

QUELQUES NOTIONS SUR LES ORDINAUX

Jean LEFORT

Résumé : Après avoir défini ce qu'est un bon ordre, on envisage tous les bons ordres de l'ensemble des naturels. On définit ainsi des ordinaux transfinis dont le plus petit, oméga, correspond à l'ordre habituel sur \mathbf{N} . On définit ensuite des opérations entre ordinaux (addition, multiplication, exponentiation) dont on donne quelques propriétés. L'existence d'une relation d'ordre entre ordinaux permet d'aborder la notion de récurrence transfinie. Enfin on laisse entendre qu'il existe des ordinaux plus grands que tous ceux que l'on peut définir à partir des naturels.

Mots-clés : Infini, ordinal, ordre, bon ordre.

On distingue habituellement dans la langue naturelle les nombres cardinaux comme 1, 2, 3, ... des nombres ordinaux qui sont 1^{er}, 2^e, 3^e, ... Dans ce dernier cas on parle parfois de « numéro ». Selon les langues, ces deux notions sont plus ou moins distinguées. L'anglais ignore cette distinction, l'allemand ou le russe les distinguent nettement tandis que le français hésite puisque si on parle de Louis I^{er} ou du 1^{er} avril, on parle ensuite de Louis XV ou du 12 avril, *etc.* Comme leur nom l'indique, les ordinaux font référence à l'ordre alors que les cardinaux ne se réfèrent qu'à la quantité. On distingue donc les deux 30 des phrases suivantes :

Le mois d'avril a 30 jours ; notion de cardinal.

C'était le 30 avril ; notion d'ordinal (on sous-entend que c'est le lendemain du 29, lui-même lendemain du 28, ...).

1. Rappels

On dit qu'une relation (notée par exemple \triangleleft) dans un ensemble E est une *relation d'ordre* si elle possède les trois propriétés suivantes :

- elle est réflexive : $\forall x \in E, x \triangleleft x$;
- elle est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \triangleleft y \text{ et } y \triangleleft z) \implies x \triangleleft z$;
- elle est antisymétrique : $\forall (x, y) \in E^2, (x \triangleleft y \text{ et } y \triangleleft x) \implies x = y$.

On caractérise certains ordres grâce à des propriétés supplémentaires.

- On dit que l'ordre est *total* dans E si $\forall (x, y) \in E^2, x \triangleleft y$ ou $y \triangleleft x$.
- On dit que l'on a affaire à un *bon ordre* dans E ou que E est *bien ordonné* si toute partie non vide possède un plus petit élément. Ceci implique en particulier que l'ordre est total.

On admet en général l'axiome du choix, équivalent à l'axiome de Zermelo qui dit que tout ensemble admet au moins une relation de bon ordre. Cependant, on ne connaît pas explicitement une telle relation de bon ordre sur \mathbf{R} .

Exemples

- La relation d'ordre habituelle dans \mathbf{N} , notée \leq , est une relation d'ordre total et aussi une relation de bon ordre.
- La relation d'ordre habituelle dans \mathbf{Z} , notée \leq , est une relation d'ordre total, mais n'est pas une relation de bon ordre (la partie $] -\infty, 2]$ ne possède pas de plus petit élément).
- La relation de divisibilité dans \mathbf{N}^* , notée $|$, est une relation d'ordre qui n'est pas total (on dit alors partiel).
- La relation d'inclusion dans l'ensemble des parties d'un ensemble donné, notée \subset , est une relation d'ordre partiel.

2. Quelques bons ordres sur \mathbf{N}

Il est possible de fabriquer une grande quantité de relations d'ordre sur un ensemble donné. Ainsi les 26 lettres de l'alphabet français sont classées habituellement suivant l'ordre alphabétique (a, b, c, \dots) mais suivant l'ordre $(a, z, e, r, t, y, \dots)$ sur le clavier de votre ordinateur. Dans les deux cas, on peut construire une bijection avec l'ensemble $\llbracket 1, 26 \rrbracket$ qui respecte la relation d'ordre. C'est implicitement ce qui a été fait en énonçant les lettres dans un certain... ordre! Nous avons ainsi un isomorphisme d'ordre et même de bon ordre. L'ordre alphabétique usuel est tellement connu que si l'on signale une référence se trouvant dans le paragraphe d du chapitre 8, tout le monde sait qu'elle se trouve après le paragraphe c de ce même chapitre, *etc.*

