

DEUX EXEMPLES DE RÉCURRENCE TRANSFINIE

Nicole BOPP et Michel ÉMERY

Résumé : Pour compléter l'article de Jean LEFORT sur les ordinaux publié dans ce numéro de L'OUVERT nous présentons deux illustrations (certes classiques) de la récurrence transfinie : l'existence d'une base de \mathbb{R} considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{Q} et une description de la structure des fermés du plan.

Mots-clés : Base d'un espace vectoriel, fermé du plan, ordinal, récurrence transfinie.

Les ordinaux sont inséparables de la récurrence transfinie, indispensable pour étudier même leurs propriétés les plus élémentaires. Les deux concepts ont été inventés simultanément, dans la seconde moitié du XIX^e siècle, par G. CANTOR ; au départ, son but n'était pas d'explorer l'infini, mais de résoudre une question d'analyse (décrire les « ensembles d'unicité » pour les séries de Fourier), qui l'a amené à explorer en profondeur la structure des ensembles fermés. Ce n'est qu'ensuite, après avoir ainsi pris pied dans l'infini, qu'il a créé et développé la théorie des ensembles.

1. Existence d'une base de \mathbb{R} , espace vectoriel sur \mathbb{Q}

C'est un exercice classique, dans les leçons introductives aux espaces vectoriels, que de montrer que \mathbb{R} est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{Q} des rationnels. Rappelons qu'une base d'un espace vectoriel sur un corps est une partie B de cet espace telle que tout élément de l'espace puisse s'écrire **de façon unique** comme combinaison linéaire **finie** à coefficients dans le corps d'éléments de B (que B soit un ensemble fini ou infini). On se souviendra, par exemple, que l'ensemble des polynômes à coefficients réels est un espace vectoriel (sur \mathbb{R}) qui admet une base dénombrable.

Pour démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R} considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{Q} , on procède par récurrence comme en dimension finie. Seulement, la dimension étant infinie et même non dénombrable, la récurrence doit ici être transfinie¹. En voici les principales étapes.

- On oublie l'ordre habituel sur \mathbb{R} et on fixe une fois pour toutes un bon ordre sur \mathbb{R} . C'est grâce au théorème de ZERMELO, équivalent à l'axiome du choix, que nous sommes assurés de l'existence d'un bon ordre sur tout ensemble, et donc en particulier sur \mathbb{R} .
- Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, on notera $\langle A \rangle$ le sous-espace vectoriel (sur \mathbb{Q}) engendré par A , c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^n q_i a_i$, où n peut être n'importe quel entier, les a_i sont dans A et les coefficients q_i

1. Le même argument établirait plus généralement l'existence d'une base de n'importe quel espace vectoriel sur un corps quelconque ; le cas de \mathbb{R} et \mathbb{Q} n'est pas plus simple que le cas général.

dans le corps \mathbb{Q} . Du fait que \mathbb{R} a été bien ordonné, pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$ telle que $\langle A \rangle \neq \mathbb{R}$ on peut alors définir un réel x_A par

$$x_A = \text{le plus petit élément (bon ordre!) de } \mathbb{R} \setminus \langle A \rangle .$$

L'idée va être de construire des sous-espaces vectoriels emboîtés de plus en plus gros en rajoutant à chaque fois un nouvel élément pris à l'extérieur du dernier sous-espace.

Le plus simple est de partir de $A_0 = \emptyset$, d'où $\langle A_0 \rangle = \{0\}$, puis on pose x_{A_0} égal au plus petit élément non nul de \mathbb{R} et on définit $A_1 = A_0 \cup \{x_{A_0}\}$. On recommence en déterminant x_{A_1} , le plus petit élément de $\mathbb{R} \setminus \langle A_1 \rangle$, (on remarquera que $\langle A_1 \rangle$ est isomorphe à \mathbb{Q}) et on pose $A_2 = A_1 \cup \{x_{A_1}\}$, etc.

