Groupe IREM de Strasbourg

« Enseigner avec la ressource ERMEL »

Introduire les fractions à l'école primaire

ou

Comment réussir en classe la situation *Bande unité* de la ressource ERMEL

IREM STRASBOURG

Université de Strasbourg

A Nicolas Séchaud

amoureux d'ERMEL
créateur de notre groupe
astronome
la tête dans les étoiles

Version
numérique

Sommaire

Avant-propos

Cette publication s'adresse aussi bien aux enseignants du premier et du second degré, qu'aux formateurs ou aux étudiants désireux de comprendre ce que sont les fractions et comment initier leur enseignement.

Chaque partie étant conçue pour être indépendante des autres, la publication peut être lue de différentes manières :

- de façon linéaire pour une compréhension complète du cadre théorique et de la mise en œuvre d'une situation de classe
- en allant directement à la partie 3 qui décrit le déroulement détaillé d'une situation de classe, accompagné des documents nécessaires à sa mise en œuvre
- en lisant uniquement les parties 1 et 2, plus théoriques, pour une compréhension de la problématique de l'enseignement des fractions

Remerciements

Merci aux Éditions Hatier, en particulier à Corinne Caraty, de nous avoir fait confiance et de nous avoir laissé le champ libre pour la rédaction de cette brochure. Nous pensons utile de préciser que nous ne touchons aucune rémunération de leur part.

Un merci tout particulier à Jacques Douaire, membre de l'équipe ERMEL. Nous attendons avec impatience nos prochains échanges.

Les auteurs

Catherine THOMAS, INSPE de Strasbourg

Julien ANGLARD, PE de l'académie de Strasbourg

Jennifer KIEFFER, PE de l'académie de Strasbourg

Olivier METTER, PE de l'académie de Strasbourg

Sven SEYFRIED, PE de l'académie de Strasbourg

Gwenola URVOY, PE de l'académie de Strasbourg

Pour les contacter :

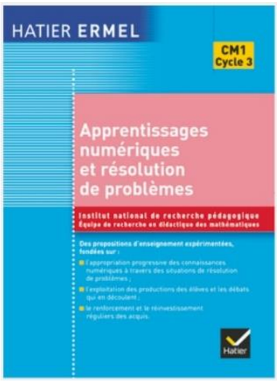
irem@math.unistra.fr

Introduction

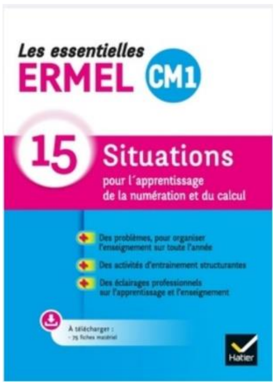
Cette publication est le fruit de six années de travail du groupe IREM de Strasbourg “Enseigner avec la ressource ERMEL”. Ce groupe est composé d’enseignants du premier degré, certains en début de carrière, d’autres plus confirmés, et de deux formateurs de l’INSPE. Tous sont utilisateurs des ressources de la collection ERMEL[1] “Apprentissages numériques et résolution de problèmes”, que ce soit auprès de leurs élèves de l’école élémentaire ou avec les futurs professeurs des deux cycles.

ERMEL est à l’origine une équipe de chercheurs en didactique des mathématiques de l’INRP (aujourd’hui IFE) ; elle produit une ressource depuis 1985, qui est actuellement éditée par les éditions Hatier. Cette ressource continue à être une référence reconnue par la communauté éducative du premier degré, en particulier par les chercheurs et les formateurs en didactique des mathématiques. Elle propose un enseignement complet du domaine numérique des mathématiques, détaillé et abouti, fondé sur la résolution de problèmes. C’est tout à la fois un objet de formation pour les enseignants, par ses contenus didactiques approfondis, et un compagnon de mise en œuvre en classe grâce à la description détaillée de situations d’enseignement. Pour chacune d’entre elles, on trouve clairement identifiés les objectifs d’apprentissage, le déroulement des séances, les procédures attendues, les difficultés anticipées et traitées, souvent des exemples de productions d’élèves.

La ressource ERMEL se décline en sept volumes (tous réédités jusqu’en 2005 ou 2006, selon les volumes), qui couvrent l’ensemble du programme de l’école primaire et fournissent une cohérence globale sur l’enseignement des mathématiques. Ceci explique que six volumes portent le même titre : « Apprentissages numériques et résolution de problèmes » (voir figure 1.a) et se déclinent de la Grande Section de maternelle jusqu’au CM2. Le septième ouvrage est consacré à la géométrie au cycle 3, et s’intitule “Apprentissages géométriques et résolution de problèmes”. Ce dernier est l’une des rares ressources à proposer de véritables problèmes permettant la construction des concepts géométriques.



a. Collection historique (ERMEL, 2005)



b. « Les essentielles » (ERMEL, 2021)

Figure 1 – Les couvertures des deux collections ERMEL CM1

Depuis 2016, la ressource édite une nouvelle série intitulée « Les essentielles ERMEL – 15 situations pour l’apprentissage de la numération et du calcul » (figure 1.b), déclinée également de la Grande Section jusqu’au CM2. Avec cette nouvelle édition, ERMEL a souhaité s’adapter aux évolutions de la formation tant initiale que continue (voir figure 2). Cette production plus récente reprend une sélection

1 https://www.editions-hatier.fr/collection/ermel

de situation des ouvrages originels avec une proposition de programmation annuelle adaptée ; elle complète également la série initiale par des volumes consacrés à la géométrie aux cycles 1 et 2. La ressource initiale reste cependant une référence constante au sein de la nouvelle, visible par de nombreux renvois.

LES CONSTATS

Les ouvrages de la collection ERMEL mettent à la disposition des enseignants et des formateurs des résultats de recherches sur les apprentissages numériques et la résolution de problèmes conduites dans le cadre de l'Institut français de l'Éducation (Ifé-ENS, ex INRP).

La fiabilité des situations, s'appuyant sur des expérimentations dans de très nombreuses classes, **les analyses** de ce que les élèves produisent, ainsi que **les synthèses proposées** en font aussi un outil reconnu pour les formateurs.

Cependant, depuis quelques années, la formation tant initiale que continue, a évolué. Les souhaits d'enseignants, débutants ou expérimentés, et de formateurs nous ont incités à concevoir un ouvrage présentant nos dispositifs d'enseignement d'une façon plus accessible, prenant davantage en compte la gestion de la classe et la différenciation.

Ce nouvel outil s'articulera avec un nouveau cahier de l'élève disponible en 2017.

Figure 2 - Extrait de “Les essentielles ERMEL CP”, sous l’exergue : “Pourquoi cette nouvelle publication ?”

L’enseignement proposé repose, aussi bien dans la ressource originelle que dans la version “Les essentielles”, sur un principe constant et inchangé : un enchaînement de situations de référence qui permet aux élèves de construire et s’approprier progressivement les savoirs mathématiques en commençant par résoudre des problèmes. C’est ainsi que les élèves peuvent percevoir pleinement le sens des objets mathématiques qu’ils manipulent. Le titre “Les Essentielles” fait d’ailleurs référence à un choix de quinze situations sélectionnées parmi les nombreuses situations proposées par le format originel.

Typiquement, chaque séquence est organisée autour d’un même principe : les élèves sont d’abord plongés dans une situation initiale, pendant laquelle ils doivent résoudre un problème consistant, dont la solution permet de donner du sens à une notion nouvelle. Cette situation sert de référence constante pour le travail de la notion ; les élèves résolvent ensuite une série de situations plus courtes, d’activités et d’exercices qui se détachent progressivement de la situation de départ, permettant ainsi de décontextualiser la notion nouvelle, leur permettant d’aborder progressivement des niveaux plus abstraits, de s’entraîner et de mémoriser.

Tous les membres de notre groupe sont des praticiens d’ERMEL, que ce soit en formation initiale ou en classe avec les élèves. Nous sommes tous convaincus, pour l’avoir expérimenté de nombreuses fois, que les situations proposées, accompagnées de leurs modalités particulières laissant une large place à l’autonomie, sont efficaces. Les élèves comprennent ce qu’ils font et donnent du sens à leurs apprentissages. Toutefois, nous avons tous éprouvés également des difficultés à débuter avec cette ressource, car il faut accepter un certain lâcher-prise et faire confiance à la situation et aux élèves. Les élèves eux-mêmes, s’ils ne sont pas habitués à cette autonomie, sont souvent désarçonnés les premières fois. Il résulte de ces considérations que, très souvent, la première fois que l’on met à l’épreuve une situation ERMEL, celle-ci met suffisamment en difficulté l’enseignant pour qu’il n’ait pas l’envie de recommencer l’expérience. C’est ce que nous voulons éviter.

Notre publication souhaite accompagner les enseignants qui désireraient (re)découvrir ERMEL, en leur proposant la mise en œuvre d'une situation essentielle particulière : *Bande unité*[2]. Cette situation emblématique a pour objectif la construction des fractions dites *simples*. C'est la première d'un enchaînement de trois situations[3] dont l'objectif final est la construction du concept de nombre décimal.

Plusieurs raisons ont motivé notre choix :

- *Bande unité* est emblématique de la ressource ERMEL et fait partie des 15 situations essentielles sélectionnées pour le CM1. De nombreuses autres ressources s'en sont inspirées, en omettant souvent l'intérêt de la situation originelle qui offre une grande place aux initiatives des élèves (Maths au CM1[4], 2021, *Des bandes à mesurer*, CapMaths[5], 2020, activité de découverte, Mon année de maths[6], 2019 …)
- elle utilise une modalité particulière, la communication entre élèves de type *émetteur-récepteur*, qui participe à sa richesse et requiert une posture enseignante inhabituelle
- elle propose enfin une entrée mathématiquement solide dans les fractions, en cohérence avec les programmes et évite les pièges de l'entrée classique actuelle (avec des parts de gâteau ou de pizza) que l'on trouve dans de nombreux manuels, et qui ne permet pas, voire empêche une réelle construction du concept (voir par exemple Margolinas, 2020).

La description de la situation *Bande unité* est déjà très détaillée dans les deux ouvrages « ERMEL - Apprentissages numériques et résolution de problèmes – CM1 » de 2005 et « Les Essentielles ERMEL – CM1 » de 2021. Il nous semble néanmoins nécessaire d'apporter des clarifications et des conseils pour faciliter la prise en main des séances. En effet, malgré leurs qualités, ces deux collections pâtissent souvent de la réputation d'être ardues pour les élèves, en particulier ceux en difficulté. Or, nous sommes convaincus du contraire, et notre expérience va en ce sens. La possibilité pour tous les élèves d'entrer dans les situations, chacun à son niveau, de pouvoir chercher et trouver des solutions personnelles, de comprendre pourquoi elles fonctionnent ou non, permet de construire des connaissances. De plus, cette approche permet à ceux qui sont en difficulté de ne pas être cantonnés à des tâches purement techniques et de devenir force de proposition par leurs idées puisque tous se retrouvent à égalité face à une situation sans stratégie préétablie à appliquer.

La difficulté de mise en œuvre de la séance *Bande unité* nous semble se situer plutôt du côté des enseignants, dont seule une minorité a suivi un enseignement supérieur en mathématiques et pour qui la notion de nombre décimal n'est pas nécessairement correctement construite ou intégrée. D'autre part, peu d'enseignants ont l'opportunité de prendre le temps nécessaire à l'appropriation d'une ressource si riche et détaillée. Enfin, enseigner les mathématiques par la résolution de problèmes n'est pas usuel dans les écoles, et demande souvent de commencer par négocier un nouveau contrat entre l'enseignant et l'enseigné.

---

2 Nous avons choisi la typographie *Bande unité*, en italique à chaque fois que nous nous référons à la situation originale de la ressource ERMEL, afin de la distinguer de l'expression « bande de longueur une unité », que nous emploierons fréquemment.

3 *Bande-unité*, *Droite graduée 1*, Droite *graduée 2* (ERMEL CM1, 2005)

4 Maths au CM1 (2021). Guide de l'enseignant. Access, p. 84

5 CapMaths (2020). Guide de l'enseignant, CM1 cycle 3. Hatier, p. 81

6 Mon année de maths CM1 (2019). Fichier ressources. Sed, p. 104

Les animateurs du groupe IREM rédacteurs de cette brochure ont tous mis en place, à plusieurs reprises, cette situation et ont été confrontés à des difficultés lors de la première séance, surtout avec des élèves qui n'ont pas eu l'habitude de travailler avec des situations ERMEL au cours des années antérieures. Ces mêmes animateurs sont en revanche unanimes à dire que le temps investi en vaut la peine, tant par le plaisir que les élèves et eux-mêmes prennent à travailler ces situations, que par les résultats obtenus.

Cette publication a donc vocation à faire profiter les collègues souhaitant tester la situation ERMEL *Bande unité*, dans les meilleures conditions, de l'expérience acquise par les membres du groupe lors de cinq années de travaux.

Pour ce faire, nous avons conçu cette publication en trois parties indépendantes, se nourrissant les unes les autres pour former une unité cohérente. Les enseignants prioritairement intéressés par la mise en œuvre de la situation *Bande unité* peuvent ainsi se rendre directement à la *partie 3*, voire même, au paragraphe C de cette même partie, pour découvrir la description complète de la situation. Les parties 1 et 2 nourrissent et justifient les choix mathématiques, didactiques et pédagogiques qui ont conduit à l'élaboration de la *partie 3*. Ainsi :

La ***partie 1*** développe quelques éléments théoriques généraux de didactique des mathématiques sous-tendant aussi bien le principe d'enseignement constructiviste que l'enseignement particulier des nombres, ici les fractions et les décimaux. Nous y évoquons rapidement la *dialectique outil/objet* de Régine Douady, la présentation des *situations d'action, de formulation et de validation* au sens de Guy Brousseau, les notions de *contrat didactique* et d'*institutionnalisation*, également développées par Guy Brousseau, et un développement de ce que Raymond Duval a nommé les *registres de représentation sémiotique*, en les appliquant aux nombres.

La ***partie 2*** propose, en appui sur les recherches les plus récentes en didactique des mathématiques, une construction mathématique élémentaire et rigoureuse des notions de *fraction* et de *nombre décimal*. Le concept d'*unité relative* (Chambris, 2021) et le *registre des unités de la numération* (Chambris, 2008), qui nous semblent tous deux fondamentaux pour construire durablement les nombres, y sont développés. Cette partie a vocation à outiller les enseignants d'un point de vue théorique et purement mathématique et peut, comme la *partie 1* se lire indépendamment, bien qu'elle éclaire avantageusement la *partie 3* en la justifiant.

Le cœur de la ***partie 3*** est constitué de la description du déroulement de la situation *Bande unité* (paragraphe 3.C.). Elle débute par une description succincte de la séquence complète. Nous proposons ensuite une liste des prérequis qui nous semblent nécessaires à une conduite plus sereine de la situation en évitant les écueils courants, et faisons la proposition d'une courte activité que nous invitons à réaliser en classe si l'enseignant estime que certaines compétences pourraient manquer à ses élèves.

La situation *Bande unité* est ensuite complètement développée, de façon parfois un peu différente de ce qui figure ou est indiqué dans les ouvrages ERMEL, et en y ajoutant surtout de nombreuses propositions d'institutionnalisation. Une brève description des situations ultérieures, permettent enfin de donner de la cohérence à la construction des nombres décimaux, puisque c'est la raison première pour laquelle les fractions sont introduites à l'école primaire.

Nous souhaitons à toutes et tous une agréable lecture, et surtout autant de plaisir que nous en avons eu, à faire vivre ces situations en classe.

Partie 1 - Éléments de didactique générale pour comprendre les enjeux d'un enseignement par la résolution de problèmes

La recherche en didactique développe depuis les années 70 des principes d'enseignement fondés sur la construction des connaissances en mathématiques à travers la résolution de problèmes. Contrairement à d'autres disciplines, les mathématiques s'écoutent mal et ne se lisent guère mieux, elles se font : on développe ses compétences dans ce domaine par la pratique. Néanmoins, même si la répétition et les exercices d'entraînement constituent une part conséquente de cette activité, en permettant d'acquérir des automatismes indispensables, elle ne s'y limite pas. Il semble nécessaire, pour une bonne compréhension des concepts en jeu, de les construire avant de les manipuler.