Tant qu'il s'agit d'ensemble fini on peut se ramener à une partie finie de \mathbf{N} donc à $\llbracket 0, \dots, n-1 \rrbracket$ pour un certain naturel n (qui est le cardinal de l'ensemble fini). Mais les choses se compliquent dès que l'on passe aux ensembles infinis. \mathbf{N} lui-même peut recevoir plusieurs relations de bon ordre qui ne sont pas isomorphes entre elles. En voici quelques exemples :

1. Plaçons dans \mathbf{N} d'abord tous les nombres impairs puis tous les nombres pairs, c'est-à-dire que l'on a l'ordre $(1, 3, 5, 7, \dots, 0, 2, 4, 6, 8, \dots)$. Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation de bon ordre. Seulement il est impossible d'établir une bijection de \mathbf{N} sur lui-même qui transforme la relation d'ordre habituelle en cette nouvelle relation. En effet dans le cas présent, il y a deux éléments, 0 et 1, qui n'ont pas de prédécesseur tandis que dans l'ordre classique seul 0 n'a pas de prédécesseur.
2. Inspiré d'un résultat de SARKOVSKI, voici un bon ordre sur \mathbf{N}^* :
 $(1, 3, 5, \dots, 2, 6, 10, \dots, 4, 12, 20, \dots, \dots, 2^n \times 1, 2^n \times 3, 2^n \times 5, \dots, \dots)$,
 où le premier paquet ne contient que les nombres impairs et les suivants ces mêmes nombres multipliés par les puissances successives de 2. On voit ici apparaître une infinité d'éléments qui n'ont pas de prédécesseur.
3. Considérons dans \mathbf{N} l'ordre $(1, 2, 3, 4, \dots, 0)$. Qu'il n'y ait pas isomorphisme avec la relation d'ordre habituelle résulte de la remarque faite sur l'exemple 1. Mais il n'y en a pas non plus avec ce même exemple 1 car ici il y a un élément, 0, qui n'a pas de successeur, tandis que dans les exemples 1 et 2 tous les éléments ont un successeur. Ici 0 est l'unique élément qui vient après

tous les autres. Il est assez tentant de dire que c'est l'infini plus un. Nous y reviendrons.

3. Les ordinaux finis

Les ordinaux finis sont tout simplement les naturels habituels. Seulement pour, d'une part bien mettre en évidence qu'un ordinal comme 5 vient après les ordinaux 0, 1, 2, 3 et 4, et d'autre part pour permettre de mieux représenter les ordinaux infinis, nous allons écrire ces ordinaux sous la forme d'une suite ordonnée. Ceci conduit à l'écriture qui rappelle (ce n'est pas un hasard) ce qui a été fait précédemment.

$$\begin{aligned} 0 &= () \\ 1 &= (0) \\ 2 &= (0, 1) \\ 3 &= (0, 1, 2) \\ &\dots\dots \\ n &= (0, 1, 2, 3, \dots, n - 1) \end{aligned}$$

Les parenthèses ne sont là que comme délimiteurs. Ce qui compte, c'est l'ordre dans lequel est écrite la liste. Nous voyons ainsi que l'ordinal 2 est à la fois un élément de l'ordinal 3 (le dernier élément) et une partie de l'ordinal 3 (appelée la section commençante $(0, 1)$).

Nous utilisons l'écriture à partir de l'ensemble \mathbf{N} parce que cet ensemble est bien connu avec son ordre naturel. Mais il est clair que nous aurions pu représenter 3 par (a, b, c) où par définition $a < b < c$, ou par tout autre ensemble de trois éléments totalement ordonné par l'écriture même de leur liste ; ainsi $(7, 9, 100)$ convient également.

3.a. Addition de deux ordinaux finis

Nous voulons retrouver l'addition habituelle, l'addition où $2 + 3 = 5$, mais en utilisant l'écriture ci-dessus. Il n'est pas possible de mettre seulement bout à bout les représentations $(0, 1)$ et $(0, 1, 2)$ car nous obtiendrions $(0, 1, 0, 1, 2)$ qui ne contient que trois éléments distincts dont il est impossible de définir l'ordre (où serait 1 ?). Il faut donc utiliser une copie de $(0, 1, 2)$ qui ne contient pas les éléments de $(0, 1)$. Le plus simple est de prendre $(0', 1', 2')$ et d'écrire

$$2 + 3 = (0, 1) + (0, 1, 2) = (0, 1) + (0', 1', 2') = (0, 1, 0', 1', 2') .$$

L'idée est que tout nombre primé est plus grand que tout nombre non primé. Bien sûr, dans le cas présent où nous nous intéressons aux ordinaux finis, il aurait mieux valu réécrire $(0, 1, 2)$ sous la forme $(2, 3, 4)$ pour obtenir :

$$2 + 3 = (0, 1) + (0, 1, 2) = (0, 1) + (2, 3, 4) = (0, 1, 2, 3, 4) ,$$

et l'on reconnaît beaucoup plus facilement l'ordinal 5 comme on s'y attendait.

