurs composées, rotation. Rappelons que les propriétés de la symétrie axiale, en particulier la conservation des aires, sont « admises » à partir de la superposition des figures par pliage. La conservation des aires par la symétrie centrale en résulte.

Par ailleurs, avant de définir la translation et de savoir qu'une translation est la composée de deux symétries centrales, on est amené à admettre la propriété suivante : « Deux triangles dont les côtés sont parallèles et de mêmes longueurs (deux à deux) ont la même aire ». Cette propriété, qui peut paraître évidente expérimentalement, se justifie : un déplacement (au sens expérimental) éventuellement suivi d'un pliage permet de « superposer » de tels triangles. On a là une visualisation de cette propriété. De même, on peut utiliser les propriétés suivantes :

- Trois points P , Q et R sont alignés dans cet ordre si et seulement si on a l'égalité

$$\text{Aire}(MPR) = \text{Aire}(MPQ) + \text{Aire}(MQR)$$
 où M désigne un point qui n'est aligné ni avec P et Q , ni avec Q et R , ni avec R et P .
- Si D est un point intérieur au triangle ABC , alors $\text{Aire}(DBC) < \text{Aire}(ABC)$.

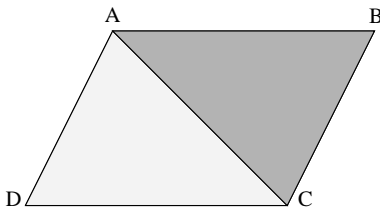
- ◇ ceux liés aux définitions et propriétés des figures fondamentales, acquises au fur et à mesure : rectangle, carré, losange, parallélogramme, médiane d'un triangle, configuration de Thalès, angles, etc. Il est important de ne pas les oublier : si les aires constituent un outil spécifique en géométrie, c'est néanmoins un outil parmi d'autres lié aux propriétés des configurations et des transformations.²

²C'est volontairement que les formules de calcul d'aires ne font pas partie des outils de démonstration car nous privilégions, ici, le rôle de la visualisation dans l'apprentissage géométrique. A partir de l'acquis de l'école primaire généralisé aux rectangles dont les côtés ne sont plus de dimensions entières, le théorème sur les parallélogrammes ayant un côté commun (voir le paragraphe 3.3) permet de déduire les formules

Plusieurs des exemples qui suivent proviennent de l'article d'André LAUR ([4]). En raison de la perspective didactique annoncée dans l'introduction, la présentation de ces exemples (ordre, libellé de l'énoncé) et la façon de les traiter peuvent en différer sensiblement. Pour chacun de ces exemples nous décrivons une visualisation au sens que nous lui avons donné au paragraphe 2. Elle constitue un apport heuristique à une démarche géométrique en interaction avec l'élaboration d'une démonstration.

3.1. Demi-parallélogramme

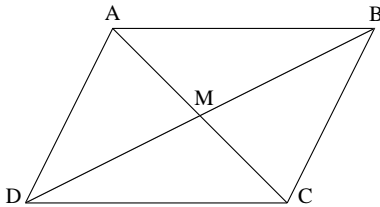
Chaque diagonale partage un parallélogramme en deux triangles de même aire.



Qui dit parallélogramme dit centre de symétrie, à savoir le point de concours des diagonales. Penser ainsi permet d'accéder à une perception opératoire de la figure : la conservation des aires par la symétrie centrale est, en effet, la clé d'une démonstration immédiate.

Conséquence :

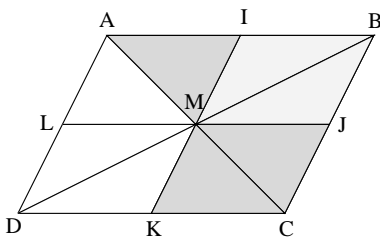
Les diagonales d'un parallélogramme le partagent en quatre triangles de même aire.



Il s'agit de démontrer, par exemple, que les triangles BAM et BCM ont même aire.

Ici, la perception opératoire va au-delà de la prise en compte des hypothèses de l'énoncé (aspect que l'on peut qualifier de statique).

De façon à utiliser la propriété du demi-parallélogramme, on complète la figure initiale par le tracé de segments d'origine M , parallèles aux côtés du parallélogramme $ABCD$, afin d'obtenir de nouveaux parallélogrammes (aspect dynamique).



En fait, on obtient ainsi un puzzle constitué de triangles. On s'intéresse particulièrement à ceux qui constituent les triangles BAM et BCM . Ils sont deux à deux superposables. Il suffit de trouver à l'aide des « outils de démonstration » et du résultat précédent de quoi le démontrer. Ils ont, deux par deux, la même aire (utilisation de la propriété du parallélogramme et d'un des outils de démonstration ou d'une symétrie de centre M).

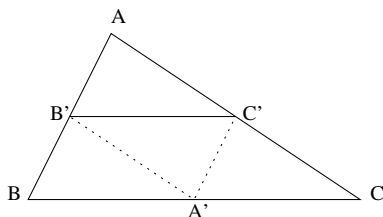
a) Application 1 : aires et agrandissement

Propriété des milieux

Si B' et C' sont les milieux des côtés AB et AC du triangle ABC , alors

$$\text{Aire}(AB'C') = \frac{1}{4} \text{Aire}(ABC)$$

.



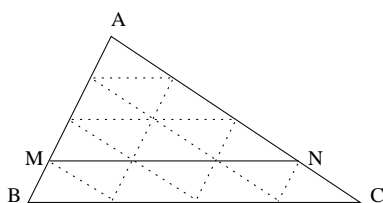
On appelle A' le milieu du côté BC et on trace les trois côtés du triangle $A'B'C'$. On met ainsi (par cette simple initiative) en évidence quatre triangles de même aire. La démonstration s'ensuit immédiatement.