Afin d'éclairer les choix mathématiques, didactiques et pédagogiques exposés en partie 3, nous allons évoquer brièvement quelques travaux de trois auteurs majeurs de la didactique.

Les deux premiers, Guy Brousseau et Régine Douady sont deux grands noms de la didactique française contemporaine[7], et ont été distingués par l'étendue et la fécondité de leur œuvre. Tous deux ont travaillé le rapport au monde des mathématiques, et la construction de ses concepts à travers la résolution de problème. Le premier a élaboré la *Théorie des Situations Didactiques* (Brousseau, 1998), dont nous présenterons brièvement quelques notions, en particulier le concept de *contrat didactique* et celui d'*institutionnalisation*. La seconde a développé et décrit un principe d'enseignement qu'elle a baptisé *Dialectique Outil-Objet* (Douady, 1986), qui a nourri l'ensemble des travaux de didactiques depuis lors.

Ces deux auteurs font partie des références de la ressource ERMEL. Nous allons montrer dans cette partie que les situations proposées sont pensées dans ces cadres théoriques. II nous semble important d'en avoir conscience en tant qu'enseignant car cela permet de pleinement appréhender les enjeux des dispositifs pédagogiques proposés et mieux maîtriser l'importance du rôle de l'enseignant dans les séquences d'apprentissage.

Un troisième auteur, Raymond Duval, a développé la notion de *registre de représentation sémiotique* (Duval, 1993). Ce faisant, il a largement contribué à changer le regard sur les objets mathématiques, leurs spécificités, et la façon de les enseigner. Son approche est différente, en particulier parce qu'il est d'abord psychologue et non mathématicien. Il insiste plus particulièrement sur la spécificité des mathématiques de produire et manipuler des signes, et non des objets du monde sensible. Nous présenterons la notion de registre de représentation sémiotique et illustrerons notre propos avec le concept mathématique de *nombre*. Nous présentons également ce qui nous semble un nouveau registre, celui des *unités de la numération*. L'importance accordée aux unités de la numération est issue des travaux de Chambris (2012, 2014, 2022, Chambris, Tempier et Allard, 2017) qui a démontré leur rôle pour l'apprentissage des nombres décimaux, en particulier par le lien fondamental que ces unités créent entre les fractions et les nombres décimaux. Ce propos est détaillé dans la partie 2, consacrée à la construction mathématique des fractions et des nombres décimaux.

7 Il en existe d'autres, comme Yves Chevallard, lauréat du prix Hans-Freudenthal 2009. Sa contribution à la didactique mondiale est immense, et certains de ses concepts, comme la *transposition didactique* ou *l'analyse praxéologique* auraient toute leur place ici, mais il serait trop long de les développer. Nous le ferons sans doute dans la prochaine brochure.

A. La dialectique outil-objet

La dialectique outil-objet (DOO) est un principe d'enseignement de type constructiviste[8], développé par Régine Douady (Douady, 1986). Ses travaux ont largement influencé la didactique des mathématiques en général, et les concepteurs des situations ERMEL en particulier (par ex. ERMEL, 1999, p.11).

Il s'agit d'abord de comprendre la double valence **objet** ou **outil** d'un concept, quel qu'il soit, avant de chercher à l'enseigner.

Un concept (mathématique ou autre) est un **objet** de la pensée, que l'on peut le plus souvent définir, plus ou moins facilement, doté de propriétés permettant de le manipuler et de le relier à d'autres concepts. Il peut être complètement défini, ou bien se trouver à un stade évolutif, selon le degré de connaissances de l'individu particulier qui le manipule ou de l'institution dans laquelle il est en cours de développement ou de formalisation.

Par exemple, si nous envisageons le concept de *chaise*, c'est un concept plutôt stable dans l'institution "société française contemporaine", que l'on pourrait définir ainsi : "objet matériel doté d'une assise, de quatre pieds et d'un dossier". Ce concept se distingue de celui de *fauteuil, de tabouret* ou autres objets destinés à s'asseoir. Au niveau individuel, c'est un concept dit *spontané* (Vygotski, 1997) dans le sens où les individus humains l'apprennent sans qu'il y ait intention d'enseignement, par simple contact avec la société dans laquelle ils vivent. Un enfant très jeune pourrait, sous le mot *chaise*, inclure d'abord tous les systèmes d'assise, y compris les canapés, puis comprendre que les chaises n'ont pas de bras, mais ont un dossier, ce qui les distingue des fauteuils et des tabourets.

En mathématiques, les concepts ne s'acquièrent pas spontanément : ils nécessitent un enseignement et leur construction, dans l'institution scolaire et universitaire, peut prendre des années avant de parvenir à une forme stable. Par-dessus tout, ces concepts sont exclusivement immatériels[9]. Ainsi, le concept de *nombre décimal*, qui nous intéresse ici, apparaît, dans le système d'enseignement français au niveau de la classe de CM1, comme un nouveau genre de nombre, qui enrichit celui de *nombre entier*, et qui s'exprime à l'aide de nouvelles unités que sont les dixièmes, les centièmes, …. La première propriété que les élèves rencontrent, à propos de ces nouveaux nombres, est leur capacité à s'intercaler entre deux nombres entiers. Ils découvriront ensuite comment les écrire, les comparer, les additionner ou les soustraire, les multiplier, …. Chaque nouveauté permet ainsi d'enrichir le concept de *nombre* jusqu'à sa définition complète, qui ne sera réellement proposée qu'au stade universitaire pour les étudiants en mathématiques[10]. Les écoliers ne vont pas jusqu'à cet achèvement et entrent au collège (vers l'âge de 11 ans) avec un concept de *nombre décimal* encore en cours d'élaboration.

Ces **objets** conceptuels apparaissent le plus souvent en réponse à des besoins, ce sont des **outils qui permettent de** résoudre des problèmes ou surmonter des difficultés ; ainsi, une chaise répond sans doute à une problématique de fatigue à rester debout et de difficulté à se relever après s'être accroupi

8 Au sens où les connaissances des élèves sont construites à partir de tâches de résolution de problèmes, et non transmises sous forme de cours magistraux.

9 Nous reviendrons sur cette idée au chapitre 3 car elle est au cœur de la notion des registres de représentation sémiotique.

10 Auparavant, on aura appris que les nombres décimaux sont les éléments d'un ensemble noté D, lui-même sous-ensemble d'un ensemble plus grand, notéQ, et définissant les nombres rationnels, lui-même sous-ensemble des nombres réels R.

sur le sol. A l'école, les nombres décimaux sont ainsi des outils permettant de résoudre des problèmes de mesure de grandeur, lorsque l’unité choisie ne permet pas d’obtenir une mesure entière. Remarquons que les fractions répondent à la même problématique, de surcroît de manière plus aisée. Ces dernières sont d’ailleurs apparues beaucoup plus tôt dans l’histoire de l’humanité, mais présentent néanmoins de sérieuses difficultés dès lors qu’il s’agit de les comparer ou de les additionner entre elles. Les nombres décimaux apportent une réponse efficace à ces difficultés opératoires et constituent donc une amélioration de ces premiers objets appelés *fractions*.

Tout concept peut donc être considéré selon deux points de vue : en tant qu’**objet** d’étude d’une part, en tant qu’**outil** pour résoudre des problèmes d’autre part.

Partant de ce principe, Douady (1986) propose un enseignement fondé sur une rencontre alternée et dialoguée entre ces deux points de vue, une **dialectique** entre le *concept-**objet*** et le *concept-**outil***, en organisant la première rencontre avec les élèves selon le point de vue **outil**. Autrement dit, et *a contrario* d’un cours magistral où l’on commencerait par exposer des définitions et des propriétés, c’est-à-dire **l’objet** d’enseignement, avant de proposer des exercices d’application, la DOO propose de commencer par un problème, une situation, dont la solution nécessite la construction d’un nouveau concept, comme **outil** de résolution de ce problème. Cette situation doit répondre à un certain nombre de critères. En particulier :

1) elle doit avoir du sens pour les élèves
2) tous les élèves doivent pouvoir engager une procédure de résolution
3) leurs connaissances ne suffisent pas pour résoudre entièrement le problème
4) le concept visé permet de le résoudre efficacement

La situation *Bande unité* présentée dans la partie 3 de cet ouvrage satisfait à ces critères. Elle permet de rencontrer pour la première fois des nombres non entiers, en réponse à un problème de mesure avec une unité donnée. Ces nouveaux nombres sont donc créés comme **outil** pour résoudre un problème.

Il s’agit ensuite pour l’enseignant de dégager de cette première rencontre une prise de conscience de l’existence d’un nouvel **objet**, qui va être nommé (on commencera par l’appeler *fraction*, par exemple), puis étudié une première fois, en dégageant certaines de ses propriétés (par exemple, *un demi est identique à deux quarts*). Cet objet sera ensuite réutilisé en tant qu’**outil** dans un deuxième problème, ce qui permettra d’enrichir son étude, d’en découvrir de nouvelles propriétés, qui permettront à leur tour de l’utiliser une troisième fois, et ainsi de suite jusqu’à sa connaissance complète, processus qui peut prendre plusieurs années.

Cet aller-retour permanent, cette **dialectique**, entre le concept “**outil** pour résoudre un problème” et le concept “**objet** d’étude”, permet comme l’a montré Douady (1986) de le construire progressivement et en profondeur, lui donnant ainsi tout son sens.

Il nécessite une organisation des séances d’enseignement particulière, alternant les phases de recherche, les mises en communs, les synthèses, les phases d’entraînement, … qui ont été étudiées et décrites par Guy Brousseau dans sa Théorie des Situations Didactiques, et sur laquelle s’est appuyée Douady pour développer la DOO. Nous allons présenter ici très brièvement trois notions clés de cette théorie, parce qu’elle nous semble particulièrement à l’œuvre dans les situations ERMEL : les différents types de situations (action, formulation, validation), le contrat didactique et le processus d’institutionnalisation.

B. Éléments de Théorie des Situations Didactiques

La Théorie des Situations Didactiques (TSD), développée par Guy Brousseau dès les années 70 et exposée dans un ouvrage majeur (Brousseau, 1998), s'inspire de l'idée fondamentale que les connaissances se construisent en situation de résolution de problème.

En illustrant ses propos par un problème devenu célèbre, "La Course à 20", Brousseau décrit trois types de situations d'enseignement dans lesquelles l'élève est plongé alternativement : les situations **d'action**, de **formulation** et de **validation**

Ces situations, construites sur le modèle des jeux, sont choisies de façon à permettre à l'enseignant de "se retirer" un moment afin de laisser les élèves en responsabilité de leur apprentissage. Le plus souvent, lorsque ces élèves vivent ce genre de situation pour la première fois, ceci crée une rupture du **contrat didactique** entre les élèves et l'enseignant. Cette notion de *contrat didactique* est l'un des concepts fondamentaux de la TSD, et c'est par lui que nous commençons cette partie.

Nous décrivons ensuite brièvement les deux premiers types de situations, dites **d'action** et de **formulation**, car elles nous semblent être un modèle majeur de la situation ERMEL *Bande unité*.

Enfin, nous explicitons le rôle fondamental de l'enseignant, qui reprend l'initiative après que le problème ait été résolu ou soit en passe de l'être. Il est alors responsable d'un processus incontournable : **l'institutionnalisation**, symétrique du processus inverse de **dévolution**.

1. Le contrat didactique

"[Entre l'enseignant et l'élève] se noue un contrat qui détermine -explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement- ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre." (Brousseau, 1984)

Les clauses du contrat se nouent spontanément dans la fréquentation de l'école. En général, le passage d'une classe à une autre, d'un enseignant à l'autre, ne crée pas de rupture de contrat, car les habitudes y sont plus ou moins les mêmes. Par exemple, si un enseignant demande de résoudre un problème, il est entendu que ce problème possède une solution. Ce serait une énorme rupture de contrat de proposer un problème qui n'a pas de solution, ou que cette solution soit inconnue de l'enseignant. Ou encore, si l'élève attend suffisamment longtemps, même sans rien faire, il finira par obtenir la solution du problème car l'enseignant, contraint par le temps et par son « contrat » de transmettre le savoir, finira par le corriger en classe.

Enseigner par la résolution de problèmes peut avoir pour effet de rompre avec certaines de ces habitudes, de modifier certaines clauses implicites du contrat didactique. Les élèves ont davantage la responsabilité de leurs apprentissages[11], et doivent accepter de prendre des initiatives. Ils peuvent parler, découper le matériel distribué, se tromper, raturer, rendre des écrits transitoires pas très propres (et même avec des fautes d'orthographes) : on attend d'eux qu'ils s'engagent seuls dans la tâche, qu'ils acceptent que la solution ne viendra pas de l'enseignant, qu'ils puissent communiquer avec leurs pairs, qu'ils puissent débattre, questionner, émettre des hypothèses, décider de la validité de leurs propositions

11 Brousseau nomme **dévolution** le processus permettant de basculer vers l'élève la responsabilité des apprentissages. Nous y revenons au paragraphe consacré à l'institutionnalisation.

ou de celle des autres… Autant de nouveautés parfois difficiles à intégrer pour des élèves habitués à des situations de classe plus directement contrôlées par l'enseignant.

Ce changement de contrat demande un temps de négociation avec les élèves qui semble peu compressible et se traduit donc par les difficultés rencontrées lors de toute première mise en œuvre. Toutefois, en avoir conscience et connaître ce qui rend possible le fonctionnement de ces situations permet à l'enseignant de se lancer en confiance. C'est ce que nous explicitons dans les paragraphes suivants.

2. Les situations d'action, de formulation et de validation

Comme son nom l'indique, une **situation d'action** demande à l'élève d'agir pour résoudre un problème : il peut jouer, manipuler, effectuer des essais, seul ou à plusieurs, mais en l'absence de toute intervention de l'enseignant, après que celui-ci ait installé le problème. Par exemple, s'il est nécessaire, pour résoudre la tâche, de mesurer une longueur avec une bande de papier, et que le report de longueur de la bande entière "ne tombe pas juste", cet élève devra prendre l'initiative de modifier la longueur de cette bande (par exemple en la pliant).

Il utilise de ce fait un nouveau concept en construction, celui d'une unité de longueur plus petite que l'unité initiale, sans probablement le savoir, et sans nécessairement avoir conscience de ce qu'il fait. Tout enseignant a fait l'expérience d'élèves qui agissent correctement mais sont incapables d'expliciter ce qu'ils ont fait, encore moins d'expliquer pourquoi ils l'ont fait. Or, il est nécessaire, pour la construction des savoirs, que l'élève sache ce qu'il a fait, sache le décrire, et puisse le justifier. C'est le rôle des situations de **formulation** et de **validation**.

Une **situation de formulation** est en général une évolution de la première situation, qui succède à la phase d'action, et qui, dans son déroulement, contraint l'élève à formuler explicitement son action, lui faisant ainsi prendre conscience de cette action. Elle s'appuie sur les connaissances dégagées lors de la situation d'action. Comme la précédente, cette situation ne nécessite pas d'intervention majeure de l'enseignant. Elle est suivie d'une situation de **validation**, dont l'objectif est cette fois-ci la découverte de propriétés permettant de justifier les actions et souvent d'améliorer les stratégies, parfois de parvenir à une solution savante.

La première partie de la situation d'ERMEL *Bande unité* est organisée autour d'une situation de type émetteur-récepteur, qui contraint les élèves, non seulement à **agir**, mais également à **formuler** leurs premières **actions** en vue d'en communiquer le résultat à leur binôme, sans que l'enseignant ait besoin d'intervenir: il s'agit typiquement d'une double situation **d'action** et de **formulation** au sens de Brousseau.

Lors de son déroulement, les élèves prennent conscience de la nécessité de préciser la description de la longueur du segment qui leur est attribué. Ils **agissent donc afin** de mesurer une longueur avec une unité inopérante qu'ils doivent modifier, et ils **formulent** dans un message, afin de rendre compte de leur mesure. La situation est dite **réactive** puisque le message reçu par un autre élève va permettre ou non de réussir la tâche (reconnaître le segment parmi plusieurs segments de longueurs différentes), et valider ou invalider le message écrit, toujours sans intervention de l'enseignant.