Mais nous verrons que dans le cas général, il faut être beaucoup plus astucieux. Une méthode assez générale, si on veut écrire la somme de plusieurs ordinaux, et non pas seulement la somme de deux ordinaux, c'est de remplacer dans chaque ordinal, ses éléments par des couples \langle , \rangle dont le premier élément indique le rang de l'ordinal dans l'addition. Ainsi :

$$\begin{aligned} 2 + 5 + 3 &= (0, 1) + (0, 1, 2, 3, 4) + (0, 1, 2) \\ &= (\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle) + (\langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle) + (\langle 3, 0 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle) \\ &= (\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle) , \end{aligned}$$

où l'on utilise l'ordre lexicographique, à savoir que

$$\langle a, b \rangle < \langle c, d \rangle \iff a < c \text{ ou } (a = c \text{ et } b < d) .$$

Et ce dernier résultat est identique à $10 = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ puisqu'il y a une bijection évidente qui respecte l'ordre entre ces deux expressions.

3.b. Multiplication de deux ordinaux finis

La multiplication est une addition répétée, il n'y a pas grand-chose à rajouter par rapport aux problèmes d'écriture qui ont été soulevés à propos de l'addition. Contentons-nous d'un exemple. Pour calculer 2×3 nous plaçons 3 copies distinctes de l'ordinal 2 bout à bout, ainsi :

$$\begin{aligned} 2 \times 3 &= (0, 1) \times 3 = (0, 1) + (0, 1) + (0, 1) = (0, 1) + (0', 1') + (0'', 1'') \\ &= (0, 1, 0', 1', 0'', 1'') \\ &= (0, 1, 2, 3, 4, 5) \\ &= 6 \quad \text{bien entendu !} \end{aligned}$$

4. Opérations sur les ordinaux

Tant qu'on en reste aux éléments finis, il n'y a vraiment pas grand-chose à ajouter. C'est quand on passe à l'infini que cela commence à devenir intéressant en mettant en évidence des propriétés originales. Et c'est en passant à l'infini que la notation précédente qui était rudement lourde va se révéler très pratique.

Un ordinal infini est donné par une relation de bon ordre sur un ensemble infini. S'il existe une bijection respectant l'ordre entre deux ensembles bien ordonnés, ces deux ensembles déterminent le même ordinal.

Le plus simple des ensembles infinis est \mathbf{N} . Nous poserons donc

$$\omega = (0, 1, 2, 3, 4, \dots) ,$$

correspondant à l'ordre habituel. Cependant, il nous arrivera dans certains cas de ne pas utiliser 0 dans l'écriture, faute d'avoir une bonne raison pour le placer à tel ou tel endroit (ce que nous avons fait dans l'exemple 2 inspiré de SARKOVSKI). Il est clair que nous pouvons aussi écrire

$$\omega = (1, 2, 3, 4, 5, \dots) ,$$

puisque'il y a une bijection évidente qui respecte le bon ordre entre \mathbf{N} et \mathbf{N}^* . Pour les autres ordinaux nous utiliserons des lettres grecques minuscules sauf s'il s'agit d'ordinaux finis connus comme $0, 1, \dots$ auquel cas nous utiliserons l'écriture habituelle des nombres. Notons qu' ω a été choisi car c'est la dernière lettre de l'alphabet grec et qu'il note, d'une certaine façon, le « dernier entier » puisqu'il est plus grand que tous les autres !

4.a. Addition des ordinaux

Comme pour les ordinaux finis, pour créer l'ordinal noté $\alpha + \beta$ à partir des deux ordinaux, α et β nous allons mettre bout à bout (on dit concaténer) une représentation d' α et une de β en s'arrangeant pour que ces représentations n'utilisent pas les mêmes symboles et en décidant que les symboles utilisés dans β viennent après ceux utilisés dans α . Commençons par le cas le plus simple, le calcul du successeur d' ω :

$$\begin{aligned}\omega + 1 &= (0, 1, 2, 3, 4, \dots) + (1) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots) + (1') \\ &= (1, 2, 3, 4, 5, \dots) + (0) = (1, 2, 3, 4, 5, \dots, 0) .\end{aligned}$$