Propriété générale

Si M et N partagent les côtés AB et AC du triangle ABC dans le même rapport k , alors

$$\text{Aire}(AMN) = k^2 \times \text{Aire}(ABC)$$

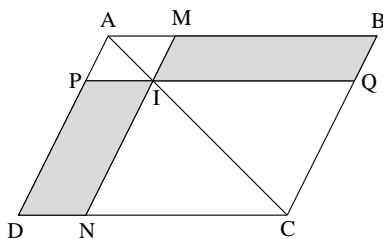
.



On démontre la propriété pour certaines valeurs rationnelles de k en mettant en évidence des triangles de même aire. On admet la propriété pour toute valeur rationnelle de k puis on généralise à toute valeur de k .

b) Application 2 : propriété du papillon 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme et I un point de la diagonale $[AC]$. Les aires des deux parallélogrammes $IMBQ$ et $INDP$, « opposés par le sommet » en I , sont égales.



La perception opératoire consiste à remarquer

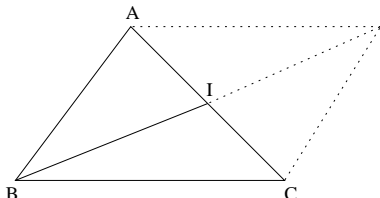
- ◇ que la droite (AC) partage $ABCD$ en deux triangles de même aire, « contenant » l'un le parallélogramme $IMBQ$ et l'autre le parallélogramme $INDP$;
- ◇ que la droite (AC) est diagonale de trois parallélogrammes.

La démonstration consiste alors à appliquer la propriété du « demi-parallélogramme » à ces trois parallélogrammes. Les aires de $IMBQ$ ou $INDP$ sont alors obtenues par soustractions d'aires.

3.2. Médiane

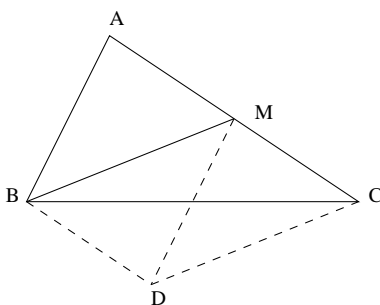
Propriété de la médiane

Chaque médiane partage un triangle en deux triangles de même aire.



Le travail a été fait au paragraphe 3.1.

Une autre façon de procéder : On démontre la propriété de la médiane avant de démontrer la propriété de l'égalité des aires des triangles que découpent les diagonales d'un parallélogramme. L'idée est celle de la démonstration de Daniel PERRIN ([6]).



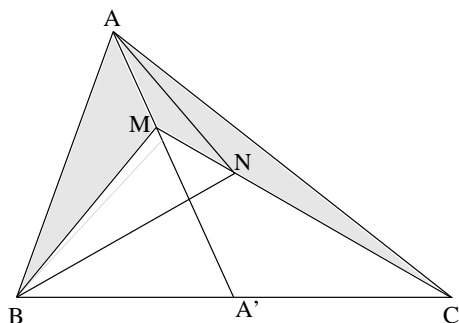
Soit M le milieu de AC . Il s'agit de démontrer que les triangles BMA et BMC ont même aire. L'idée est, là aussi, de faire apparaître des parallélogrammes afin d'utiliser la propriété du demi-parallélogramme.

On complète la figure par le parallélogramme $BMCD$ construit sur le triangle BMC . On obtient ainsi un nouveau parallélogramme : $BDMA$. Il faut alors percevoir que les triangles BMA et BMC ont, chacun, même aire que le triangle BMD , commun aux deux parallélogrammes (ce qui est moins évident pour BMC que pour BMA). La mise en forme de la démonstration s'ensuit.

L'égalité des aires des triangles découpés par les diagonales d'un parallélogramme (voir paragraphe 3.1) est alors immédiate.

Caractérisation de la médiane par une propriété d'aires.

Un point M appartient à la médiane (AA') d'un triangle ABC si et seulement si les triangles MBA et MCA ont même aire.



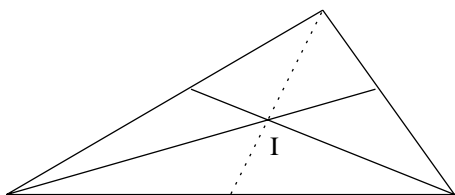
On donne un triangle ABC et on désigne par A' le milieu du segment $[BC]$.

1. Pour ce qui est de la partie directe : si M est un point de (AA') alors (MA') est médiane du triangle MBC . On est ainsi conduit à utiliser deux fois la propriété de la médiane.

2. Pour la réciproque, on peut penser à une démarche, par exclusion des cas, utilisée pour

démontrer la propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment ou de la bissectrice d'un angle : soit N un point intérieur au triangle ACA' , par exemple. On appelle M le point d'intersection des segments $[CN]$ et $[AA']$. On perçoit que l'aire du triangle ANB est supérieure à celle du triangle ANC . Il reste à le démontrer à l'aide des outils de démonstration cités plus haut.

Conséquence : les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

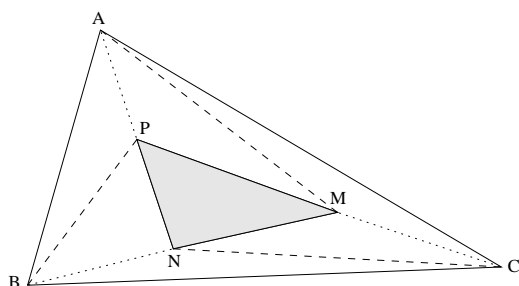


La propriété précédente est caractéristique des médianes d'un triangle. On peut donc procéder ici comme on le fait pour les médiatrices ou les bissectrices.

On appelle I le point d'intersection de deux médianes : la partie directe de la propriété précédente permet d'écrire deux égalités d'aires dont on déduit une troisième égalité. La partie réciproque de la propriété précédente permet alors de conclure que I appartient à la troisième médiane.