Toutefois, il ne s'agit pas de dire que l'enseignant ne sert à rien d'autre qu'à installer les élèves dans une situation suffisamment riche, limitant ainsi son rôle à celui d'animateur. Bien au contraire, Brousseau a montré que les connaissances construites par les élèves en situation (ici, produire et utiliser une unité plus petite que l'unité initiale pour mesurer une longueur) ne sont pas conservées sans intervention de l'enseignant.

C'est pour cela que l'enseignant qui avait un rôle d'observateur et de régulateur lors des phases d'action et de formulation, a maintenant pour responsabilité de faire émerger ce qu'il faut retenir de la situation vécue et transformer les connaissances personnelles des élèves en un savoir institutionnalisé : cette transformation est appelée "processus d'institutionnalisation".

3. Le processus d'institutionnalisation

L'institutionnalisation est un moment fondamental d'une séance d'enseignement fondée sur la résolution de problèmes, dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1984).

Ce processus existe parce qu'il succède à un processus inverse, nommé **dévolution**, et qui consiste à laisser la responsabilité de l'apprentissage aux élèves. C'est l'un des grands intérêts de la TSD, et partant, des situations ERMEL, de permettre aux élèves de s'engager dans une tâche en acceptant l'idée qu'ils apprendront quelque chose parce qu'ils auront cherché à la résoudre. Ce processus de dévolution réussit le plus souvent, les élèves s'engagent beaucoup plus volontiers dans un problème qui a du sens pour eux

Nous l'avons dit, lorsque les élèves sont mis en situation de résoudre des problèmes *par eux-mêmes*, ils construisent des connaissances *personnelles* en se confrontant au problème qui leur est posé, connaissances qui évoluent au fur et à mesure du déroulé de la séance, en fonction des réactions des autres élèves, des effets de leurs idées sur le problème, des questions qu'ils se posent, des relances éventuelles de l'enseignant, … autant d'éléments que Brousseau nomme le *milieu*. On pourrait définir ce *milieu* comme l'ensemble de tout ce qui agit sur l'élève ou ce sur quoi l'élève agit dans une activité didactique. Il comprend non seulement l'énoncé de l'activité, les outils à disposition et les connaissances disponibles de l'élève, mais également les interactions éventuelles avec les autres élèves et avec l'enseignant.

La qualité du *milieu* et sa capacité à réagir aux actions de l'élève joue un rôle fondamental dans la construction de ces connaissances, en particulier, la qualité du problème proposé à l'élève. Si le problème est bien choisi, ce qui signifie capable de créer un *milieu* réactif[12], le professeur peut se retirer un temps, pour laisser le ou les élèves seuls face à la résolution du problème. Dans ce cas, l'élève peut constater seul quels sont les effets de sa stratégie et évaluer sa pertinence au regard de la solution visée. Il peut prendre seul la décision de changer de stratégie si cela s'avère nécessaire. Il doit savoir reconnaître s'il a trouvé la bonne solution. Évaluer sa stratégie et la faire éventuellement évoluer est ainsi le moyen de créer chez l'élève des connaissances nouvelles.

Toutefois, Brousseau a montré qu'en l'absence totale d'intervention de l'enseignant, ces connaissances personnelles finissaient par se perdre, faute d'avoir été reconnues comme un savoir important à retenir. Elles nécessitent d'être dégagées de la situation qui les a créées, structurées dans un savoir déjà acquis et reconnues comme partagées au sein d'une institution, pour être apprises. Or, l'élève ne peut faire tout cela sans l'intervention de l'enseignant.

Le rôle de l'enseignant est donc fondamental dans un processus qu'il peut seul prendre en charge, et que Brousseau a nommé **institutionnalisation**.

---

12 c'est l'un des grands points forts de la ressource ERMEL que de proposer de tels problèmes

Il s'agit, pour le professeur, de *nommer* certains *outils* produits pour résoudre le problème proposé aux élèves, et de les reconnaître comme *objet* d'étude, indépendamment de la situation dans laquelle ces outils ont été élaborés par les élèves. Par exemple, dans la situation *Bande unité*, les élèves doivent définir une nouvelle longueur, en référence à une longueur initiale en employant des mots comme "demi", "moitié" ou "moitié de moitié"..., ce que le professeur devra institutionnaliser en "fraction de longueur".

Afin de pouvoir **institutionnaliser** le concept de fraction, il va falloir le **généraliser** (aux quarts, huitièmes, …), le **décontextualiser** de la situation initiale (les fractions de l'unité ne servent pas uniquement à mesurer des longueurs), l'étudier pour lui-même (certaines de ces fractions sont appelées à devenir à terme des nombres décimaux ; elles sont représentées par une écriture nouvelle …) et même le **dépersonnaliser** (Allard, 2015) : les fractions ne sont pas une invention du professeur, mais un objet de savoir appartenant à une institution humaine plus large, dans laquelle il se place parmi d'autres objets (les nombres entiers, et les nombres décimaux, pour poursuivre notre exemple).

Ainsi, le **processus d'institutionnalisation** est un geste fondamental du professeur, qui demande de sa part une grande maîtrise des objets de savoir qui sont l'objectif de son enseignement. Ces moments d'institutionnalisation sont particulièrement importants car il nous semble qu'une des difficultés de prise en main de la ressource ERMEL est qu'elle ne précise pas à un niveau assez fin les *contenus* des institutionnalisations possibles à la fin de chaque séance, ni leur importance

Dans l'enchaînement de séances qui nous occupent, les objets de savoirs mathématiques en jeu sont les nombres rationnels et les nombres décimaux. Les fractions sont en réalité un objet peu défini mathématiquement, ce qui constitue sans doute l'une des difficultés d'enseignement, et doit, en fin de collège, avoir laissé la place aux nombres rationnels. Afin d'outiller les enseignants sur ces savoirs, il semble donc important de développer la notion de registre, inventée par Duval, notion particulièrement fondamentale dans la construction des nombres, avant de développer ces savoirs mêmes.

C. Les registres de représentation sémiotique

Revenons à la notion de concept, succinctement développée plus haut (partie 1.A.). Les concepts mathématiques, tel celui de *nombre*, se distinguent des concepts du monde sensible en ceci que ce sont de purs objets de la pensée, des idéaux sans matérialité, des objets intellectuels, et dès lors inaccessibles à la perception. Alors que nous pouvons montrer, toucher, soupeser une chaise particulière, qui peut représenter le concept de chaise dans toute sa généralité, on ne peut ni voir ni toucher, ni même montrer un nombre.

La conséquence est majeure : on ne peut accéder aux nombres, et plus généralement à un concept mathématique, que par l'intermédiaire de représentations, de signes que l'on va pouvoir perceptivement manipuler, afin de manipuler les concepts eux-mêmes.

Ces représentations sont très diverses. Par exemple, un nombre peut se représenter par une constellation du dé (s'il s'agit d'un petit nombre entier), par une écriture chiffrée, par un mot …

A titre d'exemple, voici sur la figure 3 plusieurs représentations d'un même nombre, que le lecteur reconnaîtra aisément :

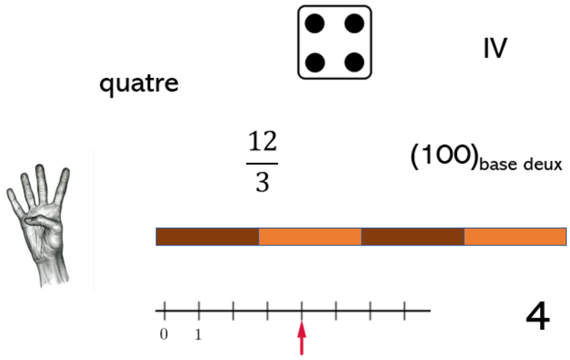


Figure 3 - . Plusieurs représentations d'un même nombre

Cependant, si toutes ces représentations sont bien une façon d'exprimer le même nombre, elles ne relèvent pas toutes de ce que Duval nomme un **registre de représentation sémiotique** (Duval, 1993). Les doigts de la main, ou les constellations du dé ne sont pas des expressions issues d'un registre de représentation des nombres[13], alors que la numération écrite chiffrée (dite aussi numération décimale) et la droite graduée le sont.

Pour qu'un système de représentation d'un concept soit un *registre*, au sens de Duval, il doit assurer trois fonctions, que nous allons d'abord énumérer, puis illustrer avec le concept de nombre décimal :

1. Une fonction de **formation** du signe, permettant la reconnaissance de chacune des occurrences d'un même concept
2. Une fonction de **traitement**, à savoir de transformation des signes à l'intérieur même du système de représentation
3. Une fonction de **conversion** en un signe d'un autre système.

Illustrons ces trois fonctions à l'aide de cinq systèmes bien connus de représentation du concept de *nombre décimal* :

1. la langue naturelle (dite encore numération orale)
2. l'écriture décimale
3. l'écriture fractionnaire
4. la droite graduée
5. l'écriture en unités de la numération[14]

13 encore que cela mériterait d'être étudié ; disons, pour être exact, que l'on n'a pas démontré à ce jour et à notre connaissance, que le système des doigts était un registre de représentation sémiotique des nombres

14 Le registre des unités de la numération fait l'objet d'un développement particulier à deux endroits de cette brochure : dans la partie 1.C.4. et dans la partie 2.D

1. Fonction de formation

Voici donc dans le tableau 1, cinq représentations différentes d'un même nombre, dans chacun des cinq systèmes désignés ci-dessus :

Tableau 1- Cinq représentation d'un même nombre, dans cinq registres différents

registre 1	trois et demi	en langue naturelle
registre 2	3,5	en écriture décimale
registre 3	$\frac{7}{2}$	en écriture fractionnaire
registre 4		avec une droite graduée
registre 5	2 unités 15 dixièmes que nous écrivons par commodité 2U 15d[15]	avec les unités de la numération

Chacune de ces cinq représentations concerne le même nombre décimal, et obéit à un système de règles de formation qui permet de reconnaître le nombre sans ambiguïté.

On notera que les signes utilisés sont très différents d'un registre à l'autre. Si l'on compare les expressions des registres 2 et 3, on voit :

- le chiffre 3, le chiffre 5 et une virgule pour l'écriture décimale, qui est horizontale
- le chiffre 7, le chiffre 2 et un trait horizontal pour l'écriture fractionnaire qui est verticale

soit deux représentations radicalement différentes ; ou encore :

- le chiffre 3, le chiffre 4, une subdivision en deux, et une flèche, pour le registre de la droite graduée

On peut déjà comprendre toute la difficulté d'un enseignement qui aura pour objectif de montrer que toutes ces représentations si différentes désignent le même objet mathématique.

On peut remarquer également qu'il n'y a pas nécessairement une unique façon de représenter un nombre dans un registre particulier. Par exemple, un nombre décimal s'exprime en une infinité d'écritures fractionnaires différentes. Et, évidemment, la dernière représentation, celle en unités de la numération 2U 15d, n'est pas la plus simple ; 3U 5d ou 35d étaient deux autres représentations du même nombre dans le même registre. Ces dernières considérations relèvent de la fonction de traitement au sein d'un même registre.

2. Fonction de traitement

Un traitement consiste en la transformation d'une représentation d'un objet en une autre représentation de ce même objet, au sein du même registre.

15 Nous développons sur cette proposition à la partie 1.C.4.

A titre d'exemple, le calcul et la comparaison sont des formes de traitement propres aux nombres. Effectuons par exemple le même calcul au sein de trois des cinq registres susmentionnés :

Traitement dans le registre de l'écriture décimale

Tâche : calculer 3,5 + 0,6

$$\begin{aligned} 3{,}5 + 0{,}6 &= 3{,}5 + (0{,}5 + 0{,}1) \\ &= (3{,}5 + 0{,}5) + 0{,}1 \\ &= 4 + 0{,}1 \\ &= 4{,}1 \end{aligned}$$

Chaque passage d'une ligne à une autre correspond à un traitement dans ce registre ; il est par exemple pertinent dans ce registre de chercher la décomposition de 0,6 en 0,5 + 0,1 car certains faits numériques sont facilement mémorisables, comme le fait que 0,5 + 0,5 = 1, et donc que 3,5 + 0,5 = 4

On va constater que le traitement est totalement différent dans les autres registres, et dépend des caractéristiques propres à chacun d'entre eux.

Traitement dans le registre de l'écriture fractionnaire

Tâche : calculer $\frac{7}{2} + \frac{3}{5}$

$$\begin{aligned} \frac{7}{2} + \frac{3}{5} &= \frac{7\times5}{2\times5} + \frac{3\times2}{5\times2} \\ &= \frac{35}{10} + \frac{6}{10} \\ &= \frac{35+6}{10} \\ &= \frac{41}{10} \end{aligned}$$

On notera que le traitement en écriture fractionnaire relève d'une logique toute différente, qui est la mise au même dénominateur et demande en particulier de connaître la règle : « pour passer d'une écriture fractionnaire à une autre d'un même nombre, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre. »[16]

Traitement dans le registre des unités de la numération

Tâche : calculer 3U 5d + 6d

$$\begin{aligned} 3\text{ U }5\text{ d} + 6\text{ d} &= 3\text{ U }11\text{ d} \\ &= 3\text{ U} + 10\text{ d} + 1\text{ d} \\ &= 3\text{ U} + 1\text{ U} + 1\text{ d} \\ &= 4\text{ U }1\text{ d} \end{aligned}$$

Dans ce registre, la logique est encore différente, et consiste à exploiter les relations entre les unités de la numération, ici l'égalité 10 d = 1 U (dix dixièmes sont égales à une unité).

16 Cette règle ne concerne pas l'école primaire, ce qui explique pourquoi on n'y fait pas d'additions de fractions hors fractions décimales.

On abandonne ici le registre de la numération orale et celui des droites graduées, ceux-ci étant particulièrement peu pratiques pour effectuer des additions dans le contexte de l'écrit, ce qui ne signifie pas que c'est impossible.

On pourra remarquer que, dans les trois cas présentés ici d'addition, le résultat présente quelques caractéristiques communes, à savoir l'utilisation des chiffres 4 et 1:

4,1 $\frac{41}{10}$ 4U 1d

Ceci n'est pas un hasard puisque ces registres ne sont pas indépendants les uns des autres, et qu'il est possible de passer de l'un à l'autre : c'est précisément le rôle de la fonction de conversion.

3. Fonction de conversion

La conversion permet de transformer la représentation d'un objet dans un registre en une représentation de ce même objet dans un autre registre.

Donnons-en deux exemples, toujours à propos des nombres décimaux.

Conversion de l'écriture décimale vers l'écriture fractionnaire

Tâche : écrire 3,5 en écriture fractionnaire

$$\begin{aligned} 3{,}5 &= \frac{35}{10} \\ &= \frac{35:5}{10:5} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Afin de résoudre la tâche dans ce sens, il faut savoir convertir l'écriture décimale en une fraction décimale, puis éventuellement savoir simplifier cette dernière pour aboutir à une fraction irréductible. La première transformation est bien une conversion au sens de "changement de registre", les deux suivantes en revanche relèvent d'un traitement dans le registre des écritures fractionnaires.

Conversion de l'écriture fractionnaire vers l'écriture décimale

***Tâche :* écrire $\frac{3}{5}$ en écriture décimale**

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{6}{10} \\ &= 0{,}6 \end{aligned}$$

Il s'agit ici de la tâche inverse de la précédente ; on commence par effectuer un traitement dans le registre des écritures fractionnaires pour obtenir une fraction décimale, puis on convertit cette dernière en écriture décimale.

Le rôle fondamental des conversions

La fonction de conversion est essentielle aux yeux de Duval car elle implique l'existence d'**au moins deux registres** de représentation d'un concept.

Travailler dans au moins deux registres et savoir convertir la représentation d'un objet de l'un à l'autre permet de ne pas confondre cet objet avec l'une de ses représentations. La pipe de Magritte (figure 4) est un exemple célèbre de l'invitation à ne pas confondre un objet avec l'une de ses représentations, mais la pipe étant un objet matériel, il est plus aisé de comprendre que sa représentation en peinture, aussi ressemblante soit-elle, n'est pas la pipe elle-même : on ne peut pas la prendre en main, ni la fumer.