Nous avons déjà vu ce bon ordre sur \mathbf{N} au troisième exemple. Il est alors facile de continuer et d'obtenir

$$\begin{aligned}\omega + 2 &= (2, 3, 4, 5, 6, \dots, 0, 1) , \\ \omega + 3 &= (3, 4, 5, 6, 7, \dots, 0, 1, 2) .\end{aligned}$$

Cela devient un peu plus délicat avec $\omega + \omega$ où il nous faut juxtaposer deux copies de l'ordre habituel sur \mathbf{N} ; mais nous en avons déjà vu un exemple :

$$\begin{aligned}\omega + \omega &= (1, 3, 5, 7, \dots, 0, 2, 4, 6, \dots) , \\ \text{puis} \quad \omega + \omega + 1 &= (3, 5, 7, \dots, 0, 2, 4, 6, \dots, 1) , \\ \omega + \omega + \omega &= (1, 4, 7, 10, \dots, 2, 5, 8, 11, \dots, 0, 3, 6, 9, \dots) ,\end{aligned}$$

où nous avons distingué les entiers selon leur reste dans la division par 3.

Nous avons ainsi créé une infinité d'ordinaux infinis que nous appellerons les *ordinaux transfinis*. Il y a malheureusement un gros hic en ce qui concerne leur addition. Voyons-le en calculant

$$1 + \omega = (0) + (0, 1, 2, 3, 4, \dots) = (0) + (1, 2, 3, 4, 5, \dots) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots) = \omega .$$

L'addition n'est plus commutative ! Perdre certaines propriétés quand on cherche à étendre une structure à un ensemble plus vaste est assez classique. Voyons alors les propriétés de l'addition des ordinaux.

- Pour tout ordinal α , $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$ donc 0 est élément neutre.
- Pour tout triplet d'ordinaux (α, β, γ) , $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, ce qui traduit l'associativité.
- Si α, β et γ sont des ordinaux, $\gamma + \alpha = \gamma + \beta \implies \alpha = \beta$. On peut donc simplifier à gauche.

- Mais de $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ on ne peut rien conclure comme le prouve l'exemple $1 + \omega = 0 + \omega$ alors qu'on a $1 \neq 0$.

Il n'est, a priori, pas possible de définir une soustraction parmi les ordinaux car certains ordinaux n'ont pas de prédécesseur. Ainsi, si ω est parfaitement défini de même que $\omega + 1$, il est impossible de définir $\omega - 1$.

4.b. Relation d'ordre dans les ordinaux

Nous avons remarqué, à propos des ordinaux finis, que $2 = (0, 1)$ est à la fois un élément de $4 = (0, 1, 2, 3)$ et une section commençante de 4. Ceci nous permet de définir une relation d'ordre dans les ordinaux. Mais comme nous travaillons toujours à un isomorphisme de bon ordre près (nous parlons ici de *copies*), nous dirons que

$\alpha \leq \beta$ si et seulement si α est une copie d'une section commençante de β .

Il est remarquable que l'ordre défini ainsi est total et même un bon ordre sur les ordinaux (voir [2] p. 48).

Il est facile de voir que l'on a toujours $\alpha < \alpha + 1$ puisqu'il est évident que ces deux ordinaux sont différents; de plus il n'y a aucun ordinal strictement compris entre α et $\alpha + 1$. On pourrait imaginer construire tous les ordinaux en partant de 0 et en ajoutant 1 régulièrement. Seulement on ne construit de cette façon que les ordinaux qui ont un prédécesseur et on ne peut donc pas dépasser ω .

4.c. Ordinal limite et récurrence transfinitie

On dit qu'un ordinal est *limite* s'il n'est pas nul et s'il n'a pas de prédécesseur. Ainsi ω est un ordinal limite et c'est même le plus petit ordinal limite.

En raison de l'existence des ordinaux limites, toute récurrence classique partant d'un ordinal α ne peut dépasser le plus petit ordinal limite supérieur à α . Par exemple, en partant d' $\omega + \omega$ on ne peut jamais atteindre $\omega + \omega + \omega$. Il existe cependant une notion de *récurrence transfinitie* qui permet de s'affranchir de cette difficulté. Si \mathcal{P} est une propriété portant sur les ordinaux satisfaite pour 0 et telle que pour tout ordinal α

$$(\forall \beta < \alpha \quad \mathcal{P}(\beta)) \implies \mathcal{P}(\alpha),$$

alors $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie pour tous les ordinaux.

