

# L'ESPACE AU SECOURS DU PLAN

Jean LEFORT

**Résumé :** Certains problèmes de géométrie plane se résolvent plus facilement quand on les considère comme des problèmes de géométrie dans l'espace. Sur quatre exemples, la comparaison des deux démonstrations permet de montrer l'intérêt du changement de point de vue.

**Mots-clé :** Axe radical - Brianchon - Calisson - Cube - Desargues - Empilement - Espace, Géométrie - Géométrie projective - Perspective - Puissance d'un point par rapport à un cercle.

## Introduction

Nous vivons dans un monde à trois dimensions d'espace. Quand nous faisons de la géométrie plane, nous travaillons dans un sous-espace de dimension deux. Bien évidemment les mathématiciens ont imaginé toutes sortes de mondes à deux dimensions qui ne font pas appel à l'existence d'un monde à trois dimensions. Mais nous restons à un niveau élémentaire où notre perception du plan est une perception globale puisque vue de la troisième dimension. De très nombreuses figures planes peuvent être interprétées comme une projection convenable d'une figure de l'espace et dans cette optique les démonstrations des propriétés d'une telle figure deviennent immédiates alors qu'en restant dans le plan les démonstrations sont assez longues et peu évidentes. On objectera, bien sûr, que la démonstration d'une propriété d'une figure plane faisant appel à l'espace n'est pas une démonstration intrinsèque. D'un point de vue puriste, on aura tout à fait raison, mais je pense que ce point de vue est l'apanage du spécialiste et non pas de l'apprenant tant qu'il n'est pas en mesure d'apprécier l'existence d'autres géométries. Je propose donc quelques exemples, certains assez classiques, d'autres beaucoup moins.

## 1. Théorème de Desargues

On considère deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  tels que les droites  $(BC)$  et  $(B'C')$  se coupent en un point  $\alpha$ , les droites  $(CA)$  et  $(C'A')$  en  $\beta$  et enfin  $(AB)$  et  $(A'B')$  en  $\gamma$ . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) Les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont soit parallèles, soit concourantes en  $I$ .
- (2) Les points  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont alignés sur une droite  $(D)$ .

On sait en réalité que ce théorème est un théorème de géométrie projective, d'où l'apparition du choix entre droites concourantes et droites parallèles. Pour être tout à fait complet on pourrait supposer que l'un des points  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$  est rejeté à l'infini, par exemple le point  $\gamma$  auquel cas la droite  $(\alpha\beta)$  serait parallèle aux droites  $(AB)$  et  $(A'B')$ . Mais mon but est simplement de montrer l'usage de l'espace comme auxiliaire de démonstration et je ne cherche pas à être exhaustif.

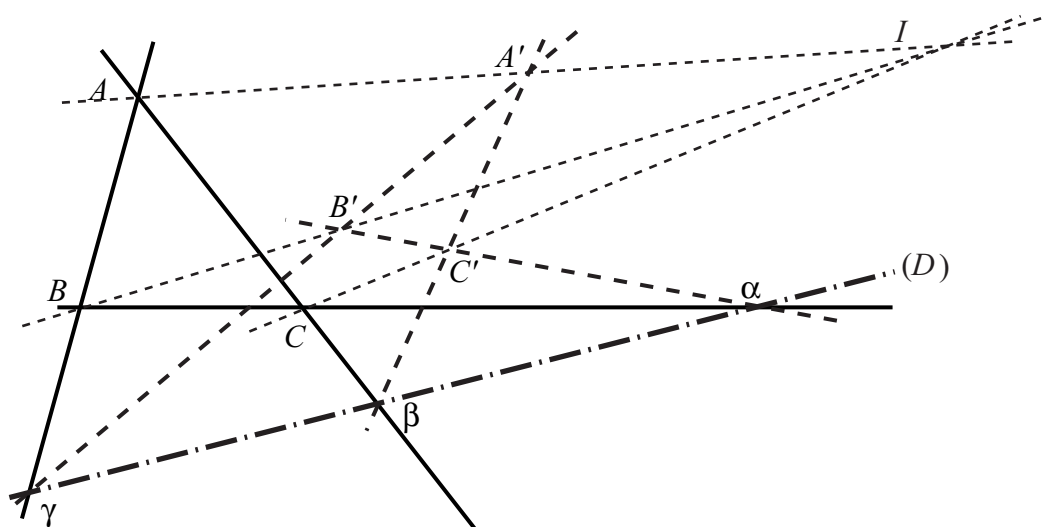


Figure 1

### 1.1. Démonstration dans le plan

Il existe bien évidemment une démonstration projective du théorème.

- (1)  $\implies$  (2) : On envoie les points  $\alpha$  et  $\beta$  à l'infini. Dans ce cas, les droites  $(BC)$  et  $(B'C')$  d'une part et les droites  $(CA)$  et  $(C'A')$  d'autre part, sont parallèles. Si le point  $I$  est à distance finie (respectivement à l'infini), alors il existe une homothétie (respectivement une translation) qui envoie  $A$  sur  $A'$ ,  $B$  sur  $B'$  et  $C$  sur  $C'$  et par suite  $(AB)$  est parallèle à  $(A'B')$  ce qui prouve que  $\alpha$  est également à l'infini et les points  $\alpha, \beta, \gamma$  sont alignés.
- (2)  $\implies$  (1) : Réciproquement, si les points  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont tous les trois sur la droite à l'infini, alors les deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont leurs côtés respectifs parallèles, ils sont donc images l'un de l'autre soit par une translation, soit par une homothétie. Dans le premier cas les droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  sont parallèles, dans le deuxième cas elles sont concourantes.