Exercice d'application : rapport d'aires

On donne un triangle MNP et on construit les points A, B et C symétriques respectivement de N par rapport à P , de M par rapport à N et de P par rapport à M . Quel est le rapport de l'aire du triangle MNP à celle du triangle ABC ?



La donnée de plusieurs milieux conduit à joindre des points de la figure pour mettre en évidence des triangles intérieurs au triangle ABC ayant une même aire, en vertu de la propriété de la médiane. La démonstration en résulte immédiatement.

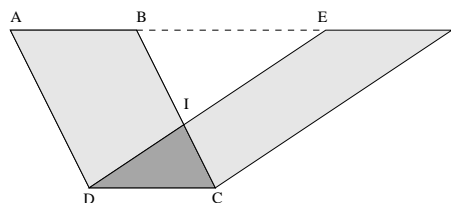
3.3. Parallélogrammes ayant un côté commun

Théorème

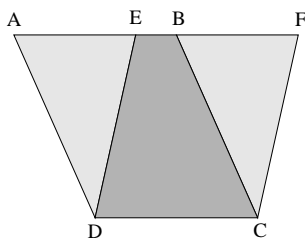
Deux parallélogrammes dont deux sommets consécutifs sont communs et les autres sont alignés, ont même aire.

Hypothèses :

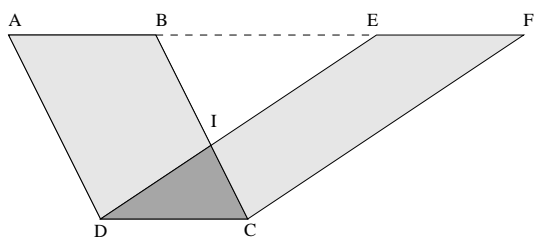
$ABCD$ est un parallélogramme,
 $CDEF$ est un parallélogramme,
 A, B, E et F sont alignés.



Les différents cas de figures se ramènent aux cas ci-dessous :



Examinons la première figure : les deux parallélogrammes ont en commun un trapèze. Pour reconstituer, à partir de ce trapèze, chacun des parallélogrammes $ABCD$ ou $CDEF$, on juxtapose le triangle ADE ou le triangle BCF . Or, ces deux triangles ont même aire.



Examinons la seconde figure : l'alignement des sommets A, B, E et F suggère de tracer la droite (AB) qui n'est autre que la droite (EF) .

Les triangles ADE et BCF ont même aire. Pour reconstituer, à partir de chacun de ces deux triangles, les parallélogrammes $ABCD$ et $CDEF$, on juxtapose le triangle IDC et on supprime le triangle IBE .

Démonstration

$AD = BC$ par hypothèse,

$DE = CF$ par hypothèse,

$EA = FB$ car $AB = EF$.

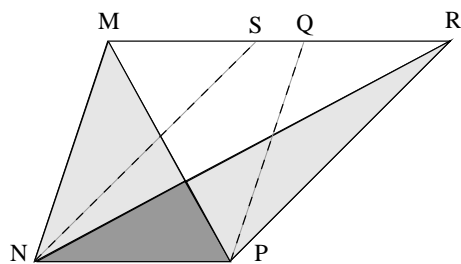
Donc les triangles ADE et BCF ont même aire.

On appelle I le point d'intersection des droites (BC) et (DE) . Les aires des parallélogrammes $ABCD$ et $CDEF$ se déduisent de celles des triangles ADE et BCF par addition de celle du triangle IDC et soustraction de celle du triangle IEB . Elles sont donc égales.

On peut noter que cette démonstration bâtie sur l'appréhension opératoire de la seconde figure s'avère tout à fait valide dans le cas de la première.

Conséquence 1

Deux triangles de même base et ayant des sommets situés sur une parallèle à cette base, ont même aire.

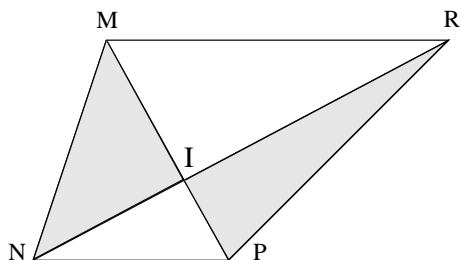


Cette propriété est aussi connue comme **propriété du trapèze**, car M, N, P et R sont les quatre sommets d'un trapèze.

On peut considérer les triangles MNP et RNP comme des « demi-parallélogrammes ». On construit les parallélogrammes $MNPQ$ et $PNSR$: la propriété précédente permet de conclure à l'égalité des aires des triangles MNP et RNP .

Conséquence 2 : propriété du papillon 2

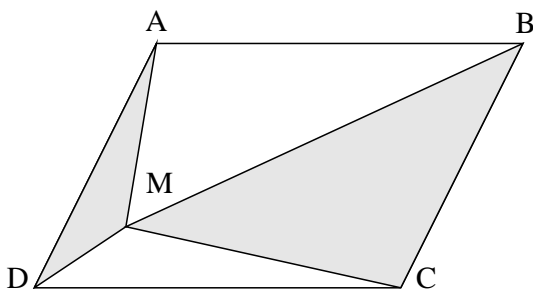
Soit $MNPR$ un trapèze. On appelle I le point d'intersection de ses diagonales. Les aires des deux triangles IMN et IPR , « opposés par le sommet » en I , sont égales.