La démonstration se fait par l'absurde. Supposons que l'on puisse trouver γ avec $\mathcal{P}(\gamma)$ faux. Considérons alors tous¹ les ordinaux \leq à γ pour lesquels la propriété \mathcal{P} n'a pas lieu et notons λ le plus petit de ces ordinaux (dont l'existence est assurée par le bon ordre). Il n'est pas nul et pour tout $\beta < \lambda$ on a $\mathcal{P}(\beta)$. D'après l'hypothèse de récurrence on doit avoir $\mathcal{P}(\lambda)$, ce qui est contradictoire.

1. Nous escamotons ici les difficultés dues au fait que la « collection » de tous les ordinaux n'est pas un ensemble.

4.d. Multiplication des ordinaux

Nous avons vu un cas particulier de multiplication quand nous avons calculé $\omega + \omega$ que nous pouvons écrire $\omega \times 2 = (0, 2, 4, 6, \dots, 1, 3, 5, 7, \dots)$. On imagine assez facilement la multiplication d'un ordinal α par un ordinal fini n : on met n copies d' α bout à bout en veillant à ne pas répéter deux fois les mêmes symboles.

Exemple :

$$\omega \times 5 = (0, 5, 10, 15, \dots, 1, 6, 11, 16, \dots, 2, 7, 12, 17, \dots, 3, 8, 13, 18, \dots, 4, 9, 14, 19, \dots)$$

où l'on a placé les nombres ayant un reste nul dans la division par 5, puis ceux ayant un reste 1, puis 2 puis 3 et enfin 4 en conservant l'ordre habituel dans chaque paquet.

Mais déjà se pose la question : a-t-on $2 \times \omega = \omega \times 2$? Nous devons écrire ω copies de $2 = (0, 1)$ utilisant des symboles tous différents. Prenons $2 = (2n, 2n+1)$ en faisant varier n depuis 0 jusqu'à l'infini. Nous obtenons ainsi

$$2 \times \omega = (0, 1; 2, 3; 4, 5; \dots) = \omega .$$

Les points-virgules ne sont là que pour faciliter la lecture et mettre en évidence les paquets de deux symboles ordonnés. A nouveau nous obtenons une opération non commutative.

Et combien vaut $\omega \times \omega$? Il faut trouver ω copies utilisant des symboles différents pour ω . Le mieux serait de pouvoir utiliser les seuls entiers naturels. Nous avons déjà vu au deuxième exemple l'astuce due à SARKOVSKI :

$$\omega \times \omega = (1, 3, 5, \dots, 2, 6, 10, \dots, 4, 12, 20, \dots, \dots, 2^n \times 1, 2^n \times 3, 2^n \times 5, \dots, \dots) .$$

On place tous les nombres impairs puis les produits des nombres impairs par les puissances successives de 2. Remarquons que l'on aurait pu aussi écrire :

$$\begin{aligned} \omega \times \omega = & (0, 1, 2, 3, \dots, \\ & \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots, \\ & \omega \times 2, \omega \times 2 + 1, \omega \times 2 + 2, \omega \times 2 + 3, \dots, \\ & \dots\dots\dots, \\ & \omega \times n, \omega \times n + 1, \omega \times n + 2, \omega \times n + 3, \dots, \\ & \dots\dots\dots) \end{aligned}$$

C'est une autre façon de voir le produit² et qui peut facilement s'étendre en imaginant un livre infini. Chaque ligne peut être infinie et chaque page contient éventuellement un nombre infini de lignes. On peut aussi imaginer que le nombre de pages est infini et que l'ouvrage se décline en un nombre infini de tomes *etc.* Supposons que chaque ligne soit isomorphe à l'ordinal α , et qu'il y ait β lignes sur chaque page, alors une page représentera l'ordinal $\alpha \times \beta$. Et s'il y a γ pages dans le livre, il représentera l'ordinal $\alpha \times \beta \times \gamma$, *etc.*

Voyons, sans démonstration, les principales propriétés de la multiplication (on notera au passage les différences avec la multiplication habituelle dans \mathbf{N} , ou, ce qui revient au même, la multiplication des ordinaux finis).