On pourra objecter que ce type de démonstration projective n'est autre que, le vocabulaire y fait référence, une forme de projection de l'espace sur le plan. Historiquement, c'est bien ainsi que la théorie est apparue. Voici une démonstration non projective de la partie directe dans le cas où le point  $I$  existe. Cette démonstration<sup>1</sup> est extraite du livre du problème Le calcul barycentrique de l'IREM de Strasbourg ([1], page 90).

Il existe des nombres réels  $a, a', b, b', c, c'$  non nuls avec  $a + a' = b + b' = c + c' = 1$ , tels que

$$I = aA + a'A' = bB + b'B' = cC + c'C' .$$

Il en résulte que  $bB - cC = c'C' - b'B'$ . Comme les droites  $(BC)$  et  $(B'C')$  se coupent, les coefficients  $b$  et  $c$  ainsi que les coefficients  $b'$  et  $c'$  sont distincts. Le point d'intersection  $\alpha$  de ces droites est caractérisé par les relations

$$bB - cC = c'C' - b'B' = (b - c)\alpha .$$

<sup>1</sup>Une démonstration barycentrique complète du théorème de DESARGUES est en ligne sur la page d'Annette PAUGHAM [3].

Il vient de même  $cC - aA = (c - a)\beta$  et  $aA - bB = (a - b)\gamma$ . En ajoutant membre à membre les trois relations, il vient

$$(b - c)\alpha + (c - a)\beta + (a - b)\gamma = 0 ,$$

d'où il résulte que les trois points  $\alpha, \beta, \gamma$  sont alignés.

## 1.2. Démonstration dans l'espace

On interprète la figure comme la projection sur un plan d'un solide de l'espace<sup>2</sup>, en l'occurrence une pyramide (cas des droites concourantes en  $I$  comme le montre la figure ci-après) ou un prisme (cas des droites parallèles).

- Pour la partie directe, (1)  $\implies$  (2), on coupe ce solide par les plans  $(ABC)$  et  $(A'B'C')$ . Ces deux plans se coupent suivant une droite qui contient les points  $\alpha, \beta, \gamma$ , d'où le résultat.
- Pour la réciproque, (2)  $\implies$  (1), considérons deux plans distincts  $(ABC)$  et  $(A'B'C')$  se coupant selon  $(D) = (\alpha\beta\gamma)$ .

Si  $(AB)$  et  $(A'B')$  se coupent en  $\gamma$  les points  $A, B, A', B'$  sont coplanaires et par suite  $(AA')$  et  $(BB')$  se coupent en  $I_3$ . De la même façon  $(BB')$  et  $(CC')$  se coupent en  $I_1$  et  $(CC')$  et  $(AA')$  se coupent en  $I_2$ . Supposons  $I_1 \neq I_2$  :  $(I_1I_2)$  est une droite du plan  $(ABA'B')$  donc  $C$  et  $C'$  sont dans ce plan et par suite les plans  $(ABC)$  et  $(A'B'C')$  sont confondus contrairement à l'hypothèse faite. Les points  $I_1$  et  $I_2$  sont donc confondus en un point situé sur  $(AA')$  et  $(BB')$  qui est nécessairement le point  $I_3$ , ce qui achève la démonstration dans le cas où les intersections existent.

Le lecteur traitera de façon analogue le cas où certaines des droites sont parallèles.

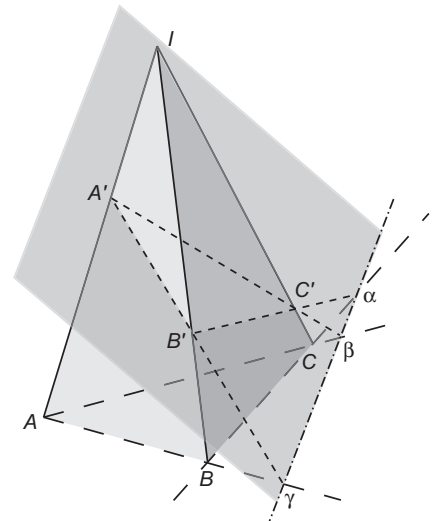


Figure 2

## 2. Les calissons d'Aix

Cette pâtisserie, spécialité de la région d'Aix-en-Provence, se présente habituellement sous la forme de losanges aux sommets légèrement arrondis. Ces losanges ont la particularité d'être formés de deux triangles équilatéraux accolés par une base commune. On peut donc regrouper les calissons par trois, quatre, cinq ou six autour d'un sommet puisque les angles de ces losanges sont de  $60^\circ$  et  $120^\circ$ . Ceci permet de varier la présentation. Nous allons nous intéresser au cas où les calissons sont rangés dans une boîte qui est un hexagone régulier aux dimensions ad hoc pour pouvoir y placer un nombre entier de calissons sans laisser de vide.