En soustrayant à l'égalité obtenue ci-dessus l'aire du triangle INP , on vérifie que les aires des triangles IMN et IPR sont égales,

Application 1 : égalité d'aires

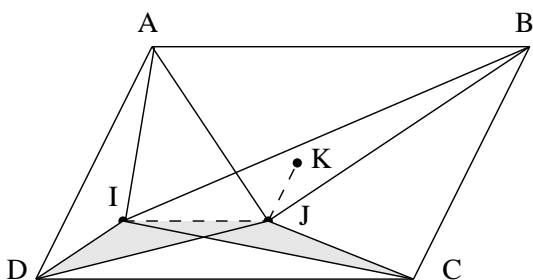
On donne un parallélogramme $ABCD$ et un point M intérieur à ce parallélogramme. Où faut-il placer le point M pour que la somme des aires de deux triangles opposés par le sommet en M soit égale à la somme des aires des deux autres triangles opposés par le sommet en M ?



Soit S l'une de ces sommes, par exemple

$$S = \text{Aire}(MBC) + \text{Aire}(MAD).$$

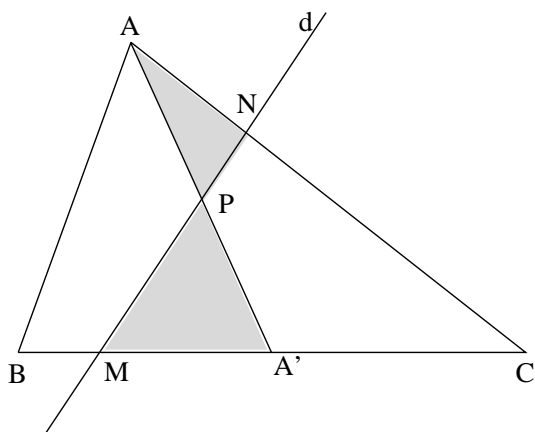
L'idée est d'étudier ce que devient S lorsqu'on déplace le point M d'un point I au centre K du parallélogramme.



Pour pouvoir appliquer les résultats précédents, on déplace d'abord M parallèlement à (AB) de I en J pour déplacer ensuite M parallèlement à (BC) de J en K . On compare donc, dans un premier temps, la somme de l'aire de IBC et de l'aire de IAD à la somme de l'aire de JBC et de l'aire de JAD . Le résultat obtenu pour cette somme induit la suite et la fin du raisonnement.

Application 2 : partage d'un triangle par une droite en deux surfaces de même aire

On donne un triangle ABC ainsi qu'un point M sur $[BC]$. Trouver une droite passant par M qui partage le triangle ABC en deux surfaces de même aire ?



On connaît une situation facile à traiter : celle où M est en A' , milieu de $[BC]$ (théorème de la médiane). Soit un point M de $[BC]$, différent de A' . On trace une droite d passant par M qui coupe $[AC]$ en N . On appelle P le point d'intersection de d et de $[AA']$. La résolution du problème nécessite une étude attentive des surfaces qui constituent la figure. On cherche la position de d telle que

$$\text{Aire}(ABMN) = \text{Aire}(CMN).$$

Comme $\text{Aire}(ABA') = \text{Aire}(CA'A)$, il faut « voir » que cette condition est réalisée si les deux triangles PAN et $PA'M$ ont même aire avant de reconnaître un « papillon ».

Démonstration. On constate que

$$\begin{aligned} \text{Aire}(ABMN) &= \text{Aire}(ABA') + \text{Aire}(PAN) - \text{Aire}(PA'M), \\ \text{Aire}(CMN) &= \text{Aire}(ACA') - \text{Aire}(PAN) + \text{Aire}(PA'M). \end{aligned}$$

Les aires de ABA' et ACA' étant égales par la propriété de la médiane, on en déduit que

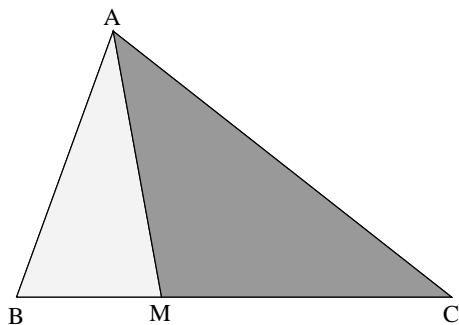
$$\text{Aire}(ABMN) = \text{Aire}(CMN) \iff \text{Aire}(PAN) = \text{Aire}(PA'M).$$

Si la droite $(A'N)$ est parallèle à la droite (AM) alors la condition est réalisée (Propriété du papillon 2).

3.4. Proportionnalité entre aires et bases

Propriété des proportions

Soit M un point du côté $[BC]$ d'un triangle ABC . Les aires des triangles ABM et ACM sont proportionnelles aux longueurs BM et CM .



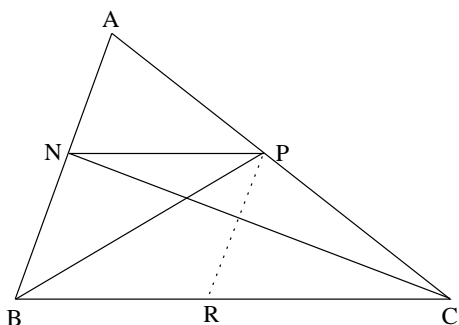
Cette propriété a été démontrée dans le cas où le point M est le milieu du côté $[BC]$. On peut alors démontrer cette propriété dans d'autres cas particuliers : si l'une des longueurs BM ou CM est multiple de l'autre, si les deux longueurs sont commensurables. On l'admet dans le cas général ^a.

^aen utilisant la formule donnant l'aire d'un triangle, la démonstration est évidente.

Application : le théorème de Thalès

On donne un triangle ABC , un point N intérieur au segment $[AB]$ et un point P intérieur au segment $[AC]$. Si (NP) est parallèle à (BC) alors on a

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{NP}{BC}.$$



Pour démontrer la première égalité, l'idée est de transformer les rapports de longueurs en des rapports d'aires. Or les deux triangles NBC et PBC ont même aire. Donc, plutôt que de calculer d'emblée

$$\frac{AN}{AB} \text{ et } \frac{AP}{AC},$$

on calcule d'abord

$$\frac{NB}{AB} \text{ et } \frac{PC}{AC}.$$

Pour démontrer la seconde égalité du théorème, il suffit de penser à tracer la parallèle à la droite (AB) passant par P : on pourra alors utiliser la première égalité appliquée au contexte ainsi créé.