2. Cette idée m'a été soufflée par Michel ÉMERY.

- $\alpha \times 0 = 0 \times \alpha = 0$; 0 est un élément absorbant.
- $\alpha \times 1 = 1 \times \alpha = \alpha$; 1 est élément neutre pour la multiplication.
- Pour tout triplet d'ordinaux (α, β, γ) on a $(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$ ce qui traduit l'associativité (on pourra se convaincre de l'associativité en reprenant l'image du livre infini).
- Si trois ordinaux α, β, γ sont tels que $\alpha < \beta$ avec $\gamma \neq 0$, alors $\gamma \times \alpha < \gamma \times \beta$; il y a conservation de l'inégalité stricte par multiplication à gauche. Mais,
- $\alpha < \beta \implies \alpha \times \gamma \leq \beta \times \gamma$. Par exemple $1 < 2$ mais $1 \times \omega = 2 \times \omega = \omega$.
- $\alpha \times \beta = 0 \implies \alpha = 0$ ou $\beta = 0$.
- $\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$; il y a distributivité à gauche, mais pas à droite car
 $(\omega + 1) \times 2 = (\omega + 1) + (\omega + 1) = \omega + (1 + \omega) + 1 = \omega + \omega + 1 = \omega \times 2 + 1$
 et non pas $\omega \times 2 + 2$.
- Pour tout triplet d'ordinaux (α, β, γ) avec $\gamma \neq 0$ on a
 $\gamma \times \alpha = \gamma \times \beta \implies \alpha = \beta$, c'est-à-dire qu'on peut simplifier à gauche.
- Il existe une sorte de division euclidienne :
 si α et β sont des ordinaux, il existe un unique ordinal γ et un unique ordinal $\delta < \beta$ tel que $\alpha = \beta \times \gamma + \delta$. Cette division marche dans ce sens mais pas dans d'autre en raison de l'absence de commutativité tant de l'addition que de la multiplication.

4.e. Exponentiation

L'exponentiation ne pose aucun problème tant qu'il s'agit d'ordinaux finis puisqu'alors le résultat est exactement le même que dans \mathbf{N} .

Il est assez facile de calculer 2^ω et de vérifier qu'il vaut ω , de même que n'importe quel ordinal fini élevé à la puissance ω . Nous avons calculé ci-dessus $\omega \times \omega$ que l'on écrit assez naturellement ω^2 .

Il faut être un peu astucieux pour calculer ω^n dans le cas n fini. Voyons ce que l'on peut faire pour $n = 3$ en nous inspirant de ce qui a été fait pour $n = 2$ où nous avons distingué les naturels suivant leur divisibilité par 2^n . Nous allons donc les distinguer suivant leur divisibilité par $2^n \times 3^p$ et écrire d'abord les entiers non multiples de 2 ou de 3, puis ces mêmes multipliés par 2, puis... par 2^n , ... puis on reprend cette liste ainsi construite en multipliant chaque terme par 3, et on recommence en multipliant chaque terme par 3^2 , etc. Cela donne quelque chose comme

(1, 5, 7, 11, 13, ...,
 2, 10, 14, 22, 26, ...,
 4, 20, 28, 44, 52, ...,
 ...,
 3, 15, 21, 33, 39, ...,
 6, 30, 42, 66, 78, ...,
 12, 60, 84, 132, 156, ...,
 ...,
 9, 45, 63, 99, 117, ...,
 18, 90, 126, 198, 234, ...,
 36, 180, 252, 396, 468, ...,
 ...,
)

Cela devient assez acrobatique pour calculer ω^ω . On s'inspire de l'exemple précédent en utilisant la décomposition d'un entier en facteurs premiers. Tout entier non nul se met de façon unique sous la forme $2^a 3^b 5^c 7^d 11^e \dots$ où il n'y a qu'un nombre fini d'exposants non nuls. Un entier est alors caractérisé par la suite (a, b, c, d, e, \dots) et nous placerons les entiers selon une sorte d'ordre lexicographique inversé. Plus exactement les entiers apparaissent dans l'ordre suivant :

D'abord toutes les puissances de 2	1, 2, 2^2 , 2^3 , ...
Puis les puissances de 2 multipliées par 3	$3, 2 \times 3, 2^2 \times 3, \dots$
Puis multipliées par 3^2	$3^2, 2 \times 3^2, 2^2 \times 3^2, 2^3 \times 3^2, \dots$
Puis multipliées par 3^3	$3^3, 2 \times 3^3, 2^2 \times 3^3, 2^3 \times 3^3, \dots$
Jusqu'à épuisement des puissances de 3
Puis on reprend tous les termes précédents que l'on multiplie par 5	$5, 2 \times 5, 2^2 \times 5, 2^3 \times 5, \dots$
	$3 \times 5, 2 \times 3 \times 5, 2^2 \times 3 \times 5, \dots$
	$3^2 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5, 2^2 \times 3^2 \times 5, \dots$

Puis de même en multipliant par 5^2	$5^2, 2 \times 5^2, 2^2 \times 5^2, \dots$
Jusqu'à épuisement des puissances de 5

Puis on reprend tous les termes précédents que l'on multiplie par 7, puis par 7^2 et ainsi de suite.