- C'est là qu'intervient la récurrence transfinie. Le procédé ci-dessus, qui définit A_1 à partir de A_0 , A_2 à partir de A_1 , etc., ne convient pas pour un ordinal limite qui n'a pas de prédécesseur ; il nous faut donc une procédure spéciale pour construire A_α quand α est un ordinal limite. On pose donc

$$A_\alpha = \begin{cases} A_\beta \cup \{x_{A_\beta}\} & \text{si } \alpha = \beta + 1 , \\ \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta & \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite .} \end{cases}$$

Cette construction est possible tant que $\langle A_\alpha \rangle \neq \mathbb{R}$. Comme A_α a autant d'éléments que α , et comme il existe des ordinaux ayant plus d'éléments que \mathbb{R} , il arrivera nécessairement un γ pour lequel $\langle A_\gamma \rangle = \mathbb{R}$. On dit alors que l'ensemble A_γ est générateur : tout réel s'écrit comme combinaison linéaire rationnelle d'un nombre fini d'éléments de A_γ .

- Pour montrer que A_γ est une base, il reste à vérifier qu'une telle écriture est unique, à l'ordre et aux termes nuls près, c'est-à-dire que la partie A_γ est libre : si l'on écrit 0 comme combinaison d'éléments de A_γ , tous les termes doivent être nuls. Pour cela, on vérifie, par récurrence transfinie bien sûr, que chaque A_α est libre.

Le passage de α à $\alpha + 1$ se fait facilement, exactement comme en dimension finie : si A est libre, $A \cup \{x_A\}$ l'est aussi parce que $x_A \in \mathbb{R} \setminus \langle A \rangle$.

Le cas où α est un ordinal limite se traite en remarquant que si $0 = \sum_{i=0}^n q_i a_i$ où les coefficients q_i appartiennent à \mathbb{Q} et où les a_i sont des éléments deux-à-deux distincts de $A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$, alors chaque a_i est dans un A_{β_i} donc aussi dans A_μ où $\mu = \max(\beta_1, \dots, \beta_n)$ (μ existe parce que l'ordre est total). Chaque terme $q_i a_i$ est nul parce que A_μ , qui est l'un des A_{β_i} , est libre par hypothèse de récurrence.

Il faut se garder d'interpréter l'ordinal γ comme la dimension de l'espace vectoriel \mathbb{R} ; il dépend du bon ordre choisi, et pas seulement de l'espace \mathbb{R} et du corps \mathbb{Q} . La seule notion invariante est le cardinal de γ , égal à la puissance du continu.

2. Structure des fermés du plan

Voici comment CANTOR épluche transfiniment un fermé pour exposer sa structure. Nous parlerons des fermés du plan (c'est plus visuel)².

². Au départ, c'est à des fermés unidimensionnels (sur le cercle trigonométrique) que s'intéressait CANTOR, mais cela ne change rien.

Rappelons qu'un sous-ensemble F du plan est *fermé* si pour toute suite convergente (x_n) de points du plan telle que chaque x_n soit dans F , le point limite $\lim_n x_n$ est également dans F . Exemples : l'ensemble vide, le plan tout entier, un disque fermé, une suite convergente avec sa limite.

Le complémentaire d'un fermé est un *ouvert*. La structure des ouverts est assez simple : on montre que tout ouvert est la réunion d'une suite de disques ouverts³. Mais les fermés sont plus compliqués : en dimension 1, pensez à l'ensemble triadique de Cantor, qui a la puissance du continu mais ne contient aucun intervalle (sauf bien sûr ses points); dans le plan, c'est encore pire; regardez par exemple les ensembles de JULIA⁴ dans [1] p. 88, 95 ou 99.

Toute partie F du plan, fermée ou non, est faite de deux sortes de points : les *points isolés* de F et les *points d'accumulation* de F .

Un point $x \in F$ est isolé si, pour un certain $\varepsilon > 0$, la distance de x à tout autre point de F est $\geq \varepsilon$.

Au contraire, x est un point d'accumulation de F s'il existe dans F des points différents de x mais aussi proches de x que l'on veut.

Par exemple,

- si F est le réseau des points à coordonnées entières, tous ses points sont isolés ;
- un disque fermé de rayon non nul n'a pas de point isolé ;
- Si (x_n) est une suite de points qui converge vers une limite x_∞ et si $x_n \neq x_\infty$ pour tout n fini, tous les points du fermé $F = \{x_n, n \leq \infty\}$ sont isolés, sauf x_∞ .

Pour comprendre ce qu'a découvert (ou inventé ?) CANTOR, il nous faut préalablement savoir deux choses : primo, les points isolés de F sont en quantité dénombrable (c'est-à-dire que l'on peut les numéroter par des entiers, ou par tous les entiers); et secundo, si F est fermé, l'ensemble des points d'accumulation de F est lui aussi fermé. On peut démontrer sans peine ces résultats en utilisant les définitions ci-dessus, mais nous allons nous contenter d'admettre ces deux propriétés pour aller directement savourer la beauté du travail de CANTOR.