En termes mathématiques, nous dirons que nous cherchons à paver un hexagone régulier par des losanges dont un angle vaut  $60^\circ$  et dont le côté divise exactement le côté de l'hexagone. Ce pavage peut s'effectuer de bien des façons mais chaque losange n'y a que trois orientations possibles puisque ses côtés sont parallèles à deux côtés consécutifs de l'hexagone. Le but est de démontrer que chaque orientation contient le même nombre de losanges.

<sup>2</sup>Un résultat plus subtil est donné par le théorème de POHLKE.

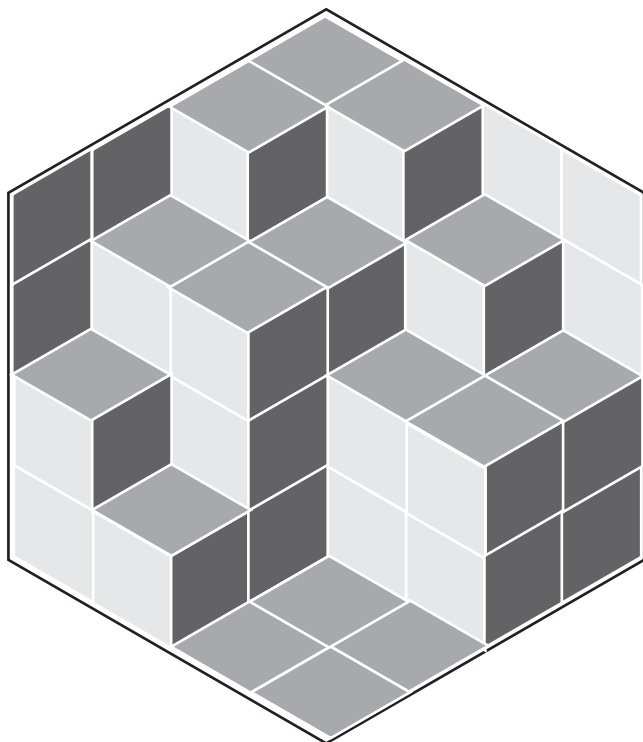


Figure 3

Voici un rangement de lozanges dans un hexagone. On vérifie qu'il y a autant de lozanges dans la direction gris clair que dans la direction gris moyen ou dans la direction noire.

### 2.1. Démonstration dans le plan

Je reprends ici la démonstration de Guy DAVID et Carlos TOMEI ([2]).

Considérons la boîte hexagonale  $ABCDEF$  de côté  $n$  dans laquelle ont été rangés les calissons de côté 1. Ils sont au nombre de  $3n^2$  comme le montre un calcul élémentaire d'aire. On considère des chaînes de calissons telles que deux successifs aient un côté commun parallèle à un des côtés de la boîte (toujours le même), le premier calisson étant placé le long de ce côté de la boîte. On appelle chaînes de type  $C_1$  celles qui partent du côté  $[AB]$  de la boîte (cf. figure ci-contre), chaînes de type  $C_2$  celles qui partent du côté  $[AF]$  et chaînes de type  $C_3$  celles qui partent du côté  $[BC]$ .

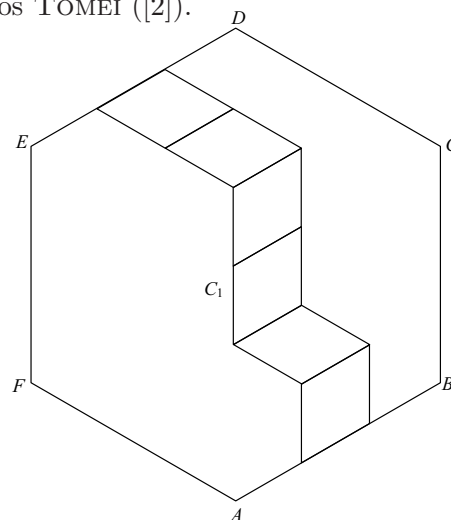


Figure 4

- Il est clair qu'une chaîne  $C_i$  va d'un côté au côté opposé qui lui est parallèle.
- Deux chaînes de même type  $C_i$  et  $C'_i$  n'ont aucun calisson en commun.
- Deux chaînes de type différent  $C_i$  et  $C_j$  avec  $i \neq j$  ont exactement un calisson en commun.
- Les calissons appartenant à deux chaînes de type donné  $C_i$  et  $C_j$  ont tous la même orientation (chacun des types détermine la direction d'un des côtés du calisson).
- Il y a exactement  $n$  chaînes de chaque type (on ne peut placer que  $n$  calissons le long de chaque côté de la boîte).

Considérons alors les  $n$  chaînes de type  $C_1$  et les  $n$  chaînes de type  $C_2$ . Les calissons qui sont à l'intersection d'une chaîne de type  $C_1$  et d'une chaîne de type  $C_2$  sont au nombre de  $n^2$ . Il y a donc au moins  $n^2$  calissons qui ont l'orientation  $AB - AF$ . Mais le même raisonnement prouve qu'il y a aussi au moins  $n^2$  calissons dans chacune des deux autres orientations. Comme le total est de  $3n^2$ , il y a donc exactement  $n^2$  calissons dans chaque orientation.