Figure 4 - La trahison des images - Peinture de René Magritte (image issue du site de MuseumTV)

Il est moins aisé d'accepter que 3,5 ou $\frac{7}{2}$ ou $\frac{35}{10}$ ou 2 U 15 d ne sont en réalité pas les nombres eux-mêmes, mais des écritures de ces nombres ; de plus, ce sont différentes représentations sémiotiques d'un *même* nombre ; comprendre cette distinction, connaître toutes ces représentations, et d'autres encore, permet de conceptualiser le nombre décimal dont il est question en profondeur, d'en comprendre la structure et les propriétés.

Par exemple, l'écriture 3,5 permet d'inscrire le nombre parmi les entiers, comme étant plus que 3 mais moins que 4. L'écriture $\frac{7}{2}$ lui donne au moins deux autres interprétations : 7 fois un demi, ou la moitié de 7. Ainsi, chaque écriture d'un nombre dit quelque chose de ce nombre mais aucune n'est exhaustive et ne se confond avec le nombre lui-même.

L'expression communément employée “nombre à virgule” est la preuve qu'une telle confusion entre le concept de nombre décimal et sa représentation en écriture décimale est très généralisée. Il n'y a pas de virgule dans l'écriture $\frac{7}{2}$ et pourtant, elle exprime le même nombre décimal que 3,5. Cette compréhension fine des nombres décimaux est nécessaire aux enseignants pour pouvoir enseigner.

Nous aurons largement l'occasion de mettre en lien cette notion de conversion entre registres avec les séances présentées. La ressource ERMEL est en effet très attentive à ces différentes représentations, et au passage de l'une à l'autre.

4. Le registre des unités de la numération

Les unités de la numération avaient disparu des programmes lors de la première rédaction des ouvrages ERMEL. Sans revenir sur l'historique de cette disparition, et leur réapparition tardive[17], il convient de noter qu'elles sont présentes aujourd'hui et permettent de construire un système d'expression des nombres entiers et décimaux utile à la compréhension de la numération décimale et des règles de calcul.

On trouve dans les ressources officielles des mentions telles que celle-ci : *les désignations orale et écrite des nombres décimaux basées sur les unités de numération contribuent à l'acquisition du sens*

17 pour une étude approfondie, voir Chambris, 2012

des nombres décimaux (par exemple pour 3,12 : « trois unités et douze centièmes » ou « trois unités, un dixième et deux centièmes » ou « trois cent douze centièmes »).(MENJ, 2019)[18]

Pour que ce système d'expression soit réellement fonctionnel et vivant dans les classes, tant à l'écrit qu'à l'oral, il conviendrait d'institutionnaliser un codage de ces unités qui n'existe pas encore. Ce que propose la citation ci-dessus est peu propice aux traitements écrits (Chambris, 2014).

C'est pourquoi nous proposons dans cette brochure une symbolisation très simple et facilement adoptable par une école : des lettres en majuscules pour les unités de numération supérieures à l'unité principale, et des minuscules pour les autres. Pour rendre compte de l'unité principale, nous avons opté pour la majuscule.

Ainsi, nous écrivons « 3 dizaines 4 unités 2 dixièmes » : 3 D 4 U 2 d

Nous admettrons que ce système fonctionne comme un registre au sens de Duval, et qu'il a toute sa place dans l'enseignement comme système **transitoire** permettant de comprendre l'écriture décimale.

Sans développer l'idée qu'il pourrait permettre de se passer du registre des écritures fractionnaires, source de grandes difficultés pour les élèves, il permet de lui donner du sens et de jouer comme un intermédiaire efficace entre ce registre, et le registre principal des nombres décimaux, celui de l'écriture décimale. Nous reviendrons rapidement sur ce point dans la partie 2.D.

Illustrons brièvement le rôle ce registre, intermédiaire que nous pensons efficace entre le registre de l'écriture fractionnaire, et celui de l'écriture décimale, en reprenant l'exemple de la première tâche de conversion :

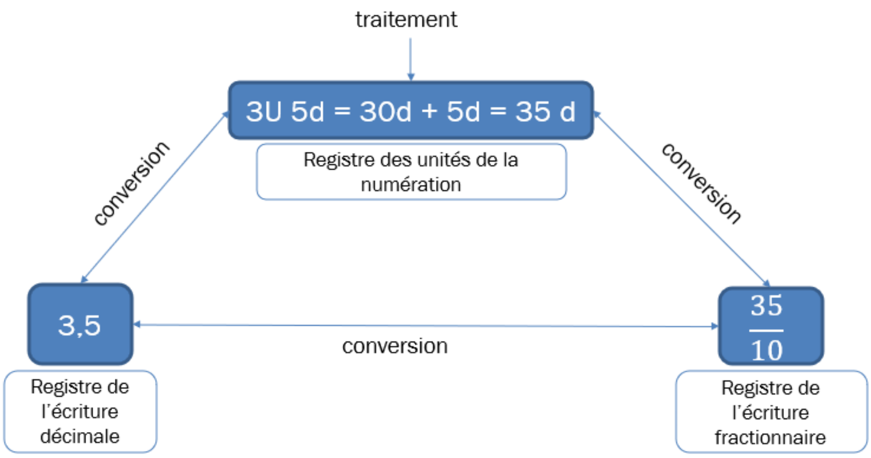


Figure 5 - Conversion entre les trois registres : écriture décimale, écriture en unités de numération, écriture fractionnaire

Plutôt que de convertir directement du registre décimal au registre fractionnaire, dont on sait que la tâche n'est pas réussie par la moitié des élèves en début de sixième[19], il semble profitable d'utiliser la possibilité d'un traitement dans le registre des unités de la numération, selon les travaux de plusieurs didacticiens (par exemple, Chambris, 2012, Tempier, 2016, Mounier 2020).

18 C'est nous qui soulignons

19 En 2008, seuls 48,9% des élèves reconnaissent 804/10 comme écriture fractionnaire de 80,4, (Chesné et Fisher, 2015) ; en 2022, plus d'un tiers des élèves (37,7%) ne savent pas écrire 4/100 en écriture décimale à l'entrée en sixième (DEPP, 2022)

Soit donc la tâche : ***écrire 3,5 en écriture fractionnaire***

Par définition, l'écriture 3,5 signifie 3 unités et 5 dixièmes, ce qui se traduit directement par l'écriture 3 U 5 d en unités de la numération. La conversion entre ces deux registres est donc immédiate.

On effectue ensuite un traitement élémentaire dans le registre transitoire, consistant à utiliser la relation fondamentale **1 U = 10 d** :

3 U = 30 d donc 3 U 5 d = 30 d + 5 d = 35 d

Cette nouvelle écriture se convertit plus aisément en une fraction décimale, $\frac{35}{10}$, d'autant qu'elle s'oralise de la même façon : *trente-cinq dixièmes*. La conversion est donc là encore immédiate.

S'agissant d'un point de la didactique des nombres développée depuis moins de 20 ans, on ne trouve pas réellement de traces de ce registre des unités de la numération dans les ouvrages ERMEL, et c'est pourquoi, dans la prochaine brochure consacrée à la numération décimale et au calcul, notre proposition insistera, en particulier dans les moments d'institutionnalisation, sur ces représentations.

Nous allons maintenant développer la partie proprement mathématique des savoirs en jeu dans la situation *Bande unité* et ses développements, à savoir les fractions et les nombres décimaux.

Partie 2 - Savoirs mathématiques et didactiques liés au début de l'enseignement des fractions et des décimaux

La partie 2 a vocation à outiller les enseignants d'un point de vue mathématique et didactique sur les notions de fractions et de nombres décimaux. Elle n'est pas à destination des élèves, mais conserve la même logique de progression que celle proposée dans la séquence ERMEL.

La notion de *fraction* n'est toujours pas bien définie à l'heure actuelle au niveau des mathématiques à enseigner, elle est souvent accompagnée d'adjectifs censés préciser sa fonction (fraction-partage, fraction-opérateur, fraction-nombre, fraction-quotient …) qui, à notre sens, obscurcissent plutôt qu'ils n'éclairent le propos, et contribuent largement à sa non-compréhension par les élèves.

C'est pourquoi nous proposons dans cette partie une définition claire et rigoureuse d'un point de vue mathématique de ce qu'est une fraction, en gardant en tête que l'objectif de son enseignement reste la construction des nombres décimaux. C'est pourquoi :

- les fractions sont d'emblée construites comme des nombres, des unités relatives à l'unité principale 1. Cette notion d'unités relatives est développées par Chambris (2022) à qui cette partie (et toute la brochure) doit beaucoup
- aucune technicité n'est présentée, car non attendue des élèves ; elles ont vocation à rapidement laisser la place aux nombres décimaux, dont elles n'en sont qu'une introduction

En effet, le choix des programmes actuels est de construire les nombres décimaux à partir de fractions particulières que l'on nomme *fractions décimales*. Ainsi, l'ordre mathématiquement cohérent d'enseignement est le suivant:

1) construction de “fractions simples”
2) cas particulier des fractions décimales : première rencontre avec les nombres décimaux en écriture fractionnaire
3) découverte d'une nouvelle écriture : l'écriture décimale
4) comparaison et calculs avec les nombres décimaux en écriture décimale[20]

L'efficacité de cette progression repose entièrement sur la compréhension de ce que l'on appelle les “fractions simples” ; or, nous l'avons dit, ces objets ne sont pas clairement identifiés d'un point de vue mathématique, et pas seulement en raison de l'adjectif “simple”. Le concept même de *fraction* est assez flou. C'est donc l'objet de cette partie d'expliciter, pour l'enseignant, les savoirs mathématiques à construire chez les élèves, les points de vigilance didactiques pour un enseignement efficace, ainsi que de mettre en garde contre des raccourcis donnant l'illusion de la réussite chez les élèves.

[20] Nous ne développerons pas ce point dans cette brochure. Il fait l'objet d'une situation essentielle « Comparaison, somme et différence de nombres décimaux » (Ermel, 2021), que nous ne ferions que paraphraser

Nous commençons donc par analyser ce mot de *fraction*, avant d'en dégager le sens qui nous semble le plus compatible avec le savoir à construire, en l'occurrence les nombres décimaux.

A. Les fractions dans le langage courant

En France, du fait de son histoire et de son rapport au système métrique, les fractions sont peu en usage dans le langage courant. Voici quelques exemples de leur utilisation : "Nous arriverons dans **trois quarts d**'heure", "Cette bouteille contient un **demi-**litre d'eau", "Gabriel a trois ans **et demi**".

De ces expressions, dégageons les remarques suivantes :

- Dans la vie courante, les fractions "demi", "quart" et "trois quarts" ne s'expriment généralement pas à l'aide d'une écriture fractionnaire, mais avec des **mots**, et parfois même avec une écriture décimale. En effet, sur une bouteille d'eau d'un demi-litre, on verra souvent écrit 0,5 L ou 50 cL plutôt que 1/2 L.
  → Cela montre que **<u>l'écriture</u>** fractionnaire n'est pas l'unique façon d'exprimer une fraction, et que cette écriture est un concept scientifique enseigné à l'école sans appui sur des connaissances spontanées, en tout cas en France.

- Ce sont le plus souvent des fractions **<u>de</u>** quelque chose : trois quarts **<u>de</u>** litre.
  → Les fractions "tout court", celles qui sont appelées à devenir des nombres, ne sont pas des concepts spontanés ; dans le langage courant, une fraction est un opérateur, elle fractionne *quelque chose*. On peut légitimement s'attendre à une difficulté dans le passage "fraction de" à "fraction tout court", difficulté à prendre en charge par l'enseignement.

- Les fractions fractionnent (divisent, pour être plus rigoureux) des **<u>grandeurs</u>** : une heure, un litre, une année, et le résultat de ce fractionnement est **<u>une grandeur</u>** : ainsi, *trois quarts d'heure* est une durée ; *un demi-litre* est un volume, et *trois ans et demi* est une durée.
  → L'usage courant dans les manuels est de créer des raccourcis de langage en parlant de fractions d'**objets matériels ou dessinés** (des pizzas par exemple, ou des rectangles, des disques), au lieu de fractionner les **grandeurs** attachées aux objets (quantité, aire, volume, masse, …) ; on parle de "la moitié d'un rectangle" au lieu de parler de "la moitié **de l'aire** d'un rectangle". Pour augmenter encore l'ambiguïté, on dit le plus souvent que l'on obtient des "parts". Or, les "parts" (de gâteau, de rectangles, …) sont des objets matériels, et non des grandeurs. Il reste implicite que l'on veut dire en réalité une aire, un volume, une masse, …C'est ainsi que se crée une confusion entre les objets matériels ou dessinés (que l'on peut par exemple colorier) et les grandeurs qui leur sont attachées. Il semblerait que cette confusion soit à l'origine des difficultés des élèves à propos des fractions (voir par exemple Chambris, 2022 ou Margolinas, 2020) : cette confusion n'apparaîtrait pas à la suite de conceptions spontanées des enfants, mais plutôt construite par l'enseignement lui-même. Dans la vie courante, on dit en effet et à juste titre "un demi-**litre** d'eau" plutôt que "une demi-**bouteille** d'eau".

- Toutes ces fractions de la vie courante sont inférieures à l'unité ; on ne dit pas "trois demi-litres", mais "un litre et demi"
  → à notre connaissance, les fractions supérieures à 1 n'existaient ni dans l'Antiquité, ni au Moyen Âge, ce qui implique qu'elles n'étaient pas considérées comme des nombres ; or, dans l'enseignement, les fractions ont vocation à devenir des nombres (rationnels) dès la fin du cycle 3, il est donc particulièrement important de les introduire dans des situations où elles pourront naturellement aller au-delà de 1.

- Si *demi* signifie bien *moitié* dans l'expression "un demi-litre d'eau", pour un enfant qui insiste sur son âge de trois ans et demi, cela signifie qu'il a dépassé la moitié et qu'il aura bientôt quatre ans.
  Quant à l'expression *quart*, dans trois quarts d'heure, elle signifie probablement "15 minutes" sans être nécessairement reliée à l'idée d'un fractionnement de l'unité *heure*.
  → il n'est ainsi pas acquis que les enfants connaissent spontanément le sens de ces expressions *demi* et *quart* ; il conviendra donc de leur donner un sens précis, en les opposant peut-être à leur usage courant[21]

Compte tenu de ces remarques, on peut légitimement se poser la question suivante : peut-on (ou doit-on) s'appuyer sur ces usages spontanés pour débuter l'enseignement des fractions ?

Nous n'y répondrons pas, estimant que ce sont aux enseignants de choisir leur propre entrée, l'important étant qu'ils soient conscients des points de vigilance développés ci-dessus. Il est toutefois évident que l'usage spontané ne peut suffire à installer complètement le concept de fraction pour essentiellement deux raisons :

- les fractions de la vie courante ne sont pas des nombres mais des opérateurs
- les fractions de la vie courante ne sont pas supérieures à l'unité

Nous proposons donc dans la suite une construction des fractions rigoureuse d'un point de vue mathématique qui nous semble à la fois compatible avec les programmes en vigueur et apte à dépasser le point de vue spontané. C'est sur cette construction que nous nous appuierons pour proposer les moments d'institutionnalisation dans la *partie 3*.

B. Les fractions dites "simples"

1. Une définition d'une fraction de l'unité ou unité fractionnaire

Le mot *simple* n'est pas défini en mathématique ; on peut penser qu'il s'agit des fractions que l'on peut rencontrer les plus aisément lors d'activités manipulatoires, tels les demis (par pliage en deux), les quarts (comme moitié de moitié), les huitièmes (comme moitié du quart), …, et les tiers (par pliage en trois).

Quelles que soient les fractions rencontrées, il s'agit de construire le concept scientifique suivant :

Une fraction <u>de l'unité</u> est une nouvelle unité de compte, relative à l'unité principale, et obtenue par division de cette unité principale

Par exemple, <u>le **demi** est une nouvelle unité (relative) telle qu'il en faut deux pour égaler l'unité principale, ou encore une unité (relative) deux fois plus petite que l'unité principale.</u>

Ainsi, on sait *par définition* que 2 demis font 1.