Si un fermé F n'a pas de point isolé, on dit que F est *parfait*. Nous allons voir comment un argument transfini permet de décomposer tout fermé F en deux sous-ensembles disjoints, dont l'un est dénombrable (ses éléments peuvent être numérotés par des entiers) et l'autre est le plus gros parfait inclus dans F .

Nous avons rappelé que lorsqu'à un fermé F on ôte tous ses points isolés, on obtient un nouveau fermé (l'ensemble des points d'accumulation de F); il est noté F' et appelé le *dérivé* de F , l'opération $F \mapsto F'$ étant la *dérivation de Cantor*. Il serait naïf de croire que F' , obtenu en enlevant à F ses points isolés, n'a pas de points isolés.

- Dans l'exemple vu plus haut du fermé $F = \{x_n, n \leq \infty\}$ formé d'une suite et de son point limite, F' n'a qu'un seul point, x_∞ , évidemment isolé (dans F' mais pas dans F), et $F'' = (F')'$ est vide.

3. En dimension 1, c'est encore plus simple : tout ouvert de \mathbb{R} est la réunion d'une suite d'intervalles ouverts disjoints.

4. Ce sont entre autre des ensembles parfaits (la définition en est donnée ci-dessous).

- On pourrait compliquer cet exemple : si $F = \{x_{m,n}, m \leq \infty, n \leq \infty\}$, où les coordonnées de $x_{m,n}$ sont $(1/m, 1/n)$, alors F' est formé des $x_{m,n}$ tels que m ou n soit infini, F'' du seul point $x_{\infty, \infty}$, et F''' est vide.
- Pour chaque entier n , on peut sans trop de peine concevoir un fermé dont les n premiers dérivés (son dérivé, le dérivé de celui-ci, etc.) sont différents.

Par exemple en remarquant que *tout fermé F est un dérivé*. En effet, il suffit, pour chaque x isolé dans F , d'adjoindre à F toute une suite de points qui tendent vers x et qui sont plus proches de x que de tout autre point de F ; le fermé ainsi grossi admet F pour dérivé. En partant d'un fermé non parfait et en effectuant n fois cette anti-dérivation, on obtient un fermé dont le n -ième dérivé n'est pas parfait, et dont les n premiers dérivés sont donc tous différents.

- Essayez maintenant d'imaginer un fermé construit comme suit. On part d'une suite (D_1, D_2, \dots) de disques fermés disjoints, dont les rayons tendent vers zéro, et les centres vers un point limite $\{x\}$. À l'intérieur de D_n , on place un fermé F_n dont le n -ième dérivé n'a qu'un seul point. On prend pour F la réunion des F_n et de $\{x\}$. Lorsque l'on dérive $n+1$ fois le fermé F , tout ce qui est dans D_1, D_2, \dots, D_n disparaît, mais il reste des points dans D_{n+1}, D_{n+2} , etc. et lorsque n tend vers l'infini, seul le point x subsiste. C'est là que CANTOR manifeste son génie : il sort du chapeau l'ordinal ω , définit le ω -ième dérivé de F comme étant le singleton $\{x\}$, et constate que le $(\omega+1)$ -ième dérivé de F est vide.
- Une fois qu'on a saisi le truc, on peut compliquer autant qu'on veut : par exemple, en reprenant les disques D_n , mais en mettant cette fois-ci dans chaque D_n une copie (homothétique) du F précédent, et en prenant la réunion de ces copies et du point limite $\{x\}$, on a un nouveau fermé, dont c'est maintenant le $(\omega+1)$ -ième dérivé qui vaut $\{x\}$ et le $(\omega+2)$ -ième qui est vide. Et il n'y a bien sûr aucune raison de s'arrêter là...