## 2.2. Démonstration dans l'espace

La démonstration qui suit est due à Jean MARTINET<sup>3</sup>. Elle est citée dans la référence [2].

La figure 3 fait irrésistiblement penser à un empilement de cubes dessiné selon une perspective isométrique. Ces cubes sont coloriés avec trois couleurs, une couleur pour chaque direction de face correspondant aux trois plans de coordonnées. Si au lieu de considérer une perspective isométrique nous projetons l'empilement des cubes orthogonalement sur l'un des plans de coordonnées, il est clair que l'on voit alors  $n^2$  petits carrés de la même couleur. Ceci semble achever la démonstration.

Toutefois elle repose sur l'observation d'un dessin et rien ne prouve que toutes les configurations conduisent à la projection d'un empilement de cubes. Nous allons montrer que c'est bien le cas en associant un triplet d'entiers à chaque sommet du graphe  $\Gamma$  que forment les côtés des calissons. Ce triplet est ensuite interprété comme les coordonnées d'un point de l'espace.

Au point  $A$  est associé le triplet  $(n, n, 0)$ , (figure 5). Si au sommet  $S$  est associé le triplet  $(a, b, c)$  alors au sommet voisin  $S'$  sera associé le triplet  $(a', b', c')$  avec

1.  $(a', b', c') = (a - 1, b, c)$  si  $(SS') \parallel (AB)$  et  $S'$  au dessus de  $S$  ;
2.  $(a', b', c') = (a + 1, b, c)$  si  $(SS') \parallel (AB)$  et  $S'$  au dessous de  $S$  ;
3.  $(a', b', c') = (a, b - 1, c)$  si  $(SS') \parallel (AF)$  et  $S'$  au dessus de  $S$  ;
4.  $(a', b', c') = (a, b + 1, c)$  si  $(SS') \parallel (AF)$  et  $S'$  au dessous de  $S$  ;
5.  $(a', b', c') = (a, b, c - 1)$  si  $(SS') \parallel (BC)$  et  $S'$  au dessous de  $S$  ;
6.  $(a', b', c') = (a, b, c + 1)$  si  $(SS') \parallel (BC)$  et  $S'$  au dessus de  $S$  .

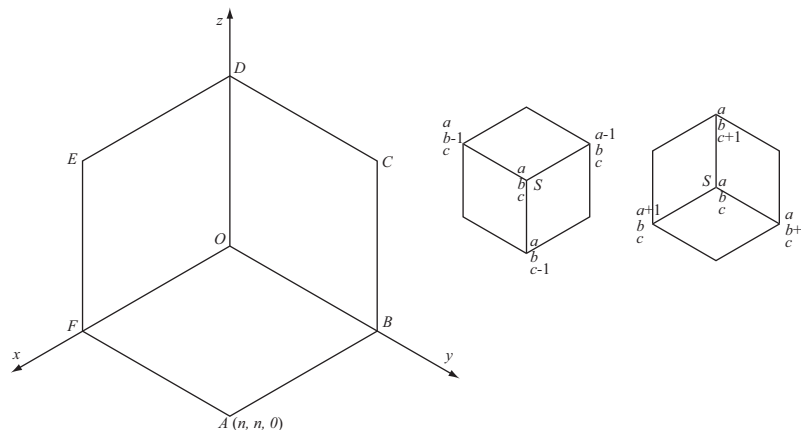


Figure 5

Cette méthode associe un triplet unique à chaque sommet du graphe, quel que soit le chemin suivi depuis  $A$  car si on tourne autour d'un calisson il est clair qu'on revient

<sup>3</sup>Jean MARTINET fut professeur à l'Université Louis Pasteur jusqu'à son décès en 1990. Il a été directeur de l'IREM de Strasbourg.

au point de départ. Il est facile de vérifier qu'un calisson de couleur gris moyen verra ses sommets affectés de quatre triplets ayant la même valeur de  $c$ , ce qui prouve que ce calisson peut être interprété comme une face supérieure d'un cube élémentaire. On a des résultats analogues pour les deux autres orientations.

On a même mieux. Considérons la fonction  $f$  qui à tout couple d'entiers  $(a, b)$ , avec  $a$  et  $b$  dans  $[[1, n]]$ , associe l'entier  $c = \sup\{z \mid (a, b, z) \in \Gamma\}$ . Cette fonction est décroissante en  $a$  et décroissante en  $b$ . En effet pour passer de  $f(a, b)$  à  $f(a + 1, b)$  on effectue quelques-unes des étapes précédentes qui toutes conservent ou diminuent la valeur de  $c$  sauf dans le cas 6 mais celui-ci ne peut avoir lieu en raison de la définition même de  $c = f(a, b)$ . Le raisonnement est le même pour  $b$ .