On peut ensuite compter en demis : 1 demi, 2 demis (qui font 1), 3 demis, 4 demis (qui font 2), 5 demis…

21 Ceci n'est pas spécifique aux fractions, et les cas sont nombreux d'un conflit entre l'usage scientifique et l'usage courant d'un mot. Pour ne citer que deux exemples, dans le langage courant, un carré n'est pas un rectangle et une hauteur est toujours verticale

Si l'on transpose cela en terme de longueur (figure 6), une longueur-unité principale étant choisie, une longueur d'une demi-unité sera telle qu'il en faut 2 pour égaler la longueur unité :

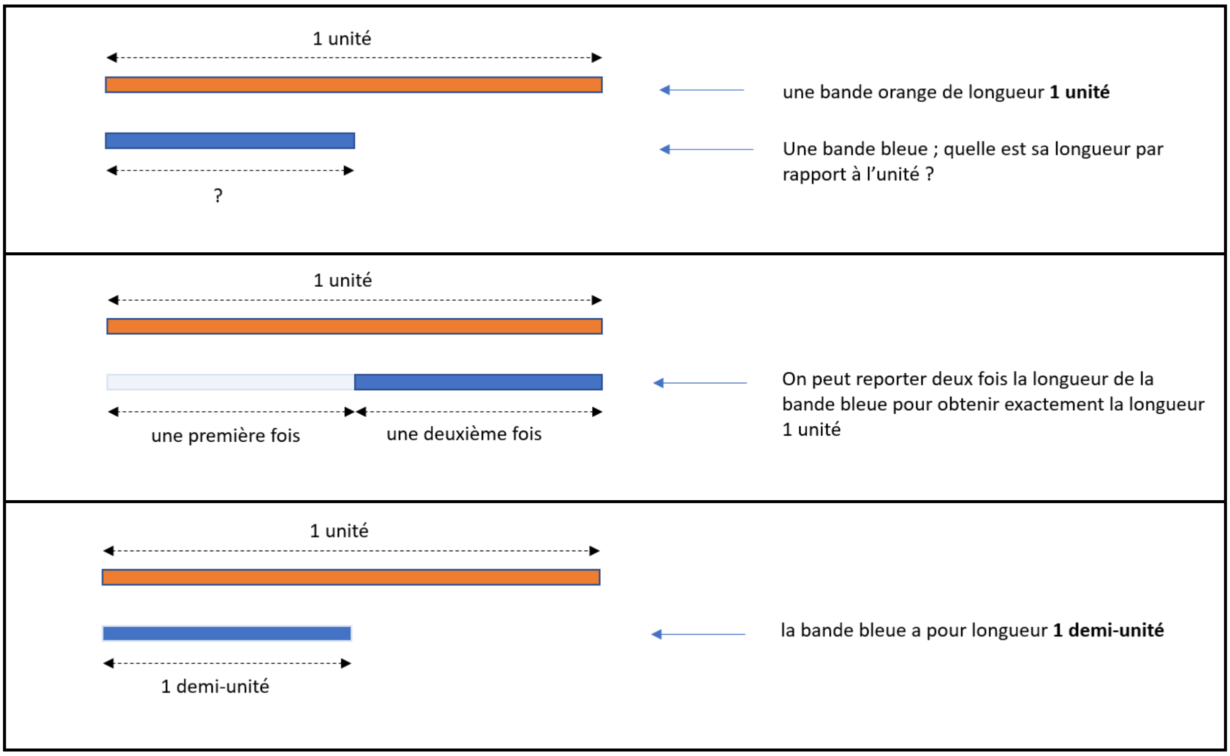


Figure 6 - définition d'une longueur "1 demi-unité"

Puisqu'il s'agit d'une nouvelle unité (ici de longueur), on peut aussi bien mesurer une longueur avec l'unité principale qu'avec cette nouvelle unité, relative à l'unité principale (figure 7).

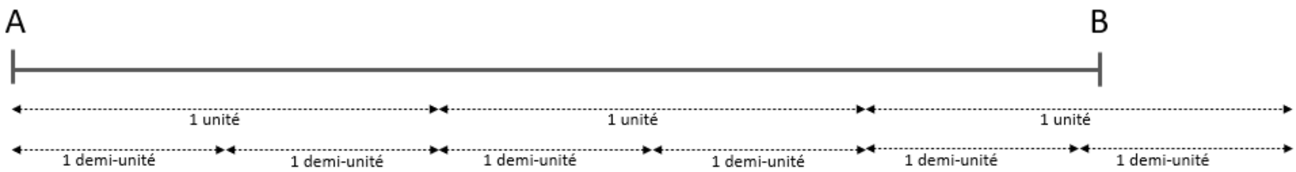


Figure 7- La demi-unité comme nouvelle unité de mesure de longueur

Ainsi, dans l'unité principale, la longueur AB est plus grande que 2 unités et moins grande que 3 unités. La mesure de AB est donc comprise entre 2 et 3 dans l'unité principale

Cette même longueur AB est plus grande que 5 demi-unités et moins grande que 6 demi-unités. La mesure de AB est donc comprise entre 5 et 6 dans l'unité relative "demi-unité".

De la même façon, le **quart** est une nouvelle unité de compte telle qu'il en faut quatre pour égaler l'unité ou encore 4 fois plus petite que l'unité principale.

Autrement dit, par définition : 4 fois un quart font 1.

Ainsi, 3 quarts sont moins que 1, tandis que 5 quarts sont plus que 1, ce que là encore, on peut illustrer facilement à l'aide des longueurs (figure 8).

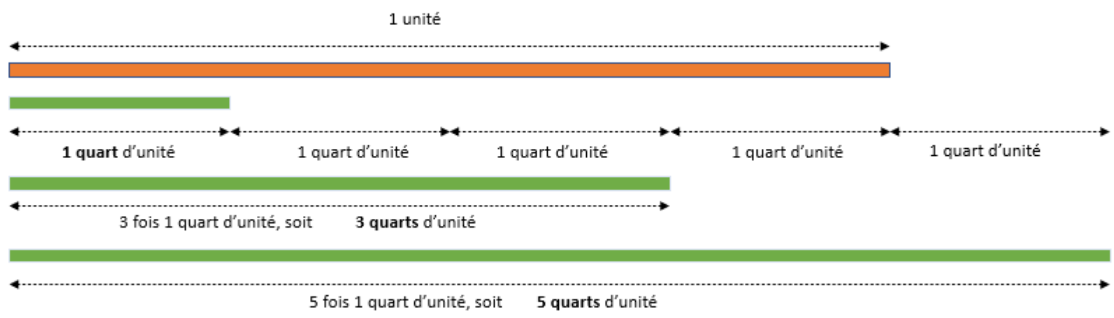


Figure 8 - Les longueurs 1 quart, 3 quarts et 5 quarts d'unité

Afin de distinguer, parmi les fractions, les nouvelles unités de comptes (le demi, le quart, ..) de leurs multiples (3 demis, 5 quarts, …), nous emploierons indifféremment les expressions **fractions unitaires** ou **unités fractionnaires**[22] pour les premières.

Six constats s'imposent à ce stade :

1) Le registre[23] des **écritures** fractionnaires n'est pas nécessaire pour définir les premières fractions ; nous pensons même qu'il n'est pas utile et pourrait faire obstacle à la bonne compréhension de ces nouvelles unités de compte. C'est pourquoi nous proposons d'introduire cette écriture seulement après une première rencontre en langue naturelle et uniquement lorsque le besoin d'écrire les fractions autrement qu'avec des lettres se fait sentir.
2) Les fractions unitaires *demi*, *quart*, *tiers* … étant définies comme des unités de compte, il n'y a pas d'obstacle à obtenir des multiples de ces unités aussi grands que l'on veut, donc en particulier des fractions supérieures à 1. Ainsi, 5 quarts n'est pas plus difficile à concevoir que 3 quarts, ce qui n'est pas le cas d'une approche fréquente du type des " parts de pizza".
3) Ces unités sont immatérielles, ce sont des quantités. Dans le cadre des illustrations précédentes, les demis et les quarts sont des <u>longueurs</u> de bandes, et non les bandes elles-mêmes ; là encore, c'est une distinction qu'il devient difficile à faire avec les "parts de pizza", où les fractions sont souvent entendues comme des objets que l'on peut colorier.
4) Le rapport entre l'unité principale et les unités relatives est bien un rapport multiplicatif. Il est important de verbaliser ces rapports par des locutions du type "fois plus" ou "fois moins", comme "1 quart est 4 fois plus petit que 1"
5) Définir les fractions par fractionnement d'une unité, et non par fractionnement d'une grandeur quelconque, autorise plus facilement le glissement de l'opérateur "fraction de quelque chose" vers le nombre "fraction tout court", le remplacement de l'expression "3 demis de l'unité" par l'expression "3 demis" tout court. On ne peut pas aussi facilement remplacer "trois quarts d'heure" par "trois quarts". Il conviendra cependant de ne pas passer ce glissement sous silence. Il est toujours implicite qu'une fraction est relative à l'unité, que "3 demis" signifie toujours "3 demis de l'unité".

22 Nous avons peut-être inventé cette deuxième expression, mais il nous semble qu'elle rend bien compte du double concept "unité" et "fractionnement".

23 Pour la notion de registre, voir la partie 1.C.

6) Cette dernière remarque vaut d'ailleurs pour toutes les unités relatives à une unité principale, et non pas seulement aux fractions. Les unités de la numération sont tout autant des unités relatives, comme par exemple la dizaine, qui signifie en réalité *dizaine d'unités*. Le fait d'omettre le mot *unité* par commodité ne doit pas faire perdre de vue cette relativité de la définition à une unité principale.

Mais revenons sur la première remarque. Même si l'on peut se passer dans un premier temps de l'écriture fractionnaire pour définir les fractions simples, elle devient très vite nécessaire si l'on souhaite aller plus loin, en particulier pour traiter les relations entre les différentes unités fractionnaires. Son introduction n'est cependant pas aussi évidente qu'il y paraît, c'est donc l'objet du paragraphe suivant.

2. Un nouveau registre d'expression : l'écriture fractionnaire

Nous venons de définir de nouvelles unités en langue naturelle, les unités fractionnaires, mais la question de leur expression en langage symbolique se pose rapidement.

Insistons sur le fait que *l'écriture* fractionnaire est une rupture, peut-être davantage que les fractions elles-mêmes, à cause de sa verticalité et de la présence de deux nombres pour exprimer une unique quantité (Adjiage, 1999). C'est donc une difficulté pour les élèves et il convient de l'introduire avec précaution.

La définition mathématique de cette écriture se fait en deux temps :

1) on définit d'abord l'écriture qui correspond aux unités fractionnaires
2) on étend ensuite cette écriture aux multiples de ces unités, donc aux fractions dans toute leur généralité

Une nouvelle écriture pour les unités fractionnaires

La nouvelle écriture, qui rend compte de la définition d'une unité fractionnaire, indique son rapport à l'unité. Il y a donc une réelle logique à l'écriture en barre des fractions unitaires (ou unités fractionnaires) :

un demi	un quart	un huitième	un tiers	…
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	…

Il convient cependant d'insister sur l'oralisation de cette écriture : on voit "un au-dessus de deux", mais on dit "un demi" ; on voit "un sur huit" mais on dit "un huitième". C'est une vraie difficulté conceptuelle car il s'agit d'un seul nombre, qui s'écrit avec deux nombres.

Le huitième n'est pas seulement indiqué par "8" mais par l'ensemble "$\frac{\dots}{8}$ ". On aurait d'ailleurs pu proposer plutôt quelque chose comme :

demi	quart	huitième	tiers	…
$\frac{\dots}{2}$	$\frac{\dots}{4}$	$\frac{\dots}{8}$	$\frac{\dots}{3}$	…

Une verbalisation accompagnant cette nouvelle écriture s'appuie de préférence sur la définition :

“$\frac{1}{2}$ **s'écrit ainsi car, par définition, c'est une unité deux fois plus petite que 1**”

ou

“$\frac{1}{2}$ s'écrit ainsi, car deux fois $\frac{1}{2}$, ça fait 1”

plutôt que “1 est partagé en 2”, afin de privilégier le rapport multiplicatif entre les deux unités.

On traduit ensuite cette définition en langage symbolique :

Par définition : $2 \times \frac{1}{2} = 1$ **et** $4 \times \frac{1}{4} = 1$ …

Extension de l'écriture fractionnaire aux multiples des unités fractionnaires

Pour que la notion mûrisse dans l'esprit des élèves, c'est seulement dans un second temps, distinct du premier, qu'il nous semble préférable d'introduire l'écriture symbolique des multiples des fractions unitaires, comme trois quarts, ou cinq demis :

Par définition, trois quarts signifie 3 fois $\frac{1}{4}$ et s'écrit de façon compactée $\frac{3}{4}$

De même, cinq demis signifie 5 fois $\frac{1}{2}$ et s'écrit de façon compactée $\frac{5}{2}$

Ainsi, par définition,

$$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4} \quad et \quad \frac{5}{2} = 5 \times \frac{1}{2}$$

Cette écriture compactée $\frac{3}{4}$ est encore plus source de malentendus que celle de la fraction unitaire $\frac{1}{4}$. L'information lue en premier est 3, puisqu'on lit du haut vers le bas, et que l'on dit bien “trois” avant “quart”, et pourtant, la première information à prendre en compte est $\frac{\cdots}{4}$, à savoir que l'on compte dans l'unité relative “quart”. Comprendre cela permet ultérieurement d'éviter des erreurs du type $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{8}$. C'est pour cela qu'il est nécessaire de prendre son temps pour définir une écriture qui ne va pas de soi.

3. Traitement dans le registre de l'écriture fractionnaire

Comparaison de fractions simples

Ces nouvelles unités fractionnaires ne sont pas simples à manipuler et les premiers résultats peuvent sembler contre-intuitifs.

Pour justifier une égalité telle que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, il n'est pas question d'invoquer la propriété mathématique : “lorsque l'on divise le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre, on obtient une fraction équivalente”. Celle-ci est trop abstraite pour des élèves de l'école primaire, et n'est de toute façon pas au programme.

On peut se contenter d'avoir vérifié cette égalité par manipulations de bandes, mais l'on peut aussi mettre en place un raisonnement qui a l'avantage de se généraliser à n'importe quelle fraction :

“Puisqu'il faut 4 quarts pour faire 1, et qu'il ne faut que 2 demis pour faire 1, il faut 2 fois plus de quarts que de demis pour obtenir la même quantité 1. Ainsi, les quarts sont 2 fois plus petits que les demis.”

On peut bien-sûr étendre ce raisonnement pour justifier les rapports entre les tiers et les sixièmes, les cinquièmes et les dixièmes, …

Ce type de raisonnement, davantage que la manipulation d'écritures symboliques, est le vrai fondement des mathématiques, et on gagne à les faire trouver et formuler par les élèves.

Écrire des égalités avec les fractions

Tout est ainsi en place pour établir des égalités que l'on rencontrera en situation :

Traitement dans le registre des écritures fractionnaires	***Éléments de justification à expliciter avec les élèves***
$\frac{7}{2} = 7 \times \frac{1}{2}$ $\frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$ $1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}$ $3 + \frac{1}{2}$	· définition de $\frac{7}{2}$ · décomposition de 7 demis par groupe de 2 demis · définition de $\frac{1}{2}$
$\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ $1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	· définition de $\frac{7}{4}$et $\frac{1}{4}$ · définition de $\frac{3}{4}$ · $\frac{1}{2}$ est le double de $\frac{1}{4}$

Il n'est pas attendu des élèves des techniques systématiques pour travailler sur ces égalités ; on rappelle que les règles de transformation des écritures fractionnaires n'entrent pas dans le programme du premier degré. Il s'agit toujours d'accompagner chaque transformation par un raisonnement en langue naturelle, appuyé par des définitions et des faits numériques mémorisés.

4. Suite du travail sur les fractions simples

Afin de consolider l'apprentissage de ces nouvelles quantités et de leur donner le statut de nombre, il convient d'apprendre à les placer sur des droites graduées. Nous ne développerons pas ici les activités le permettant, mais c'est l'objet de la situation *Droite-graduée-1* qui suit immédiatement *Bande unité* dans ERMEL.