Démonstration

D'après la propriété des proportions on a :

$$\frac{NB}{AB} = \frac{\text{Aire}(NBC)}{\text{Aire}(ABC)} \text{ et } \frac{PC}{AC} = \frac{\text{Aire}(PCB)}{\text{Aire}(ACB)}.$$

Les sommets N et P des deux triangles NBC et PBC sont situés sur une parallèle à leur base commune BC . Ils ont donc même aire par la propriété des trapèzes. On en déduit :

$$\frac{NB}{AB} = \frac{PC}{AC} \text{ et donc } \frac{AN}{AB} = \frac{AP}{AC}.$$

La parallèle à la droite (AB) passant par P coupe le segment $[BC]$ en R . D'après la première égalité du théorème, on a

$$\frac{CP}{CA} = \frac{CR}{CB} \text{ d'où } \frac{AP}{AC} = \frac{BR}{BC}.$$

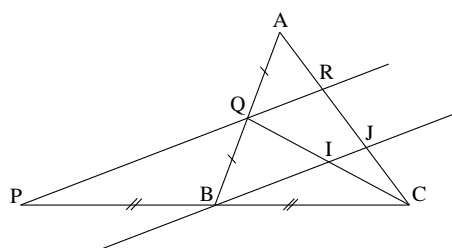
Comme $BR = NP$ on en déduit

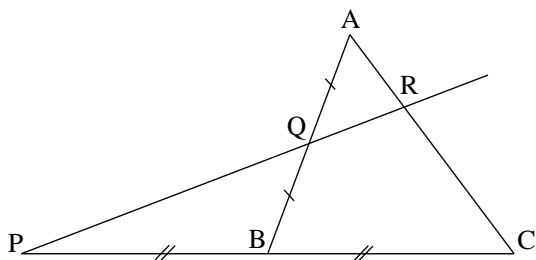
$$\frac{AP}{AC} = \frac{NP}{BC}.$$

3.5. Aires et alignement

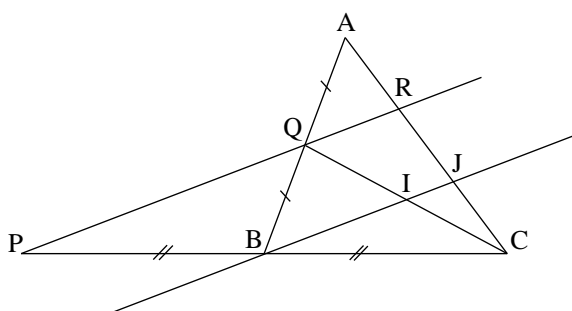
Problème

On donne un triangle ABC . On appelle P le symétrique de C par rapport à B et Q le milieu du côté $[AB]$. La droite (PQ) coupe le côté $[AC]$ en R . Dans quel rapport R partage-t-il $[AC]$?





On remarque l'existence de deux milieux dans les hypothèses et, de ce fait, on pense à une démonstration faisant appel à la propriété des milieux dans un triangle (théorème ou réciproque).



Démonstration sans l'aide des aires

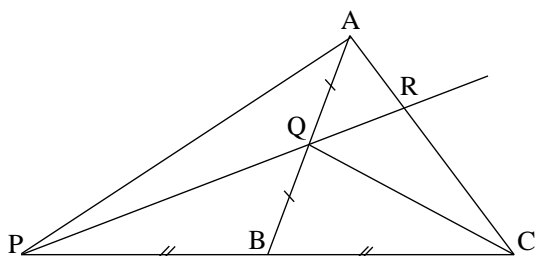
On trace la droite d passant par B et parallèle à la droite (PQ) . Elle coupe (CQ) en I et (CR) en J . Le point B étant le milieu de $[CP]$, le point I est le milieu de $[CQ]$ (réciproque de la propriété de la droite des milieux). On démontre de façon analogue que J est le milieu de $[CR]$ et que R est le milieu de $[AJ]$.

Démonstration à l'aide des aires

En joignant A à P et C à Q , on fait apparaître différents triangles et différentes médianes. On utilise alors la propriété de la médiane (en raison des hypothèses) et celle des proportions (en raison de ce que l'on cherche) pour une démonstration utilisant les aires.

Plus précisément, on cherche à déterminer le rapport

$$k = \frac{CR}{CA}.$$



De l'alignement dans cet ordre des points P , Q et R , on déduit

$$\text{Aire}(CPR) = \text{Aire}(CPQ) + \text{Aire}(CQR).$$

En calculant ces aires en fonction de celle de ABC on obtient

$$\text{Aire}(CPR) = k \text{ Aire}(PAC) = k \times 2 \text{ Aire}(ABC),$$

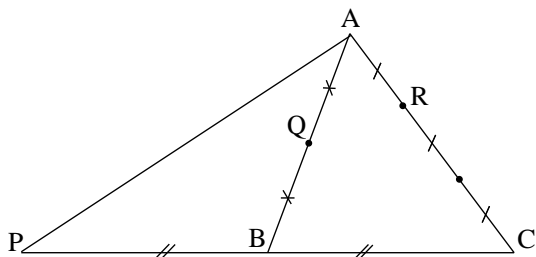
$$\text{Aire}(CPQ) = 2 \text{ Aire}(QBC) = \text{Aire}(ABC),$$

$$\text{Aire}(CQR) = k \text{ Aire}(QAC) = k \times \frac{1}{2} \text{ Aire}(ABC).$$

$$\text{On en conclut que } 2k = 1 + \frac{k}{2} \text{ d'où } k = \frac{2}{3}.$$

Problème réciproque

On donne un triangle ABC . On appelle P le symétrique de C par rapport à B et Q le milieu du côté $[AB]$. R est situé au tiers de $[AC]$ à partir de A . Que peut-on dire des points P , Q et R ?