Ainsi l'empilement des cubes correspond-il à un empilement stable physiquement dans la position où le grand cube a sa diagonale verticale. Il y a donc autant de rangements de calissons dans une boîte hexagonale de côté  $n$  que de façons de ranger au plus  $n^3$  cubes dans un cube de côté  $n$  de façon que ces cubes soient stables quand on place la boîte grande diagonale debout ou enfin de fonctions de  $[[1, n]]^2$  dans  $[[1, n]]$  décroissantes sur chacune des variables. Ce dénombrement est toutefois difficile : pour  $n = 1$  on a 2 solutions, pour  $n = 2$  il y a 20 solutions, puis 980 pour  $n = 3 \dots$

### 3. Des cercles égaux

On considère trois cercles  $C_I, C_J$  et  $C_K$  de même rayon  $R$ , passant par un même point  $O$  et de centres respectifs  $I, J, K$ . On note  $A$  le deuxième point d'intersection de  $C_J$  et  $C_K$ , de même  $B$  est le deuxième point d'intersection de  $C_I$  et  $C_K$  et  $C$  celui de  $C_I$  et  $C_J$ . Alors les points  $A, B$  et  $C$  appartiennent à un même cercle  $C_L$  de centre  $L$  et de même rayon  $R$  (en pointillés sur la figure 6).

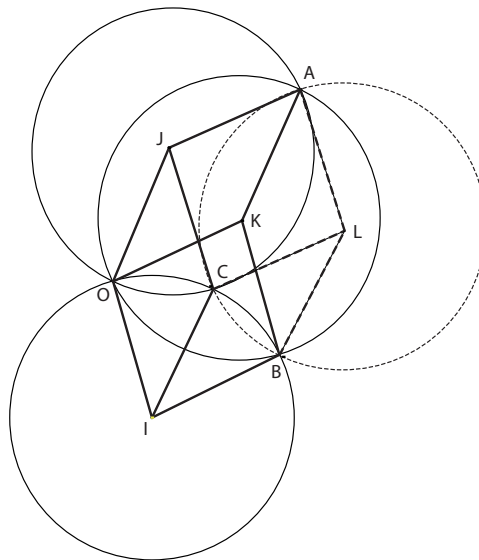


Figure 6

#### 3.1. Démonstration dans le plan

Puisque les cercles ont même rayon, nous avons

$$IO = IB = IC = JO = JA = JC = KO = KA = KB = R .$$

Par conséquent les quadrilatères  $IOKB, JOIC, KOJA$  sont des losanges. Par suite les droites  $(IO), (JC), (KB)$  sont parallèles, de même  $(JO), (KA), (IC)$  et  $(KO), (IB), (JA)$ . Notons  $L$  le symétrique du point  $I$  par rapport à la droite  $(BC)$ . Comme  $I$  est à distance  $R$  de  $B$  et  $C$ , il en est de même pour  $L$  et le quadrilatère  $IBLC$  est un losange. Mais alors  $(LC)$  est parallèle à  $(JA)$  et  $JALC$  est aussi un losange de côté  $R$ . En raison des parallélismes précédents  $IBLC$  se déduit de  $OKAJ$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{OI}$

qui est donc égal à  $\overrightarrow{AL}$ . Nous en déduisons que  $LA = LB = LC = R$  ce qui permet d'affirmer que  $A, B$  et  $C$  sont sur un même cercle de centre  $L$ .

### 3.2. Démonstration dans l'espace

Quand on observe la figure précédente en l'imaginant dans l'espace, il est tentant de voir en  $IOJCLAKB$  la projection d'un cube  $I'O'J'C'L'A'K'B'$ . D'après le théorème de POHLKE,  $O'IJK$  peut être considéré comme la perspective isométrique d'un trièdre orthonormé et par suite  $O'IJKABC$  comme la projection de trois faces d'un cube. Soit alors  $L$  la projection du sommet manquant  $L'$ . Il est clair que  $L'$  est équidistant, sur le cube, des trois sommets voisins  $A', B'$  et  $C'$  et qu'il en est donc de même des projections puisqu'il s'agit d'une perspective isométrique qui conserve les longueurs parallèles aux axes de coordonnées.

On notera que dans ce cas, il n'y a pas une grande différence entre la démonstration plane et celle de l'espace, mais il serait dommage de se passer du point de vue spatial, ne serait-ce que parce que nous avons l'habitude de cette représentation de l'espace.

## 4. Le théorème de Brianchon

Le théorème de BRIANCHON affirme que si un hexagone est circonscrit à un cercle alors les diagonales qui joignent les sommets opposés sont concourantes ou parallèles.

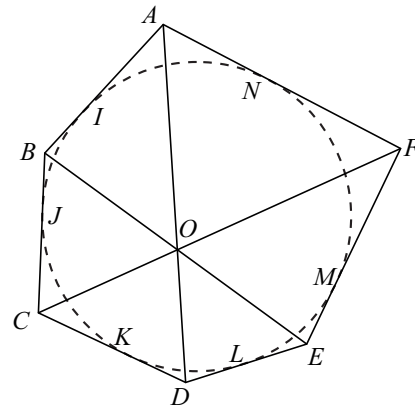


Figure 7

En pratique ce théorème est aussi un théorème de géométrie projective ; il s'applique non seulement à un cercle mais aussi à une conique arbitraire.