A l'issue de ce travail, et avant l'introduction des fractions décimales, les élèves auront donc été entraînés à :

- la comparaison d'une fraction simple à l'unité (définie par le nombre 1)
- l'encadrement d'une fraction simple entre deux entiers consécutifs, <u>sans qu'une technique systématique soit enseignée</u>.
  Par exemple, pour encadrer $\frac{12}{5}$ entre deux entiers, on peut utiliser la relation fondamentale $\frac{5}{5} = 1$ puis raisonner de la façon suivante :

$\frac{12}{5} = \frac{5}{5} + \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 1 + 1 + \frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5}$

On en déduit que $\frac{12}{5}$ se situe entre 2 et 3

Ce genre d'activité doit s'appuyer sur le sens des fractions, et permet d'ancrer un peu plus les fractions parmi les nombres.

- l'égalité entre quelques fractions simples, là encore sans technicité : $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, par exemple, en se référant aux mesures de longueur.

C. Les fractions décimales

Les fractions décimales sont des fractions particulières, qui obéissent donc aux mêmes définitions et règles d'écriture que les fractions dites simples.

Un dixième (respectivement un centième, un millième) est une unité fractionnaire 10 fois (respectivement 100 fois, 1000 fois) plus petite que l'unité principale.

Par définition : $10 \times \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$ (et les autres)

Les fractions décimales ont comme premier avantage d'avoir des rapports simples entre elles (comme les demis, les quarts et les huitièmes) ; en effet :

10 centièmes égalent 1 dixième et 10 millièmes égalent 1 centième

Ces égalités sont à établir grâce à des activités mettant en jeu des unités de longueur assez grandes pour que les dixièmes et les centièmes d'unités soient manipulables par les élèves. C'est l'enjeu de la situation ERMEL *Droite-graduée-2*.

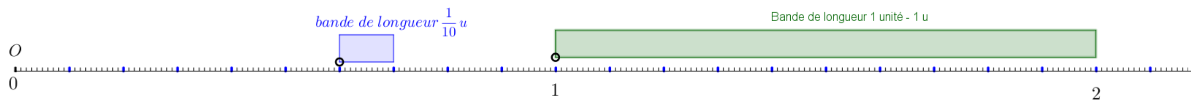


Figure 9 -modèle numérique de la droite graduée en unité, dixième et centième utilisée dans la situation Droite-graduée-2

Ces relations sont fondamentales car les dixièmes, les centièmes et les millièmes sont appelés à devenir des unités de la numération, une fois que l'on aura étendu la numération décimale aux nombres non entiers (voir partie 2.D.)

Les activités de placement sur une droite graduée et de différentes écritures d'un même nombre permettent de travailler des égalités telles que :

$\frac{342}{100} = 3 + \frac{42}{100}$ ou $3 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100}$

justifiées par les relations entre les différentes fractions décimales, comme, ici, le fait que $\frac{300}{100} = 3 \times \frac{100}{100} = 3 \times 1 = 3$ ou $\frac{42}{100} = \frac{40}{100} + \frac{2}{100}$ et $\frac{40}{100} = 4 \times \frac{10}{100} = 4 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$

Insistons sur le fait qu'il ne s'agit pas d'automatiser des techniques, comme “on enlève un zéro en haut et en bas”, bien qu'il ne manquera pas d'élèves pour les remarquer et les verbaliser. Si cette technique peut s'avérer efficace dans certains cas, elle ne permet pas de comprendre le phénomène de transformation des écritures, qui est ici tout l'enjeu. Il est nécessaire au contraire de verbaliser le plus souvent possible les relations telles que “*quarante centièmes, c'est quatre fois dix centièmes ; or, dix centièmes égalent un dixième, c'est donc quatre fois un dixième, donc quatre dixièmes*.”

Nous verrons que lors du passage de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale, on pourra judicieusement s'appuyer sur ces verbalisations pour travailler un registre intermédiaire : celui des unités de la numération[24]. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

Concluons celui-ci en notant qu'à ce stade, les élèves doivent s'être familiarisés avec les tâches suivantes :

- comparer des fractions décimales à des entiers/encadrer une fraction décimale par deux entiers consécutifs
- convertir des dixièmes en centièmes, en millièmes ou en unité et inversement
- additionner/soustraire des fractions décimales

Ce dernier point permet de construire un peu plus les fractions décimales comme des nombres.

Contrairement aux fractions simples, qu'il n'est pas aisé d'additionner entre elles (un tiers et un quart ne s'additionnent pas facilement), le second avantage des fractions décimales est précisément cette facilité calculatoire qu'elles offrent, et qui leur permet d'accéder un peu plus au statut de nombre. Par exemple, si l'on veut effectuer la somme $\frac{3}{10}+\frac{42}{100}$, que l'on peut visualiser grâce à la somme de longueurs, on peut effectuer les étapes suivantes :

$$\frac{3}{10}+\frac{42}{100}=\frac{30}{100}+\frac{42}{100}=\frac{72}{100} \qquad \text{ou} \qquad \frac{3}{10}+\frac{42}{100}=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}=\frac{7}{10}+\frac{2}{100}$$

Encore une fois, toute technique doit s'appuyer sur les relations verbalisées entre les fractions décimales.

Une fois toutes ces tâches devenues familières aux élèves, on peut passer à l'étape suivante.

D. Introduction de la virgule dans l'écriture décimale

Il existe plusieurs raisons qui poussent à abandonner l'écriture fractionnaire :

- sa difficulté à être comprise comme exprimant un nombre, alors qu'elle en utilise deux, et, en conséquence, à intégrer les fractions décimales parmi les nombres entiers
- son lien presque indestructible avec la notion de fractionnement, qui rend difficile le nécessaire détachement des nombres avec le monde sensible
- son manque d'efficacité lors des calculs
- sa pénibilité d'écriture

Il est classique d'introduire l'écriture dite "à virgule" comme une convention un peu arbitraire permettant d'écrire différemment les fractions décimales. Ainsi, l'on va trouver dans différents manuels le modèle suivant :

$$\frac{342}{100}=3+\frac{42}{100}=3{,}42$$

Cette façon de procéder a pour inconvénient d'occulter ce qui pourrait et devrait être une évidence : l'écriture décimale est une extension de l'écriture des nombres entiers ; elle repose sur le même principe

24 Voir partie 1.C.

de numération décimale en introduisant uniquement un nouveau symbole, la virgule, afin de pouvoir conserver la logique de numération positionnelle.

Développons ce point en commençant par rappeler que l'écriture chiffrée des nombres entiers repose sur quatre principes :

1) l'existence de différentes unités de compte (la dizaine, la centaine, le millier, …) que l'on nomme les unités de la numération
2) une relation entre les unités de la numération successives qui est toujours la même, à savoir un rapport dix
3) une valeur des chiffres dépendant de leur position dans l'écriture (pour plus de détails, voir par exemple Tempier, 2016),
4) l'existence d'un chiffre particulier, 0, n'ayant aucune valeur afin de marquer une position vide dans l'écriture.

Ainsi, 2 403 (deux-quatre-zéro-trois) est une écriture condensée qui signifie très exactement : 2 milliers 4 centaines 3 unités (3M 4C 3U), où :

- un millier est égal à dix centaines
- une centaine est égale à dix dizaines
- une dizaine est égale à dix unités

Pour exprimer les nombres décimaux dans le même système, il suffit de considérer les fractions décimales un dixième, un centième, un millième, … comme de nouvelles unités de numération, qui entretiennent le même rapport dix avec l'unité la plus proche.

En poursuivant ainsi la liste, on trouve :

- une unité est égale à dix dixièmes
- un dixième est égal à dix centièmes
- …

Le problème devient alors d'écrire de façon condensée le nombre $\frac{342}{10}$, soit 342 dixièmes ou 342 d, qui est égal à : 3 dizaines 4 unités 2 dixièmes ou encore 3D 4U 2d.

On ne peut évidemment pas l'écrire 342 puisque cette écriture signifie déjà 3 centaines 4 dizaines 2 unités.

L'idée astucieuse est d'introduire un signe pour marquer la position de l'unité, ce dont on n'avait pas besoin tant que les nombres restaient entiers, puisque par convention, la position de l'unité est la plus à droite de l'écriture.

On aurait pu marquer cette position de diverses façons, telles que :

$$34^{u}2 \qquad 3\boxed{4}2 \qquad 3\overset{\frown}{4}2 \qquad 3\underline{4}2$$

Figure 10 - Différentes propositions pour marquer la position de l'unité

En France, on a choisi une virgule : $\frac{342}{10}$ = 342 d = 3 D 4U 2d s'écrit finalement 34,2

Cette virgule permet de condenser l'écriture en unité de numération des nombres décimaux de la même façon que pour les nombres entiers, afin que chaque chiffre puisse se rapporter, selon sa position, à une unité de numération précise. Elle a le défaut, contrairement aux trois dernières propositions de la figure 10, de rompre la symétrie des unités de la numération par rapport à l'unité, et de créer une illusion de séparation entre ce que l'on nomme la partie entière, et la partie décimale, soit la partie du nombre inférieure à 1. On sait que la conception de la virgule comme séparateur est source de nombreuses erreurs chez les élèves. Il en est de même du point utilisé dans d'autres pays.

Cette nouvelle écriture des fractions décimales, en perdant leur lien avec l'écriture fractionnaire et surtout avec l'idée de fractionnement, permet que ces dernières deviennent des nombres à part entière, que l'on nomme les nombres décimaux. Le dixième, le centième, le millième…, deviennent ainsi des unités de la numération.

C'est pourquoi le registre intermédiaire des unités de la numération permet de jouer le même rôle que pour les nombres entiers, à savoir expliciter la condensation de l'écriture décimale, en d'autres termes, permettre le passage de "3 unités 4 centièmes" à 3,04.

Rappelons pour finir, en le complétant un peu, le schéma de la partie 1.C.4, afin d'insister une dernière fois sur l'importance de ce registre des unités de la numération:

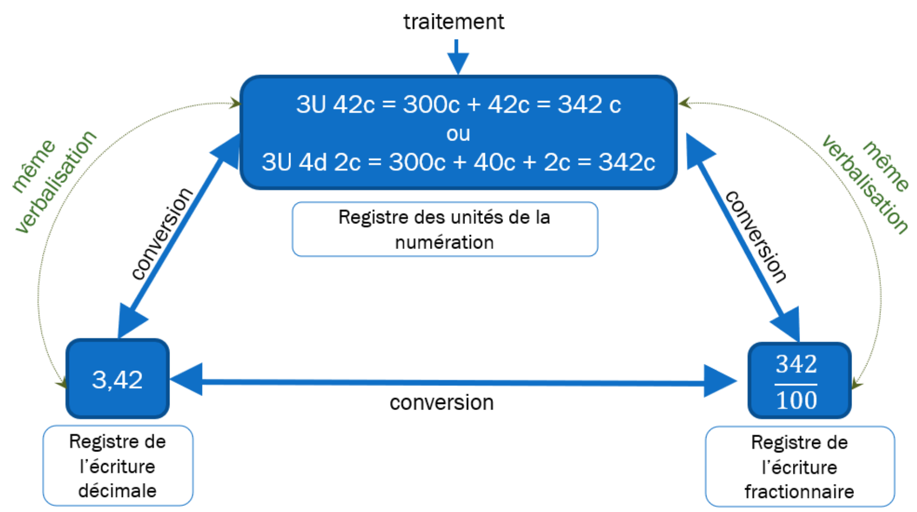


Figure 11 - Le registre transitoire des unités de la numération, comme intermédiaire entre l'écriture fractionnaire et l'écriture décimale

Conclusion des parties 1 et 2

Ainsi se termine la partie théorique de cette brochure. Nous y avons exposé, dans la partie 1, quelques principes théoriques de la didactique des mathématiques qui sous-tendent à la fois les choix de la ressource ERMEL et les nôtres, et que nous résumons brièvement ici :

- un principe constructiviste, et même **socio-constructiviste**, développé pour l'enseignement des mathématiques par la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) et la Dialectique Outil-Objet (Douady, 1986).
  → Ainsi, la situation *Bande unité*, en particulier dans sa modalité émetteur-récepteur, relève de ce modèle constructiviste, à la fois parce qu'il propose un problème à résoudre dans lequel tous les élèves peuvent entrer, construisent des connaissances en agissant sur ce problème, prennent

conscience de ce qu'ils produisent en devant formuler le résultat de leurs actions, et peuvent valider leurs actions par la réussite ou l'échec de leurs propositions

- un rôle majeur de l'enseignant : la **phase d'institutionnalisation**, qui consiste à faire émerger de la situation résolue le ou les savoirs à retenir et à les inscrire dans un corpus structuré
→ Dans la partie suivante, nous insistons particulièrement sur ces phases d'institutionnalisation et proposons de nombreux écrits, sur lesquels les enseignants peuvent s'appuyer pour choisir celui ou ceux qui leur conviennent le mieux.

- la notion de registre de représentation sémiotique (Duval, 1993), qui permet ici la distinction entre un nombre et ses différentes écritures, distinction particulièrement à l'œuvre dans la construction des nombres décimaux, puisque la finalité majeure y est de remplacer l'écriture fractionnaire par l'écriture décimale.
→ nous nous appuyons pour ce faire sur un registre intermédiaire et transitoire, **le registre des unités de la numération**, dont nous proposons un codage pratique permettant de le manipuler facilement.

Dans la partie 2, nous exposons la logique mathématique et didactique permettant de construire de nouveaux nombres, les nombres décimaux, en insistant particulièrement sur la phase initiale : la notion de fraction. Pour ce faire, nous proposons une définition claire et rigoureuse d'une **fraction**, ce qui, à notre connaissance, est inédit, afin que les enseignants puissent s'appuyer dessus pour leurs enseignements. Nous donnons également une place fondamentale à la notion d'**unité de la numération**, en nous appuyant sur les nombreux travaux de Chambris (2012, 2014, 2022), ces deux notions (fraction et unité de la numération) étant toutes deux des exemples d'**unité relative**.

Nous espérons ainsi pouvoir éclairer et outiller les enseignants sur l'enseignement des fractions et des décimaux, qu'ils souhaitent ou non s'emparer de la célèbre situation *Bande unité*.

Nous exposons dans la partie 3 notre propre version de cette situation, éclairée par les développements des parties 1 et 2, sans toutefois en modifier les fondamentaux, qui resteront à jamais la marque de fabrique de ERMEL.

Références bibliographiques

Adjiage R (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*. Thèse de Doctorat. Strasbourg : Université Louis Pasteur.
En ligne : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012146/document

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Diderot.
En ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01249807/document

Baudart, F. & Mayenson, J.-B. (2018). *Numération et calculs, cycle 3. Comprendre les nombres pour mieux s'en servir*. Paris : Retz.

Blochs, B. (2012). Le cahier de cours au collège : une œuvre du professeur ? Un instrument pour l'élève ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(2), 159-193

Brousseau, G. (1984.a.). *Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*.
En ligne : https://guy-brousseau.com/2332/le-role-central-du-contrat-didactique-dans-l%E2%80%99analyse-et-la-construction-des-situations-1984/

Brousseau, G. (1984.b.). *Le rôle du maître et l'institutionnalisation*.
En ligne : https://guy-brousseau.com/2376/le-role-du-maitre-et-l%e2%80%99institutionnalisation-1984/

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Butlen, D. (2018) *Problèmes rencontrés par les enseignants d'école primaire dans l'enseignement des mathématiques. Perspective historique*.
Conférence en ligne : https://www.academie-sciences.fr/fr/Seances-publiques/enseignement-mathematiques-ecole-primaire.html

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Université Paris Diderot-Paris VII.

Chambris, C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N*, 89, 39-69

Chambris, C. (2014). *Contribution à propos de la numération décimale*. Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège, ENS de Lyon, 13 mars 2012.
En ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03452972

Chambris, C. (2021). Raisons d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. In H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, G. Cirade, L. Coulange, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques : Point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesures*. (Vol. 1, pp. 169–196). La pensée sauvage

Chambris, C. (2022). *Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités*. HDR. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. CY Cergy Paris Université. tel-04391867

Chambris, C., Tempier, F. & Allard C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège. *Repères-IREM*, 108, 63-91.
En ligne : https://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique24&id_numero=108&id_article_reperes=709

Chesné, J.-F. & Fischer, J.-P. (2015) Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire. *Rapport pour la conférence de consensus Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire*. CNESCO.
En ligne : https://www.cnesco.fr/numeration/bilan-des-acquis/

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2000) Les grandeurs en mathématiques au collège- *Partie 1*- Une Atlantide oubliée, 2000, *Petit x*, 55, 5-32, IREM de Grenoble.