Démonstration à l'aide des aires

Pour démontrer que les points P , Q et R sont alignés, il suffit de démontrer l'égalité

$$\text{Aire}(CPR) = \text{Aire}(CPQ) + \text{Aire}(CQR).$$

On a les égalités $\text{Aire}(CPQ) = 2 \text{Aire}(QBC) = \text{Aire}(ABC)$;

$$\text{Aire}(CPR) = \frac{2}{3} \text{Aire}(PAC) = \frac{2}{3} \times 2 \text{Aire}(ABC) = \frac{4}{3} \text{Aire}(ABC);$$

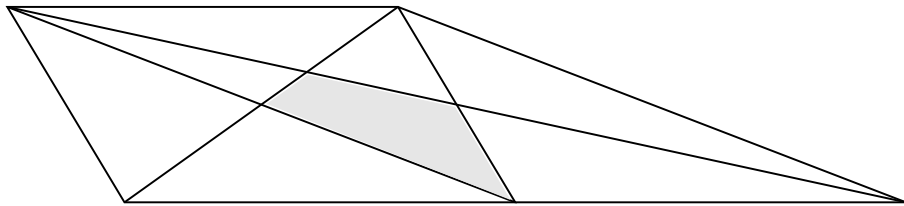
$$\text{Aire}(CQR) = \frac{2}{3} \text{Aire}(QAC) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \text{Aire}(ABC) = \frac{1}{3} \text{Aire}(ABC).$$

On en déduit l'égalité cherchée. Les points P , Q et R sont donc alignés.

4. Pour ceux qui aiment relever des défis

4.1. Une figure qui manque d'aires

Enoncé dû à Elisabeth BUSSE et Gilles COHEN paru dans *Affaire de logique. Cent défis mathématiques du Monde* (tome 2) aux éditions Pole.



Cette figure, formée de deux parallélogrammes enchevêtrés et de leurs diagonales, comporte huit zones. Seule l'aire d'une des zones est donnée. Quelle est la valeur des sept aires inconnues ?

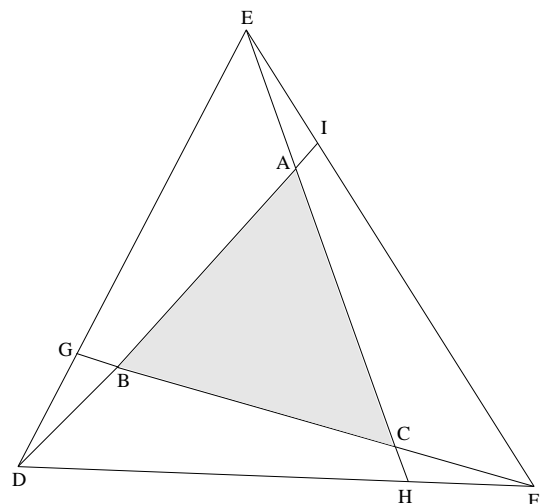
4.2. Le grand triangle

Enoncé dû à Elisabeth BUSSE et Gilles COHEN paru dans *Affaire de logique. Cent défis mathématiques du Monde* (tome 3) aux éditions Pole.

On prolonge les trois côtés d'un triangle ABC d'une longueur égale à la moitié du côté prolongé (comme sur le dessin) pour former un grand triangle DEF .

Quel est le rapport de l'aire du grand triangle ainsi construit sur celle du petit ?

Les trois côtés prolongés du petit triangle recoupent les côtés du grand triangle en trois points G , H , et I . Dans quel rapport ces points divisent-ils le côté qu'ils coupent ? (Par exemple, dans quel rapport G divise-t-il DE ?).



5. Une étude de la démonstration du théorème de Pythagore d'un manuel de quatrième de l'IREM de Strasbourg ([5]).

3. Pour ceux qui veulent aller plus loin : une démonstration du théorème de Pythagore

Rappel de l'énoncé : si un triangle ABC est rectangle en A , alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

A partir d'un triangle ABC rectangle en A , on peut représenter AB^2 et AC^2 comme les aires des carrés de côtés AB et AC .

■ Etude de la figure :

Les deux carrés construits sur les côtés du triangle ABC ont un axe de symétrie commun, la diagonale commune.

On a noté D le symétrique de B , et E le symétrique de C .

Ainsi, $DE = BC$ et $\widehat{DEA} = \widehat{ACB}$.

En complétant le rectangle $DAEF$, on obtient par symétrie du rectangle, $AF = DE$ et $\widehat{EAF} = \widehat{DEA}$.

On a tracé la droite FA , et on a appelé H son point d'intersection avec BC .

Ainsi $\widehat{BAH} = \widehat{EAF}$, comme angles de demi-droites opposées.

Finalement : $AF = BC$ et $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$.

Le triangle ABH a donc les mêmes angles que le triangle ABC ; il est rectangle en H , puisque le triangle ABC est rectangle en A .

Résumons : $AF = BC$, et la droite AF est perpendiculaire à BC .