### 4.1. Démonstration dans le plan

BRIANCHON (1785 - 1864) a démontré ce théorème en faisant appel à la transformation par polaires réciproques (une forme de dualité) et en se ramenant ainsi au théorème de PASCAL sur les hexagones inscrits dans un cercle dont les côtés opposés se coupent selon trois points alignés.

#### *Polaire réciproque*

La transformation par polaire réciproque par rapport au cercle inscrit dans l'hexagone, transforme le point  $A$  en la droite  $(IN)$ , la droite  $(AB)$  en le point  $I$ , la droite  $(AD)$  en le point d'intersection de  $(IN)$  et  $(KL)$  et le point  $O$  en une droite, celle sur laquelle sont alignés les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone  $IJKLMN$ .

On ne sait pas bien comment PASCAL a démontré son théorème. On lui doit en revanche sa généralisation à une conique quelconque. Il est clair que cette démonstration du théorème

de BRIANCHON n'est pas accessible à un lycéen. Une démonstration analytique est longue et fastidieuse. Je dois à Michel ÉMERY<sup>4</sup> la démonstration suivante qui ne repose que sur la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle .

*Puissance d'un point par rapport à un cercle et axe radical*

Soit  $M$  un point et  $(C)$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Une droite passant par  $M$  coupe  $(C)$  en  $A$  et  $B$ . Alors la quantité  $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$  est indépendante de la sécante choisie et est appelée puissance de  $M$  par rapport au cercle  $(C)$ . En particulier si la droite est tangente au cercle en  $T$  alors  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MT}^2$ .

En faisant intervenir le milieu  $I$  de  $[AB]$ , il est facile de voir que  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MO^2 - R^2$ . Soit  $O$  et  $M$  de coordonnées respectives  $(a, b)$  et  $(x, y)$  alors

$$MO^2 - R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 ,$$

qui n'est autre que le premier membre de l'équation du cercle (un point du cercle a une puissance nulle). On en déduit que l'ensemble des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles est une droite puisque l'on a

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 &= (x - a')^2 + (y - b')^2 - R'^2 \\ \iff 2(a - a')x + 2(b - b')y + a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2 + R^2 - R'^2 &= 0 . \end{aligned}$$

Cette droite est appelée l'axe radical des deux cercles.

*Démonstration du théorème de BRIANCHON*

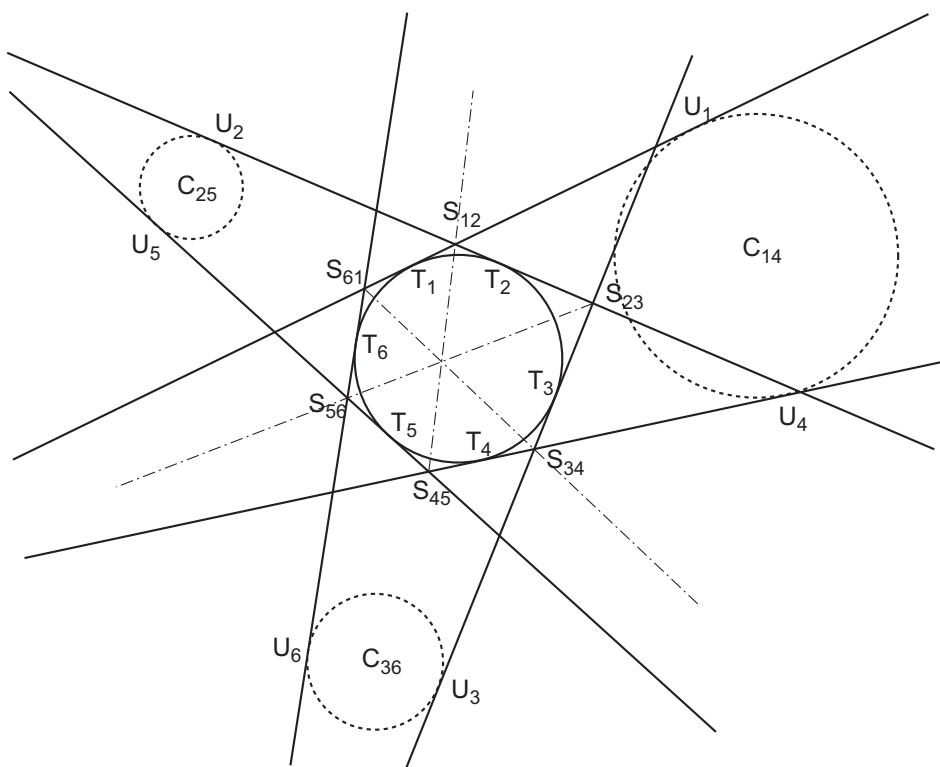


Figure 8

Orientons le cercle et ses tangentes de la même façon (c'est-à-dire qu'au point de contact les orientations soient les mêmes). Notons, comme sur la figure 8,  $T_i$  ( $i$  de 1 à 6) les points

<sup>4</sup>Il avait vu cette démonstration quand il était en mathélem.