Voilà ce qu'est ω^ω . Pas facile à écrire !

Donnons ci-après, sans démonstration, quelques propriétés de l'exponentiation.

- α étant un ordinal, $1^\alpha = 1$.
- Si $\gamma > 1$ alors $\alpha < \beta \iff \gamma^\alpha < \gamma^\beta$. Il y a conservation de l'ordre strict, mais attention :
- pour trois cardinaux arbitraires α, β, γ , on a $\alpha \leq \beta \iff \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$ car a contrario on vérifie que $2^\omega = 3^\omega = \omega$ alors que $2 < 3$.
- $\alpha^\beta \times \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ et $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

De plus, en utilisant la division euclidienne et le fait que, deux ordinaux $\alpha > 1$ et $\beta \neq 0$ étant donnés, on trouve toujours un unique ordinal δ tel que $\alpha^\delta \leq \beta \leq \alpha^{\delta+1}$, on peut construire une sorte de décomposition de β sur la base α , c'est-à-dire construire des γ_i strictement compris entre 0 et α et des β_i croissants tels que

$$\beta = \alpha^{\beta_n} \gamma_n + \dots + \alpha^{\beta_1} \gamma_1 + \alpha^{\beta_0} \gamma_0 .$$

4.f. Et après ?

Malheureusement, en itérant les opérations arithmétiques que nous venons de définir, il n'est pas possible d'épuiser tous les ordinaux. Bien sûr, il est possible de calculer ω^{ω^ω} mais on peut imaginer mettre une infinité d'exposants. On obtient, à la limite, un nouvel ordinal nommé ε_0 qui est la solution de l'équation (en ordinaux) $x = \omega^x$. Et puis on recommence avec ε_0 avec une infinité d'exposants qui valent tous ε_0 pour obtenir ε_1 etc. Et il n'y a aucune raison de s'arrêter : $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_\omega, \dots, \varepsilon_{\varepsilon_0}, \dots$. Mais même ainsi, on n'épuise pas tous les ordinaux. En effet, tous les ordinaux précédents correspondent à un bon ordre sur \mathbf{N} . Ils sont donc dénombrables. On note Ω le plus petit ordinal non dénombrable... On pourrait penser qu' Ω a un lien avec \mathbf{R} mais cela suppose l'hypothèse du continu³.

À chaque fois que l'on manipule l'infini on se retrouve face à des propriétés surprenantes. Considérons-en une que nous utiliserons un peu plus loin et qui s'apparente à la récurrence descendante. Soit α un ordinal et soit $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots)$ une suite décroissante d'éléments d' α (nous avons vu que chaque ordinal est à la fois un élément d'un ordinal plus grand et la section commençante de ce même ordinal plus grand). Alors cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang.

En effet, puisqu' α est bien ordonné, le sous-ensemble formé des ξ_i l'est aussi et il contient donc un plus petit élément ξ_n pour un certain n . Mais pour $p > n$ on doit avoir à la fois $\xi_p \geq \xi_n$ puisque ξ_n est le plus petit élément et $\xi_p \leq \xi_n$ puisque la suite est décroissante et $p > n$. On en déduit que $\xi_p = \xi_n$.

Pour mieux comprendre ce résultat surprenant, il faut se souvenir qu'il est impossible de faire une soustraction. Ainsi, même en partant d' ω et en construisant la suite des ξ_i on est obligé de n'écrire que des ordinaux finis dès le deuxième terme.

3. Il n'existe aucun ensemble dont le cardinal est compris entre celui de \mathbf{N} et celui de \mathbf{R} .

5. Une application des ordinaux : les suites de GOODSTEIN

Dans [1] Alain CONNES⁴ en donne une version amusante : **le problème du lièvre et de la tortue**.

Prenez un nombre N , pas trop grand (5 par exemple).

Écrivez-le en base 2 : $5 = 2^2 + 1$.

Le lièvre arrive et remplace tous les 2 par des 3 et écrit $3^3 + 1$.

La tortue ne fait que retrancher 1 et écrit 3^3 .

Le lièvre remplace alors tous les 3 par des 4 et écrit 4^4 .

Puis la tortue retranche 1, ce qui donne en base 4 : $3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 3$.