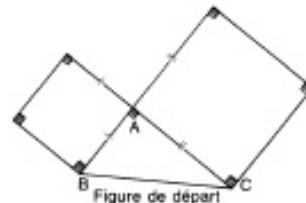


Figure de départ

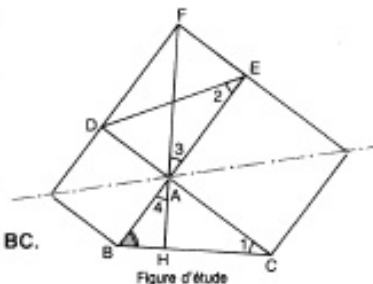
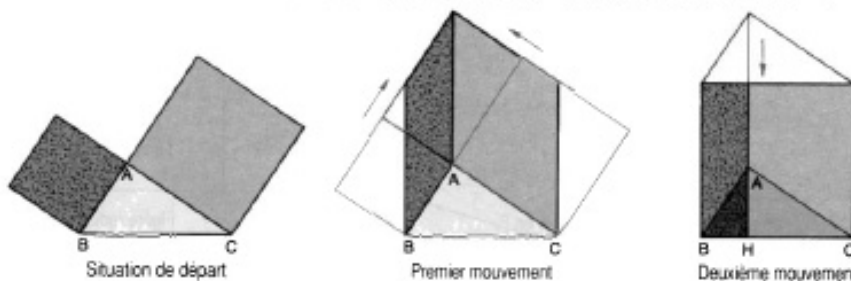


Figure d'étude

■ Obtention du résultat de Pythagore en deux mouvements :



Lors du premier mouvement, chaque carré se transforme en un parallélogramme de même aire.

Lors du deuxième mouvement, chaque parallélogramme se transforme en un rectangle de même aire.

La figure finale a deux côtés parallèles à AF , donc perpendiculaires à BC , et de même longueur que AF , qui est égal à BC . C'est donc un carré de côté BC . Ceci établit bien le théorème de Pythagore.

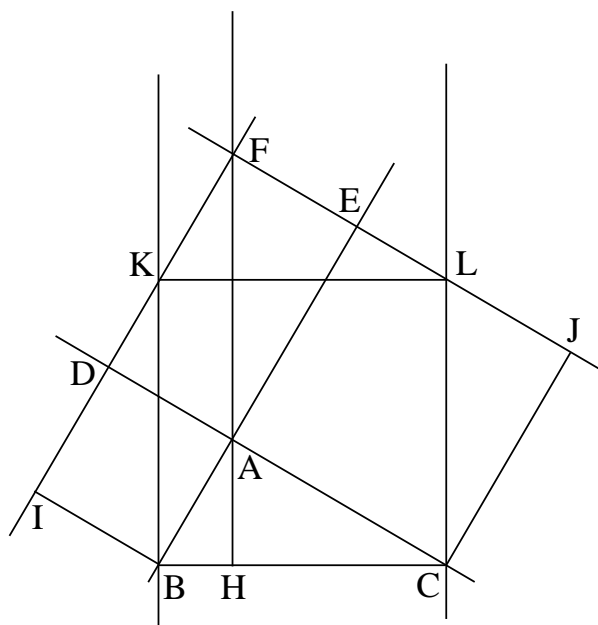
Supplément : nous avons établi que $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times BC$ (ce sont les aires des rectangles du deuxième mouvement). Ces relations seront revues en classe de troisième.

Cette démonstration paraît bien compliquée : l'idée directrice, parce qu'elle n'est énoncée que partiellement, n'apparaît pas suffisamment clairement pour guider le raisonnement. De plus, la démonstration de la propriété étudiée à partir d'une symétrie axiale est parachutée et on n'en comprend la nécessité que par la suite. Pour finir, l'élève est appelé à suivre sur la figure cette démonstration et non à chercher les théorèmes appropriés pour bâtir une

démonstration du théorème de Pythagore à partir d'une étude approfondie de la figure. Est-il possible de faire mieux ? Nous tentons de le faire avec la rédaction qui suit.

L'idée directrice de cette démonstration est d'interpréter AB^2 , AC^2 et BC^2 comme les aires des carrés de côtés AB , AC et BC : les deux premiers étant construits, la résolution du problème consiste à construire un troisième carré qui réponde à la question.

Dans cette perspective, on construit une figure de travail :



On nomme les deux carrés déjà construits par leurs sommets : $ABID$, $ACJE$. On privilégie quatre directions de droites, à savoir celles des côtés de ces deux carrés, la direction de (BC) et la direction des perpendiculaires à (BC) . Pour cela on trace les droites (ID) et (JE) qui se coupent en F , ainsi que les perpendiculaires à (BC) en B et C qui coupent respectivement (ID) et (JE) en K et L .

Il reste à démontrer que le quadrilatère $BCLK$ est un carré, et que son aire est égale à la somme de celles des carrés initiaux.

Observons de plus près cette figure. Il apparaît des carrés $ABID$ et $ACJE$ (par hypothèse) et $BCLK$ (à démontrer), des rectangles de côtés AD et AE (par hypothèse), de côtés BH et BK , de côtés CH et CL (à démontrer), des parallélogrammes $ABKF$ et $ACLF$ (à démontrer). Il apparaît aussi un axe de symétrie, à savoir la droite (IJ) qui passe par A . Pour démontrer que $BCLK$ est bien un carré et du même coup que les parallélogrammes et rectangles « apparus comme tels » le sont réellement, il suffit de démontrer que (AF) est perpendiculaire à (BC) et que $AF = BC$. La démonstration de ces deux assertions proposée par le manuel de l'IREM a alors sa place ici.

Il reste à trouver deux surfaces dont la réunion soit le carré $BCLK$ et dont les aires soient respectivement celles des carrés $ABID$ et $ACJE$. En n'oubliant pas qu'un rectangle donc un carré est un parallélogramme (particulier), on utilisera le théorème sur les parallélogrammes ayant un côté commun : ainsi, $ABID$ a même aire que $ABKF$ qui a même aire que le rectangle de côtés BH et BK (résultat analogue pour $ACJE$). Ceci permet de démontrer ce qui est évoqué par les « mouvements » qui figurent dans le manuel

de l'IREM.

Cependant la démonstration reste difficile car formée de deux parties très distinctes. Mais le travail de visualisation conduisant à l'utilisation de résultats sur les aires et la démonstration qui en résulte peuvent constituer un exercice instructif en lycée.