de contacts des côtés de l'hexagone avec son cercle inscrit et  $S_{ij}$  le sommet intersection des côtés tangents en  $T_i$  et  $T_j$ . On choisit un point  $U_1$  sur la tangente en  $T_1$  puis on considère les points  $U_i$  sur les tangentes en  $T_i$  tels que

$$\overline{T_1U_1} = -\overline{T_2U_2} = \overline{T_3U_3} = -\overline{T_4U_4} = \overline{T_5U_5} = -\overline{T_6U_6}.$$

Il existe un cercle  $C_{14}$  tangent en  $U_1$  au côté passant par  $T_1$  et en  $U_4$  au côté passant par  $T_4$ , comme on le voit en faisant une symétrie par rapport à la bissectrice des deux côtés (ou l'axe médian en cas de parallélisme). On a de même un cercle  $C_{25}$  tangent en  $U_2$  et  $U_5$  aux côtés passant par  $T_2$  et  $T_5$  et enfin un cercle  $C_{36}$  tangent en  $U_3$  et  $U_6$  aux côtés passant par  $T_3$  et  $T_6$ . De l'égalité des segments de tangentes issus d'un point à un cercle on en déduit

$$\overline{T_1U_1} = -\overline{T_2U_2} \text{ et } \overline{T_1S_{12}} = -\overline{T_2S_{12}} \implies \overline{S_{12}U_1} = -\overline{S_{12}U_2} \implies (S_{12}U_1)^2 = (S_{12}U_2)^2.$$

Ce qui prouve que  $S_{12}$  a même puissance par rapport aux deux cercles  $C_{14}$  et  $C_{25}$ . On démontre de même que  $S_{45}$  a même puissance par rapport à ces deux mêmes cercles. Il en résulte que la droite  $(S_{12}S_{45})$  est l'axe radical de  $C_{14}$  et  $C_{25}$ .

Semblablement, la droite  $(S_{23}S_{56})$  (*resp.*  $(S_{34}S_{61})$ ) est l'axe radical de  $C_{25}$  et  $C_{36}$  (*resp.*  $C_{36}$  et  $C_{14}$ ). Mais le point d'intersection de deux de ces axes radicaux a même puissance par rapport aux trois cercles et se trouve donc sur le troisième axe radical. Les trois droites, diagonales de l'hexagone initial, sont donc concourantes.

## 4.2. Démonstration dans l'espace

La démonstration qui suit est due à Miguel DE GUZMÁN. S'il l'a publiée en 1983 dans [4], il l'avait découverte dès 1976. Commençons par deux lemmes, le premier est illustré par la figure suivante ; nous en laissons la démonstration à la charge du lecteur.

*Lemme 1*

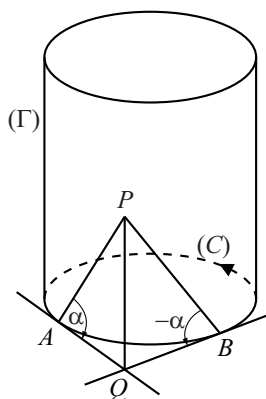


Figure 9

On considère un cylindre circulaire droit  $(\Gamma)$  de base le cercle  $(C)$  que l'on oriente arbitrairement. Soit deux points  $A$  et  $B$  de  $(C)$  et les deux demi-tangentes  $(Ax)$  et  $(By)$  de sens contraire en  $A$  et  $B$ . Soit  $(\Pi_A)$  et  $(\Pi_B)$  les plans tangents à  $(\Gamma)$  en  $A$  et  $B$ , plans que l'on oriente de la même façon vus de l'intérieur du cylindre. Soit enfin deux droites tangentes à  $(\Gamma)$  respectivement en  $A$  et  $B$  et faisant des angles opposés (différents d'un angle droit) avec les demi-tangentes.

Alors ces deux droites sont soit parallèles et alors  $A$  et  $B$  sont diamétralement opposées, soit se coupent en un point  $P$  dont la projection orthogonale sur le plan de  $(C)$  est le point  $Q$  intersection des tangentes  $(Ax)$  et  $(By)$ .

Réciproquement si  $Q$  est l'intersection des tangentes en  $A$  et  $B$  au cercle  $(C)$  et si on se donne  $P$  tel que  $(PQ)$  est parallèle à l'axe du cylindre, alors les droites  $(PA)$  et  $(PB)$  font des angles opposés avec  $(AQ)$  et  $(BQ)$  moyennant l'orientation ci-dessus des plans tangents.

Le *lemme 2* annonce que trois droites de l'espace qui ne sont pas coplanaires et qui se coupent deux à deux passent par un même point. La démonstration est immédiate.

*Démonstration.* — Considérons le cercle  $(C)$  dans le plan  $(\pi)$  et l'hexagone circonscrit  $ABCDEF$ , les points de tangence étant  $I, J, K, L, M, N$ .

Par  $A$  traçons la perpendiculaire à  $(\pi)$  jusqu'en un point arbitraire  $A'$ . Joignons  $A'$  à  $I$  et prolongeons jusqu'à couper en  $B'$  la perpendiculaire à  $(\pi)$  en  $B$ . Continuons ainsi dans l'espace pour obtenir successivement les points  $A', B', C', D', E', F'$  et nous revenons en  $A'$ .