Et le lièvre remplace tous les 4 par des 5 et ainsi de suite...

Le lièvre parviendra-t-il à empêcher la tortue d'atteindre 0 ?

Ce qui est étrange c'est que la tortue finit toujours par gagner au bout d'un nombre fini d'étapes et ce, bien que le lièvre semble faire des bonds gigantesques à chaque fois qu'il joue. Au bout d'un temps fini, on arrive à 0.

On peut démontrer que le nombre d'étapes nécessaire pour que la tortue gagne croît plus vite que n'importe quelle fonction de N que vous pouvez explicitement écrire⁵. Vous pouvez cependant programmer un ordinateur pour connaître le nombre d'étapes nécessaire pour une valeur particulière de N . Mais démontrer que la tortue gagne à tous les coups tient en quelques lignes à l'aide de la théorie des ordinaux.

Considérons la suite des nombres obtenus après chaque intervention que ce soit celle du lièvre ou celle de la tortue. Cette suite commence (dans le cas d'un départ à 5) par (5, 28, 27, 64, 63, 468, 467, ...). Associons à cette suite une suite d'ordinaux en remplaçant dans chaque écriture la base n par le premier ordinal infini, ω . Nous obtenons

$(\omega^\omega + 1, \omega^\omega + 1, \omega^\omega, \omega^\omega, 3\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 3, 3\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 3, 3\omega^3 + 3\omega^2 + 3\omega + 2, \dots)$.

Cette suite est décroissante donc elle est constante à partir d'un certain rang. Mais cette constante est nulle. En effet, après chaque intervention de la tortue, le terme de la suite associée décroît strictement (sauf si 0 a été obtenu). Or chaque terme de cette suite est, par construction, supérieur au terme de même rang de la suite initiale qui par conséquent se termine par 0 également.

Nous venons de démontrer, sous une forme imagée (pour une démonstration plus formelle voir [3]), le théorème de GOODSTEIN (démontré en 1944). Notons qu'il a été prouvé qu'il est impossible de démontrer ce théorème en n'utilisant que les axiomes de PEANO, c'est-à-dire l'arithmétique habituelle. Mais cette preuve (L. KIRBY et J. PARIS, 1982) est autrement plus ardue.

On trouvera deux autres illustrations des ordinaux dans l'article de N. BOPP et M. ÉMERY page 13 de ce numéro de L'OUVERT.

4. Dans la même interview il remarque que « It is only with CHOQUET [...] that I learnt the theory of ordinals. You might think that this theory is useless, but that's absolutely false ».

5. Dans le cas d'un départ à $4 = 2^2$, il faut un nombre d'étapes qui s'écrit en base dix avec plus de 48 millions 800 mille milliards de chiffres. Malgré la longévité légendaire des tortues il en faudra de nombreuses générations !

Conclusion

Sans chercher à être tout à fait rigoureux et surtout sans chercher à faire toutes les démonstrations, le but de cette présentation était d'introduire à la notion d'ordinal en explicitant une forme possible, celle correspondant à un bon ordre sur \mathbf{N} . Cela permet, peut-être, de mieux se familiariser avec la notion d'ordinal et de pouvoir ensuite l'aborder de façon très rigoureuse et axiomatique sous la forme que l'on trouve habituellement dans les ouvrages récents et qui repose sur la définition suivante due à John von NEUMANN.

Un *ordinal* α est un ensemble vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Il est bien ordonné par la relation d'appartenance (\in).
- Il est transitif, c'est-à-dire que $\forall x, x \in \alpha \implies x \subset \alpha$.

Dans ce cadre, on écrit habituellement les premiers ordinaux sous la forme

$$0 = \{\}, 1 = \{\{\}\}, 2 = \{\{\}, \{\{\}\}\}, 3 = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}, \dots$$

que les tenants du bourbakisme reconnaîtront facilement.

Il y a bien évidemment des liens qui apparaissent entre la notion d'ordinal et celle plus connue de cardinal, mais ici encore avec des surprises, tant la manipulation de l'infini nous fait sortir des schémas habituels.

Bibliographie

- [1] C. GOLDSTEIN & G. SKANDALIS (2007), An interview with Alain Connes, *Eur. Math. Soc. Newsl.*, **63**, 25-30.
- [2] P. DEHORNOY (2006-07), *Logique et théorie des ensembles*, Notes de cours FIMFA ENS, <http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/surveys.html>
- [3] P. DEHORNOY (2009), Cantor et les infinis, *Gazette des mathématiciens*, **121**, 29-46.