Il est aussi possible de donner une explication visuelle de ce théorème. Raymond DUVAL ([3] figures 16 à 18) l'analyse de manière didactique en montrant les enjeux d'un tel apprentissage.

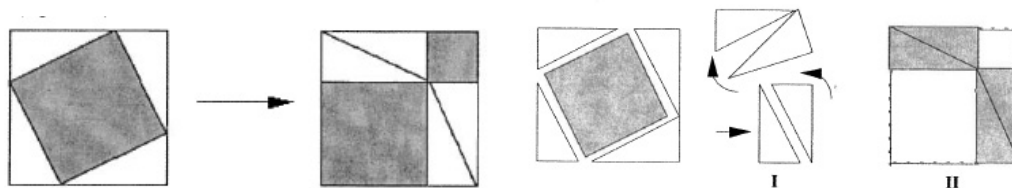


Figure 16

Figure 17

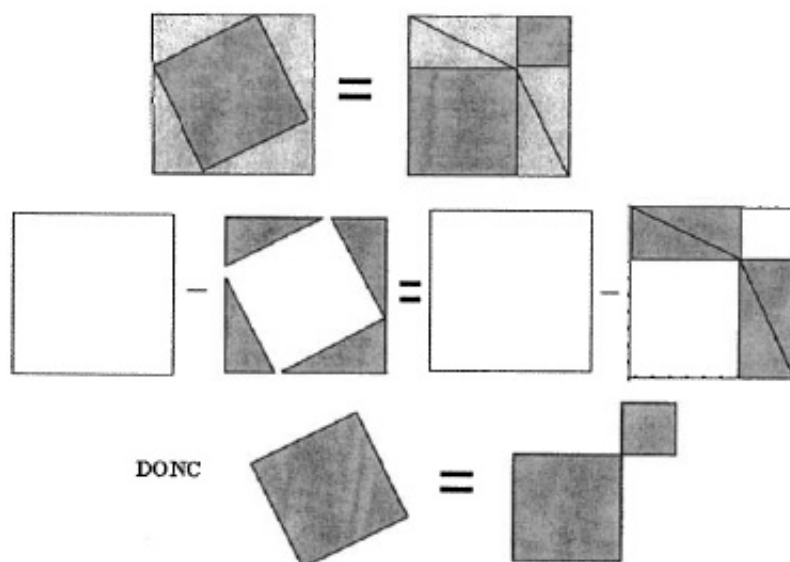


Figure 18

Conclusion

Quels enseignements tirer de ce qui précède ? Que demande la visualisation en mathématiques ?

- ◇ Savoir construire et lire une figure à travers ou en fonction de propriétés ou de conditions formulées comme hypothèses : ces hypothèses sont au départ celles de l'énoncé, mais peuvent s'enrichir de résultats acquis au fur et à mesure du déroulement de la démonstration ; ceci entraîne des modifications de la figure initiale ou une lecture différente de celle-ci.
- ◇ Appréhender toute figure de façon opératoire (voir le paragraphe 2) en y incluant d'éventuels tracés supplémentaires propres à trouver une procédure de résolution du problème posé.

Ainsi décrite, la visualisation en mathématiques est une véritable démarche mathématique.

Elle peut fonctionner de façon autonome. Son langage est celui de l'argumentation. Le raisonnement consiste à expliquer des traitements de figures et conduit à une justification de conjectures. Si on ne juge pas nécessaire de démontrer un résultat utile, on peut s'en tenir là à condition de dire explicitement qu'il ne s'agit pas de démonstration mais d'explication visuelle.

Elle remplit un rôle heuristique important lorsqu'elle fonctionne en interaction avec le discours déductif dans l'élaboration d'une démonstration. Elle aide à déterminer des processus de résolution, à énoncer des conjectures et à trouver des propriétés ou théorèmes à mettre en œuvre pour la démonstration.

Les exemples étudiés au paragraphe 3 (il y en a d'autres) montrent que les problèmes d'aires et, plus généralement, les situations géométriques susceptibles d'être résolues par les aires constituent un domaine particulièrement apte à l'apprentissage de la visualisation dans son fonctionnement propre et dans son rôle heuristique. L'importance du rôle de la visualisation dans le raisonnement géométrique mérite un apprentissage, tout autant que le raisonnement déductif. Il paraît donc intéressant de promouvoir un enseignement qui permettrait un apprentissage de traitements figuraux, en particulier de la reconfiguration qui a un rôle-clé pour trouver des sous-figures intéressantes lors de la résolution de problèmes de géométrie. La reconfiguration n'est pas le seul traitement figural qui rende compte du pouvoir heuristique des figures et n'est pas pertinente pour toutes les situations géométriques. Mais nous la privilégions pour deux raisons : la première est qu'elle a joué historiquement un grand rôle, la deuxième est que les situations géométriques présentées dans les premières années de collège relèvent de ce type de traitement purement figural. Il paraît donc essentiel de proposer dès le début du collège des exercices dont la résolution peut être obtenue par un traitement figural et où il est possible de donner une explication visuelle.

Bibliographie

- [1] Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques (1997), *Mathématiques en classe de sixième. La mise en œuvre des programmes 96*.
- [2] R. DUVAL (1995), Sémiosis et Noésis, *Peter Lang*.
- [3] R. DUVAL (2005), *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements*, Annales de didactique et sciences cognitives, **10**, 5–53.
- [4] A. LAUR (2006), *Démontrer par les aires*, Bulletin de l'Association des Professeurs de l'Enseignement Public, **463**, 201–211.
- [5] IREM DE STRASBOURG (1988), Manuel de quatrième, *Istra*.
- [6] D. PERRIN (2006), *Aires et volumes : découpage et recollement*, euler.ac-versailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/perrin/iprdp.pdf

Michel DE COINTET
Marie-Agnès EGRET
IREM de Strasbourg
irem@math.u-strasbg.fr