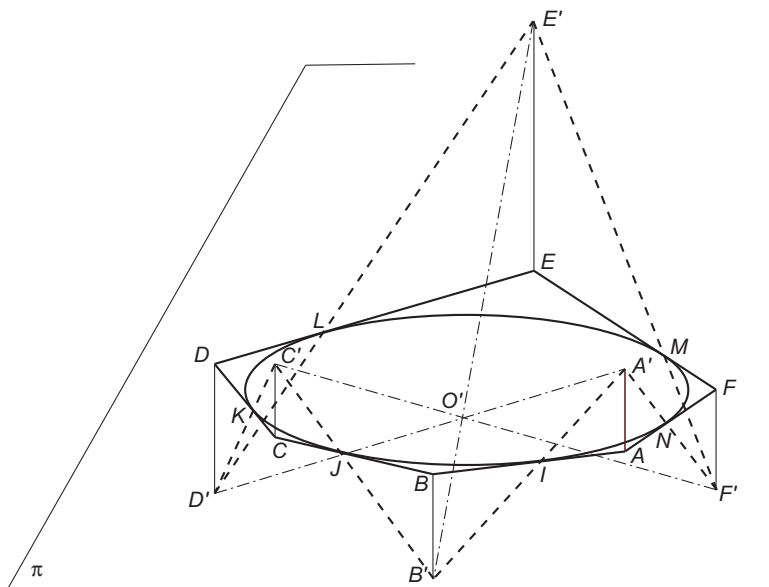


Figure 10

Considérons alors les droites  $(A'D')$ ,  $(B'E')$  et  $(C'F')$ . Observons que  $(A'B')$  et  $(D'E')$  sont dans la situation du lemme 1 et qu'ainsi ces droites sont soit parallèles soit concourantes et par suite  $A', B', D', E'$  sont coplanaires et les droites  $(A'D')$  et  $(B'E')$  sont parallèles ou concourantes; mais elles ne peuvent être parallèles par construction, elles sont donc concourantes. Il en est de même pour les droites  $(B'E')$  et  $(C'F')$  et pour  $(C'F')$  et  $(D'A')$ . Il s'ensuit d'après le lemme 2 que ces trois droites sont concourantes en un point  $O'$ . Mais alors leurs projections orthogonales sur  $(\pi)$  ne sont autres que les diagonales de l'hexagone qui par suite se coupent en un point  $O$ .

## 5. Conclusion

Certaines démonstrations ne sont guère évidentes dans le plan. Les exemples précédents l'ont amplement montré. Mais voir dans l'espace n'est pas habituel et pourtant pour au moins la démonstration sur le rangement des calissons et celle sur le théorème de DESARGUES, le simple fait de dire « regarder la figure comme une figure de l'espace » et la démonstration saute aux yeux. C'est ce qui s'appelle changer de point de vue.

Bien sûr, la démonstration du théorème de BRIANCHON par Miguel DE GUZMÁN n'est pas évidente, mais force est de reconnaître qu'elle fait appel à des notions bien plus élémentaires et qu'elle est plus simple que les démonstrations que l'on peut imaginer dans le plan (par la géométrie analytique, par la dualité ou comme ici en utilisant la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle).

Apprendre à changer de point de vue, voilà ce qui me paraît essentiel dans la formation des élèves. Il est certes beaucoup plus facile d'apprendre des théorèmes et de savoir les appliquer dans des situations évidentes. Seulement, pour cela, nul besoin de professeurs de mathématiques, un répétiteur suffit et demain des machines remplaceront l'homme comme elles l'ont remplacé pour bien des calculs. Et au-delà de l'élève c'est aussi une attitude indispensable pour qui veut faire un tant soit peu de recherche (en mathématique comme ailleurs). Rappelons à ce propos qu'après la découverte des premiers pavages obligatoires-

ment non-périodiques la recherche sur ce sujet a fait un bond en avant quand on a su les interpréter en plaçant dans un réseau spatial cristallin un plan ne contenant qu'un des atomes du cristal.

Quand on parle d'utilité des mathématiques, c'est dans ce genre de formation au changement de point de vue, de formation à la transposition de certains savoirs d'un domaine à l'autre, de formation à regarder autrement une équation ou une figure que les mathématiques sont vraiment utiles car elles forment alors des citoyens critiques donc responsables.

## Bibliographie

- [1] IREM DE STRASBOURG (1975), Le calcul barycentrique, *Cedic* . En ligne à l'adresse <http://irem.u-strasbg.fr/structure/framelivrepb.html>
- [2] G. DAVID & C. TOMEI (1989), *The problem of Calissons*, Am. Math. Monthly. **96,5**, 429–431.
- [3] A. PAUGAM (2003), *Une démonstration d'un théorème de DESARGUES par le calcul barycentrique*, en ligne sur sa page <http://www.perso.univ-rennes1.fr/annette.paugam/>.
- [4] M. DE GUZMÁN (1983), *Algunos aspectos insólitos de la actividad matemática*, Investigación y Ciencia (édition espagnole du Scientific American), février 1983, 100-108.