DEPP (2022). Évaluations de début de sixième 2022. Premiers résultats. MEN.
En ligne : https://www.education.gouv.fr/evaluations-de-debut-de-sixieme-2022-premiers-resultats-343396

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Douady, R. & Perrin, M.-J. (1986). *Liaison école-collège: Nombres décimaux*. Brochure IREM Paris VII, 62.
En ligne : http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97032.pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

ERMEL (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. CM1 Cycle 3*. Paris : Hatier.

ERMEL (2021). *Les essentielles CM1. 15 SITUATIONS pour l'apprentissage de la numération et du calcul*, Ed. Hatier

Houdement C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100, 59-78.

Laparra, M. & Margolinas, C. (2008), *Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. Des effets de la transparence des objets de savoir*
En ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00779656/document

Margolinas, C. (2020). Enseigner les nombres rationnels au cycle 3. Une proposition didactique. *Grand N*, 106, 5-30.

Mama Khanyi and the pots, en ligne (Merci à Christine Chambris pour cette précieuse et originale ressource).
En ligne : https://www.ru.ac.za/media/rhodesuniversity/content/sanc/documents/SANC_Storybook.pdf

MENJ (2019). Repères annuels de progression pour le cycle 3. *Bulletin Officiel*, note de service n° 2019-072 du 28-5-2019, annexe 23

Mounier, E. (2020). *La numération au cycle 2*. Conférence prononcée à l'INSPE de Strasbourg le 30 septembre 2020.

Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, 98, 67-90

Vale, P., Graven, M., Visnovska, J. & Ford, C. (2019*). Mama Khanyi and the pots: a mathematical story and activity book*. Makhanda, South Africa: South African Numeracy Chair Project, Rhodes

University. [Mama Khanyi et les pots: Une histoire mathématique et un livre d'activités, 2021, pour la traduction en français par C. Chambris] https://hal.science/hal-04572483

Vygotski, L. (1997). *Pensée et langage* (Sève, F., Trad., 3e ed.). La Dispute

Partie 3 - Une situation essentielle pour construire les fractions : *Bande unité*[25]

Bande unité est une situation essentielle de la ressource ERMEL, présente dans les deux collections, dont la vocation est de construire le concept de fraction, comme réponse à un problème de mesure de longueurs.

Elle est détaillée au paragraphe C de cette partie. Les lecteurs peuvent directement s'y rendre s'ils souhaitent commencer par la mettre en œuvre dans leurs classes. Ils y trouveront le déroulement précis, avec les objectifs mathématiques, le matériel nécessaire, l'organisation de la classe, les procédures attendues des élèves, la description des moments de synthèse et des propositions d'institutionnalisation.

Toutefois, il nous semble opportun de commencer par situer cette situation dans une progression plus large, dont la finalité est la construction des nombres décimaux, ce que nous faisons dans la partie 3.A. La partie 3.B. est consacrée à une analyse des prérequis nécessaires à la réussite de la situation. Cette analyse est fondée sur nos propres expériences de mise en œuvre. Il en découle une proposition de courtes activités préalables, dont certaines construites par nous, et qui permettent de s'assurer de ces prérequis au cas où ils viendraient à manquer.

Nous rappelons que les parties 1 et 2 de cette publication sont consacrées aux choix didactiques et mathématiques qui sous-tendent cette séquence d'enseignement.

A. La séquence complète de construction des nombres décimaux

On trouve dans la ressource ERMEL du niveau CM1 (ERMEL, 2005) trois situations dont l'enchaînement permet de construire les nombres décimaux par une approche amenant les élèves à comprendre le besoin de nombres à intercaler entre deux entiers successifs : *Bande unité*, *Droite-graduée-1* et *Droite-graduée-2*. Ces trois situations sont essentielles puisqu'on les retrouve dans Les Essentielles CM1 (ERMEL, 2021), *Droite-graduée-1* et *Droite-graduée-2* étant réunies en une unité dénommée *Droite-graduée*.

Une séance ultérieure intitulée *Comparaison-de-décimaux* permet de travailler ensuite les nombres décimaux en tant qu'objet d'étude[26]. Nous n'évoquerons pas cette situation plus lointaine.

Chacune des trois premières situations initie une séquence d'une durée de deux à trois semaines ; elles peuvent être menées successivement ou de façon plus spiralaire.

Avant de développer dans sa totalité notre proposition pour mener plus aisément la première séquence *Bande unité*, qui est l'objectif principal de cette brochure, nous présentons un bref résumé de l'enchaînement des trois situations et de leurs différentes étapes, pour en permettre une compréhension globale :

---

25 Nous avons choisi de garder le nom original de la situation, bien qu'il eut été plus mathématiquement correct de l'intituler "Bande de longueur unité" ou "Bande étalon".

26 objet au sens de Douady (1986). Voir la partie 1.A.

La situation Bande unité

Pour davantage de simplicité et même s'il eût été préférable d'appeler cette situation *Bande de longueur unité*, nous avons choisi de conserver le titre originel/historique. Mais il doit être clair pour les enseignants (et peut-être aussi pour les élèves) que l'unité de longueur n'est pas la bande elle-même, qui est un objet matériel, mais la longueur de celle-ci. La bande joue alors le rôle d'étalon :

> ***Séance 1 et 1 bis :*** découverte des limites des nombres entiers à travers une situation émetteur-récepteur ; les élèves commencent par mesurer des longueurs sans l'outil habituellement utilisé qu'est la règle, mais avec des bandes de papier toutes de même longueur. La situation les contraint à expliciter la procédure choisie car ils doivent rédiger un message devant permettre à un autre élève d'identifier un segment donné. Cela les amène à découvrir la nécessité de nouveaux nombres, plus petits que l'unité : les fractions unitaires[27] que sont les demis, quarts et huitièmes.
>
> ***Séance 2*** : en utilisant ces mêmes fractions, entraînement à la mesure de longueurs avec des bandes unités, puis construction de segments de mesures de longueur données.
>
> ***Séance 3*** : en utilisant toujours ces mêmes fractions, placement de plusieurs points sur une même ligne, en partant d'un point O ; en constatant que certaines longueurs sont égales, on établit l'équivalence de certaines écritures et on prépare à l'utilisation de l'objet *droite graduée*.
>
> ***Séances 4 et 5*** : sans plus utiliser de matériel, proposition d'écritures égales afin que les élèves arrivent à décomposer une fraction en somme, en particulier en somme d'un entier et d'une fraction inférieure à l'unité.

La situation Droite-graduée-1[28]

Les élèves doivent réinvestir les notions découvertes précédemment dans le contexte des droites graduées. Ils associent certaines graduations à des fractions. Ils vont découvrir de nouvelles fractions unitaires : les tiers, les cinquièmes et les dixièmes, qu'ils inscrivent parmi les nombres entiers. Ils découvrent également certaines propriétés peu intuitives, comme "la moitié de un tiers est un sixième". En dernière étape de l'activité, ils calculent des distances entre des points.

La situation Droite-graduée-2

Les élèves découvrent une droite graduée de deux mètres de long dont la seule indication est que les graduations sont espacées de un centième. A partir de cette droite, ils construisent une bande de longueur une unité, puis une bande de longueur un dixième d'unité. Ils placent ensuite les premiers nombres entiers, puis certaines fractions décimales, alternativement en dixièmes et en centièmes.

C'est ainsi que sont construites les équivalences entre l'unité, le dixième et le centième, ainsi que certaines égalités telles que :

$$\frac{40}{100} = \frac{4}{10} \qquad \text{ou} \qquad \frac{200}{100} = 2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{345}{100} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100},$$

toutes matérialisées sur la droite graduée.

27 La notion de fraction unitaire est développée dans la partie 2.B.1.

28 On rappelle que *Droite-graduée-1* et *Droite-graduée-2* ne sont pas développées dans cet ouvrage. On peut les retrouver dans ERMEL (2005), ou regroupées dans Les essentielles (ERMEL, 2021) sous la dénomination *Droite graduée*

En appui sur les égalités précédentes, la dernière étape consiste à construire l'écriture décimale (dite "écriture à virgule") afin de parvenir aux nombres décimaux.

Cette séquence d'enchaînement de trois situations se poursuit par des activités plus courtes, de plus en plus décontextualisées qui permettent aux élèves de s'entraîner et ainsi progresser dans la maîtrise des nombres décimaux. Comme toujours, la situation essentielle initiale reste une situation de référence tout au long de la séquence, soit pour permettre de revenir au sens, soit pour valider les activités des élèves dans des situations décontextualisées.

Ainsi, la situation *Bande unité* sur laquelle nous travaillons s'inscrit et initie une organisation longue et complète de la construction des nombres décimaux.

Nous décrirons de façon très précise la première situation de référence et nous laisserons au lecteur le soin d'aller chercher dans ERMEL les activités suivantes, qui en découlent naturellement.

B. Compétences requises pour la mise en œuvre de *Bande unité*

Même en suivant la progression et les situations ERMEL prévues sur l'année, la première séance émetteur-récepteur peut être délicate à mettre en œuvre pour plusieurs raisons. Réussir la tâche demande aux élèves les compétences suivantes :

- prendre l'initiative de mesurer la longueur d'un segment en reportant la longueur d'une bande de papier, c'est-à-dire sans l'utilisation de la règle graduée, ni les unités conventionnelles
- s'autoriser à plier la bande pour mesurer plus précisément
- communiquer une longueur en écrivant un message pour faire identifier à une autre équipe un segment et comprendre le message reçu d'une autre équipe
- connaître les notions de moitié et de quart (cette dernière compétence n'est pas indispensable, mais est facilitante).

Tout cela peut être déconcertant pour des élèves qui ont l'habitude de mesurer des longueurs avec une règle ou de partager leurs idées oralement et qui ont souvent plus de mal avec l'écrit, surtout avec un énoncé descriptif qui doit être clair et précis. On trouvera en annexe 1 une analyse plus détaillée de ces prérequis afin de mieux en comprendre la nécessité.

Ces prérequis sont assurés dans la ressource ERMEL par un enchaînement de situations pensé depuis la classe de CP (voir annexe 2). La mise en place de *Bande unité* se fait ainsi avec tous les prérequis nécessaires. Nous sommes néanmoins conscients que peu d'élèves ont vécu cet enchaînement, ce qui peut poser un certain nombre de difficultés. Nous proposons donc de courtes activités en préalable à *Bande unité* permettant de s'assurer de ces prérequis et de faciliter ainsi la réussite de la situation (voir tableau 2).

Les trois premières activités ont été créées par les animateurs de notre groupe, et ont été éprouvées sous différentes modalités ; leur description détaillée et les documents nécessaires à leur réalisation se trouvent sur la page de la toile dédiée à notre groupe : https://mathinfo.unistra.fr/irem/groupes-irem/ermel-1er-degre/

Les activités 4 et 5 sont des activités proposées par ERMEL en amont de *Bande unité*. Une description succincte de chacune d'elles est proposée en annexe 3.

Ces activités sont indépendantes les unes des autres, sans ordre chronologique particulier et à choisir en fonction des objectifs suivants :

- vivre une activité de type émetteur/récepteur
- mesurer une longueur avec une bande étalon
- être familiarisé avec les notions de moitié-double
- s'autoriser à plier une bande de papier

Tableau 2 - Proposition d'activités permettant de travailler les prérequis à la réussite de la situation Bande unité

Nom de l'activité	**Prérequis travaillés par l'activité pour préparer *Bande unité***	**Résumé succinct/objectifs**
Activité 1 ***Multiples et sous-multiples*** (2 × 45 minutes)	· Se familiariser avec la notion de moitié et double	S'entraîner au calcul réfléchi avec des doubles et des moitiés
Activité 2 ***Fruits et légumes*** (45 minutes)	· Vivre une situation émetteur-récepteur	Décrire/reconnaître un fruit dans une liste de fruits et légumes ayant des critères communs comme la forme ou la couleur.
Activité 3 ***Les rectangles*** (45 minutes puis 30 minutes)	· Vivre une situation émetteur-récepteur · Mesurer une longueur avec une bande étalon	Décrire/reconnaître un rectangle à l'aide d'une bande étalon, pour mesurer les côtés. Les longueurs sont des multiples de la longueur unité.
Activité 4 ***Jeu des six cartes***	· Se familiariser avec la notion de moitié et de quart	Travailler la notion de moitié et de quart sur des nombres multiples de 4 avec un jeu de cartes
Activité 5 ***Graduations***	· Mesurer une longueur avec une bande étalon · S'autoriser à plier une bande de papier	Placer des graduations sur une droite et manipuler des bandes de papier pour mesurer, reporter une longueur

A moins que les élèves aient une expérience des situations ERMEL sur plusieurs années, nous conseillons fortement d'utiliser au moins l'une de ces activités, en particulier l'une de celle utilisant la modalité émetteur-récepteur. En effet, être capable d'animer une telle séance est un geste professionnel qui s'acquiert et gagne à être pratiqué. Nous avons appris à nos dépens que la découvrir pour la première fois pendant *Bande unité* compliquait sa mise en œuvre.

C. Mise en œuvre de la situation *Bande unité*

Dans la tradition ERMEL, on trouvera ci-après la description détaillée de la situation *Bande unité*, complétée par une analyse des tâches en jeu, des procédures attendues des élèves, leurs difficultés éventuelles, des propositions rédigées de consignes données aux élèves, des conseils pour conduire la phase de mise en commun et rédiger une synthèse, et des exemples d'institutionnalisation.

Bien que nous conseillons la lecture des parties 1 et 2 afin de mieux maîtriser tous les aspects mathématiques et didactiques en jeu, cette partie est conçue pour être indépendante, et peut suffire à une première lecture et une première mise en œuvre.

Nous renvoyons aux annexes pour une vue synthétique de la séquence complète (voir annexe 4) et pour une description plus détaillée au format « fiche de préparation » de la séance 1 (voir annexe 5).

Séance 1 *(45 min)*

Matériel

Prévoir pour chaque élève, ou chaque groupe d'élèves[29]

- Une (ou plusieurs) bande de papier dont la longueur est choisie comme unité de référence ; on nomme cette longueur u (toutes les bandes sont de même longueur, évidemment). L'une des bandes peut être en couleur et plastifiée afin de rester intacte ; les autres ont vocation à être pliées ou découpées
- Une feuille (1) où est tracé un segment (il y a trois longueurs différentes afin de permettre une différenciation, et donc trois versions de la feuille (1))
- Une feuille (2) avec une trame pour écrire un message et sa réponse après l'échange
- Une feuille (3) où sont tracés six segments, dont trois de même longueur que les segments distribués aux élèves.

29 Il est en effet possible de réaliser toute l'activité avec des binômes ou des groupes de trois ou quatre élèves, selon les caractéristiques des classes. Comme le dit ERMEL, « le travail à deux favorise les échanges et facilite la mise en commun en réduisant le nombre de messages à examiner » (ERMEL, 2005). On laissera l'enseignant transposer toutes les consignes en fonction des modalités choisies.