En partant d'un fermé F quelconque, les dérivations itérées décrites ci-dessus peuvent être formalisées comme une récurrence transfinitie : on ne se contente pas de définir le n -ième dérivé $F^{(n)}$ de F pour tout n fini, mais on introduit $F^{(\alpha)}$ pour tout ordinal α . La formule, qui suppose $F^{(\beta)}$ déjà défini pour tout ordinal β inférieur à α , distingue deux cas, suivant que α a ou non un prédécesseur :

$$F^{(\alpha)} = \begin{cases} (F^{(\beta)})' & \text{si } \alpha = \beta + 1, \\ \bigcap_{\beta < \alpha} F^{(\beta)} & \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite.} \end{cases}$$

Remarquer par récurrence que $F^{(\alpha)}$ est fermé, soit comme dérivé d'un fermé, soit comme intersection de fermés. La suite transfinitie des fermés $F^{(\alpha)}$ est décroissante : $F^{(\alpha)}$ est inclus dans $F^{(\beta)}$ lorsque $\alpha > \beta$. Si, pour un ordinal γ , le γ -ième dérivé $F^{(\gamma)}$ se trouve être parfait, donc égal à son dérivé, un point fixe est atteint, et l'on a $F^{(\delta)} = F^{(\gamma)}$ pour tout ordinal $\delta \geq \gamma$.

Arrivé là, CANTOR démontre que, si compliqué que puisse être le fermé F initial, il existe toujours un ordinal *dénombrable* γ tel que le dérivé $F^{(\gamma)}$ soit parfait.

Comme l'ensemble $F - F'$ des points isolés d'un fermé F est dénombrable le passage de F à $F^{(\gamma)}$ se fait donc en un « nombre » dénombrable d'étapes, lors

de chacune desquelles on a supprimé un « nombre » dénombrable de points. Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables étant elle-même toujours dénombrable, il en résulte que l'ensemble $F - F^{(\gamma)}$ des points supprimés est dénombrable ; on a ainsi une décomposition de F en deux sous-ensembles, l'un, $F - F^{(\gamma)}$ étant dénombrable, et l'autre, $F^{(\gamma)}$ étant parfait. En outre, $F^{(\gamma)}$ est le plus gros parfait inclus dans F , car une récurrence transfinie immédiate établit que, si un parfait est inclus dans F , il est aussi inclus dans chaque $F^{(\alpha)}$, et en particulier dans $F^{(\gamma)}$.

Il reste bien sûr à démontrer l'existence d'un tel γ , mais nous espérons que le lecteur qui nous aura suivi jusque là voudra bien nous croire sur parole ou aller consulter [2] p. 62 pour une démonstration dans le cas des fermés de \mathbb{R} .

Trois commentaires pour conclure.

- a) D'abord, le plus petit ordinal γ tel que $F^{(\gamma)}$ soit parfait est dénombrable, mais ne peut pas être borné parmi les ordinaux dénombrables : pour tout ordinal dénombrable α , on peut construire un fermé F suffisamment compliqué pour que $F^{(\alpha)}$ ne soit pas parfait.
- b) Nous avons censuré une partie du scénario. CANTOR travaillait sur certains fermés, les « ensembles d'unicité », qu'il cherchait aussi petits que possible. Or si F est un ensemble d'unicité, tous ses dérivés $F^{(\alpha)}$ en sont aussi, y compris la partie parfaite $F^{(\gamma)}$ de F ; l'étude des ensembles d'unicité est ainsi ramenée à celle des parfaits d'unicité. C'était cela qui intéressait CANTOR, les ordinaux n'étant qu'un moyen pour y parvenir ; aujourd'hui, les ensembles d'unicité n'intéressent qu'une poignée de spécialistes et les ordinaux l'ont rendu immortel...
- c) Enfin, il n'est pas difficile de montrer que tout parfait non vide a la puissance du continu (c'est-à-dire autant de points que \mathbb{R}) ; CANTOR en déduit aussitôt que *tout fermé est soit fini, soit infini dénombrable, soit continu*. Il a longtemps cherché à prouver que c'est vrai non seulement pour les fermés, mais pour tous les sous-ensembles du plan. C'est la célèbre hypothèse du continu, dont on sait maintenant qu'elle n'est ni réfutable (GÖDEL, 1938) ni démontrable (COHEN, 1963) dans le cadre de la théorie des ensembles habituelle, même avec axiome du choix.

Bibliographie

- [1] M. AUDIN (2009), *Fatou, Julia, Montel, le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et après...*, Springer, Berlin, Heidelberg.
- [2] P. DEHORNOY (2006-07), *Logique et théorie des ensembles*, Notes de cours FIMFA ENS, <http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/surveys.html>

Nicole BOPP et Michel ÉMERY
IRMA
bopp@math.unistra.fr
emery@math.unistra.fr