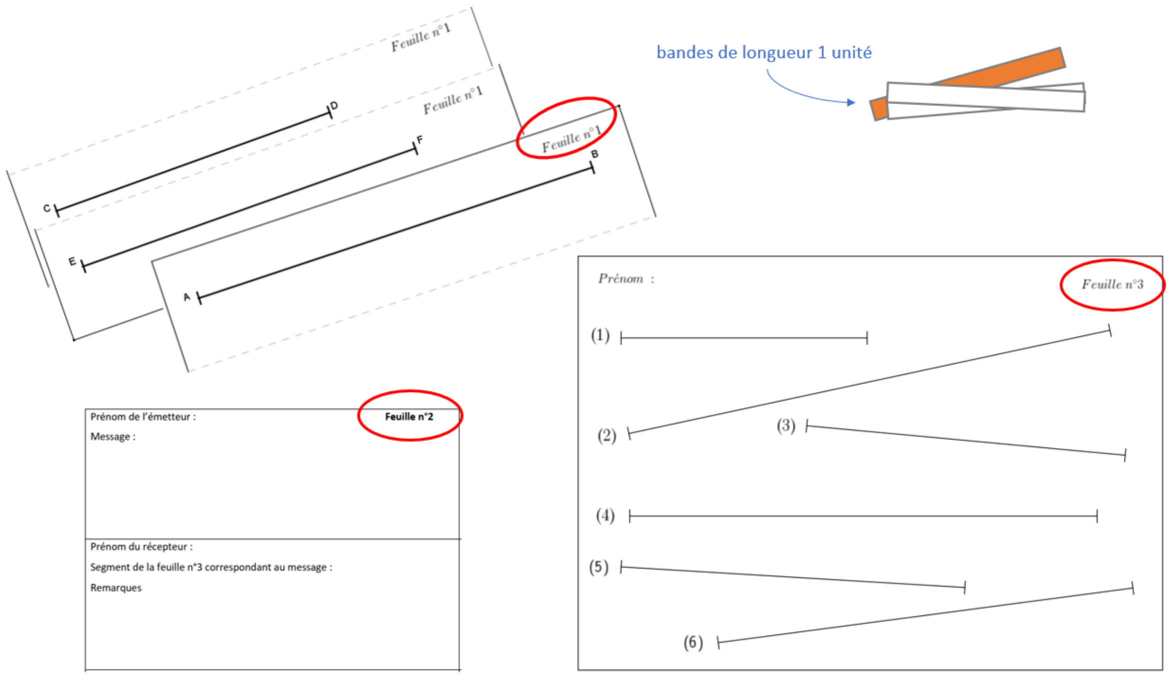


Figure 12 - Le matériel "élève" pour la situation Bande unité

N.B. La figure 12 est une vue synthétique qui ne respecte pas les proportions de chacune des feuilles par rapport aux autres.

On trouvera dans le dossier en ligne … les fichiers photocopiables correspondant à ce matériel.

Pour l'enseignant (phase de mise en commun et synthèse)

- Pour les salles équipées d'un *TBI*, on préconise de l'utiliser uniquement pour sa fonction de tableau blanc avec projecteur, afin de ne pas remplacer la manipulation réelle par leur modèle numérique.
  Pour les salles disposant d'un *visualiseur* et d'un *vidéoprojecteur*, prévoir quelques bandes-étalon en papier, une feuille n°1, une feuille n°2 et une feuille n°3 pour l'enseignant
  Pour les salles disposant d'un *vidéoprojecteur* seul, prévoir une ou plusieurs bandes-étalon papier en grand format correspondant aux versions numériques projetées des feuilles n°1, n°2 et n°3.
- Pour les salles non équipées numériquement, dessiner au tableau les six segments en grand format (pour les dimensions, voir le tableau 3), et découper quelques bandes-étalon de longueur ad hoc.

  Toutes les longueurs (non communiquées aux élèves) des six segments et de la *Bande unité* sont résumées dans le tableau 3.

Tableau 3 - Les longueurs pour les élèves et pour l'enseignant

Les longueurs	***en unité u***	***en format papier***	***en format tableau***
[AB] et segment (2)	$2u + \frac{1}{2}u$	25 cm	100 cm
[CD] et segment (5)	$1u + \frac{3}{4}u$	17,5 cm	70 cm
[EF] et segment (6)	$2u + \frac{1}{8}u$	21,25 cm	85 cm
segment (1)	$1u + \frac{1}{4}u$	12,5 cm	50 cm
segment (3)	$1u + \frac{5}{8}u$	16,25 cm	65 cm
segment (4)	$2u + \frac{3}{8}u$	23,75 cm	95 cm
bande de longueur unité	$1u$	10 cm	40 cm

Objectifs de la séance

- Définir les premières fractions de l'unité : le demi, le quart et le huitième en langue naturelle
- Définir les multiples de ces fractions tels que trois demis ou cinq quarts en langue naturelle
- Établir des premières relations entre ces fractions, toujours en langue naturelle

Déroulement de la séance 1

La séance 1 est composée de trois étapes, suivies d'une synthèse et d'une première institutionnalisation. Il est possible, voire souhaitable, de prévoir un temps de pause (par exemple la récréation), entre les étapes n°1 et 2.

Description des étapes

Étape n°1 - Écriture d'un message (phase "émetteur")

Chaque élève (ou chaque groupe d'élèves) reçoit un segment (feuille n°1), une ou deux bandes de longueur une unité et une feuille émetteur-récepteur (feuille n°2). Sa tâche est d'écrire un message sur la feuille n°2 afin que l'élève qui recevra son message puisse reconnaître, avec les seules informations portées par ce message et une bande de même longueur, la longueur du segment reçu parmi six segments de longueurs différentes (feuille n°3, distribuée en étape 2). La règle graduée reste dans la trousse.

Exemple de consigne :

"Vous avez tous sur vos tables une (ou deux) bande de papier ; elles sont toutes de la même longueur. On peut d'ailleurs le vérifier, comment pourrait-on faire ?[30]

Vous avez également tous un segment dessiné sur la feuille n°1 ; ces segments ne sont pas tous de la même longueur. Certains ont reçu un segment qui se nomme [AB], d'autres un segment qui se nomme [CD], et d'autres un segment qui se nomme [EF].

Sur la feuille n°3 (l'enseignant montre à la classe la feuille n°3 mais ne la distribue pas)*, se cache un segment de la même longueur que le vôtre.*

Sur la feuille n°2, vous allez écrire un message à un camarade pour lui permettre de retrouver le segment identique au vôtre sur la feuille n°3. Votre message doit permettre de trouver, sur la feuille n°3, le segment qui a la même longueur que le vôtre. Je vous rappelle deux choses :

- la règle reste dans la trousse

- vous disposez tous d'une bande de papier de la même longueur."

Il est important, dans la consigne et tout au long de l'activité, de parler de <u>longueur</u> de segment. Contrairement à ce que suggère le titre de la situation, ce n'est pas la bande qui est l'unité de mesure, mais bien sa longueur ; la bande est utilisée comme étalon.

L'enseignant laisse ensuite les élèves travailler sans leur apporter d'autre aide qu'une reformulation éventuelle de la consigne. Il s'assure que les élèves ont bien compris la tâche, et n'intervient pas dans la rédaction des messages, même si ceux-ci sont manifestement faux ou incomplets.

Entre les étapes n°1 et n°2, l'enseignant procède à l'échange des messages. Il est conseillé d'avoir anticipé ces échanges. Il faut veiller en particulier à ce que l'émetteur et le récepteur n'aient pas le même segment, on peut pour cela utiliser le temps de la récréation.

Étape n°2 - Reconnaître un segment (phase "récepteur")

Chaque élève reçoit un message écrit par un camarade (feuille n°2). On distribue alors la feuille n°3 sur laquelle figurent les six segments. Sa tâche, que l'on peut faire rappeler collectivement, est d'identifier, parmi les six segments, celui dont la longueur correspond aux informations fournies par le message, puis d'écrire en retour sa réponse sur le message reçu.

Exemple de consigne :

"Vous venez de recevoir le message d'un camarade et la feuille n°3 (l'enseignant peut montrer à nouveau à la feuille n°3)*. Vous devez retrouver, parmi les six segments de cette feuille, celui dont la longueur vous semble correspondre au message que vous avez reçu.*
Une fois que vous l'avez trouvé, indiquez votre réponse dans la partie "récepteur" de la feuille n°2. Vous pouvez ajouter un commentaire sur le message reçu.
Si vous ne le trouvez pas, écrivez ce qui vous en a empêché sur cette même feuille."

L'enseignant laisse de nouveau les élèves travailler en autonomie. Il procède ensuite à la restitution des messages aux émetteurs.

30 la réponse attendue est : "en juxtaposant les bandes les unes aux autres" ; les voisins proches peuvent le vérifier. Il ne faut surtout pas mesurer la longueur des bandes avec la règle graduée.

Étape n°3 - Validation/invalidation de la réponse reçue (phase “retour à l’envoyeur”)

L’auteur du message, après avoir reçu la réponse du récepteur, valide ou invalide sa réponse en comparant la longueur de son segment avec celui choisi parmi les six. Il peut faire cela par transparence ou en la mesurant avec la bande-étalon.

L’enseignant organise ensuite la mise en commun et la synthèse, puis propose une première institutionnalisation, ce que nous détaillons plus bas. Avant de décrire cette dernière étape conclusive de la première séance, nous développons une analyse des tâches proposées, ainsi que les procédures attendues des élèves.

Analyse des tâches

Pour réussir la première tâche, les élèves sont contraints à :

1) prendre l’initiative de mesurer la longueur d’un segment puisque cela ne leur est pas explicitement demandé ; la consigne n’est pas en effet de mesurer une longueur, mais d’écrire un message[31]
2) mesurer en reportant la longueur d’une unité non conventionnelle, puisque la règle graduée n’est pas autorisée
3) constater que cette unité de longueur ne permet pas d’obtenir un nombre entier de reports
4) trouver un moyen de définir précisément la longueur restante, plus petite que l’unité

Tout l’enjeu de la situation se trouve dans la gestion du point 4 (fig. 13).

Figure 13- Comment caractériser la longueur du petit bout manquant ?

Rappelons que les longueurs des segments[32] proposés sont :

$$AB = 2u + \frac{1}{2}u$$

$$CD = 1u + \frac{3}{4}u = 1u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$$

$$EF = 2u + \frac{1}{8}u$$

Soit, en visualisant leur longueur par rapport à celle de la bande-étalon (fig. 14) :

31 Leur demander de mesurer les segments baisse considérablement le niveau de la tâche, qui n’a plus le même impact sur les élèves. C’est le choix de la ressource Access.

32 Ces informations ne sont évidemment pas données aux élèves, elles n’auraient d’ailleurs aucun sens à ce stade.

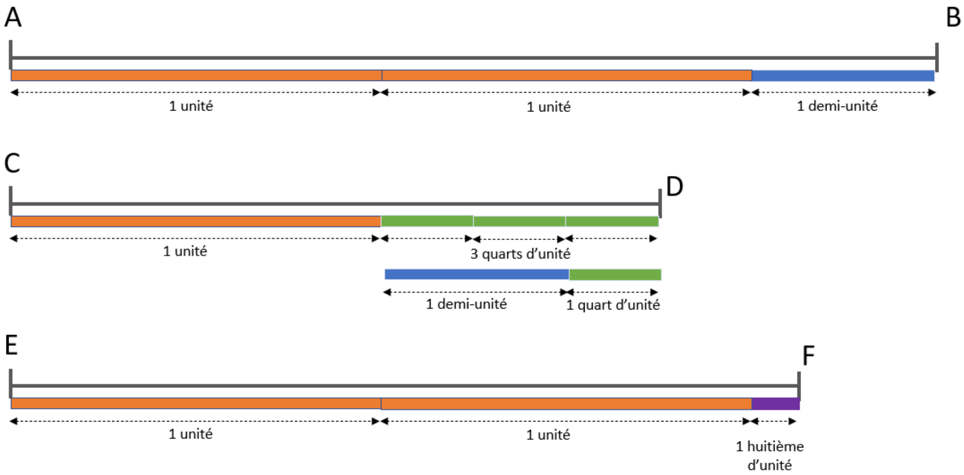


Figure 14 - Les longueurs des trois segments, mesurées avec la bande étalon

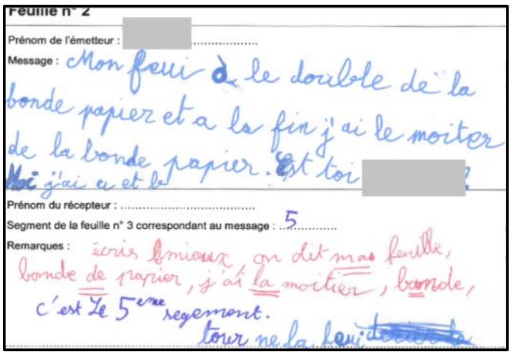
La technique visée est le pliage de la bande de papier en deux, en quatre ou en huit pour obtenir et décrire cette longueur manquante, ce qui permettra en synthèse de définir les longueurs demi-unité, quart d'unité et huitième d'unité, et organiser ainsi une première rencontre avec les fractions.

Notons que la détermination des longueurs est de difficulté inégale, ce qui permet à l'enseignant de différencier le début de l'activité en fonction du niveau de ses élèves. En effet, il suffit de plier une seule fois la bande pour déterminer la longueur de [AB], alors qu'il faut la plier une seconde fois pour déterminer celle de [CD] et une troisième fois pour [EF]. A l'issue des échanges, tous les élèves auront été confrontés à au moins deux types de longueurs.

Les productions attendues ressemblent alors aux messages suivants :

Exemples de messages réussis mobilisant spontanément le concept de fraction de l'unité

- **Pour le segment [AB]**


Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : [redacted] ....

Message : Mon feui à le double de la bonde papier et a la fin j'ai le moiter de la bonde papier. Est toi [redacted] ?
Moi j'ai a et la

Prénom du récepteur : ....

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : 5..............

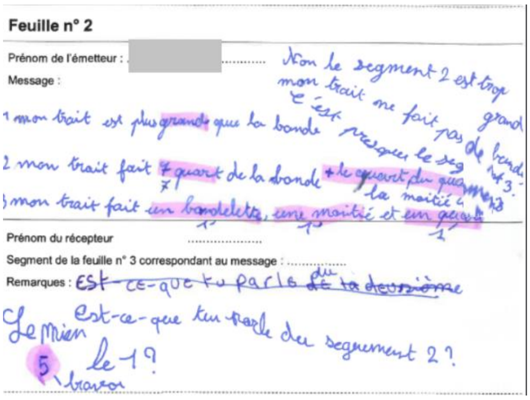
Remarques : écris mieux, on dit ma feuille, bande de papier, j'ai la moitier, bande,
c'est le 5ème segement.
tour ne la feui

Figure 15 - Message décrivant la longueur AB

Nous pouvons voir dans ce message la notion de double et de moitié, qui sont bien connus des élèves. Les informations sont suffisantes pour trouver le bon segment.

On peut voir également que les élèves se prennent au jeu de la communication ; ici, le récepteur se permet quelques critiques sur la syntaxe de l'émetteur.

- **Pour le segment [CD]**


Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : [redacted]

Message :

1 mon trait est plus grand que la bande

2 mon trait fait 7 quart de la bande

3 mon trait fait une bandelette, une moitié et un quart

Non le segment 2 est trop grand mon trait ne fait pas de bande

Prénom du récepteur

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message :

Remarques : ~~Est-ce que tu parle de ta deuxième~~

Est-ce-que tu parle du segment 2 ?

Le mien le 1 ?

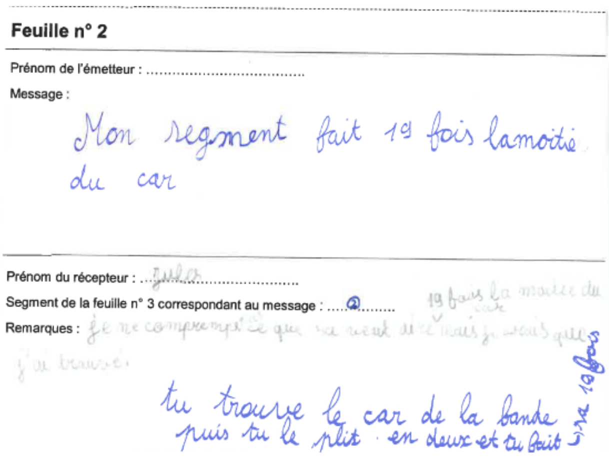
5 bravo

Figure 16 - Message décrivant la longueur CD

Nous pouvons voir un vrai travail de communication entre les deux élèves. Après la question en 3 parties (l'émetteur écrit le message sous forme de charade), le récepteur donne une réponse dont il n'est pas très sûr (« *Est-ce que tu parle(s) du segment 2 ?* »), puisqu'il ignore sans doute ce que signifie moitié et quart. La réponse n'est pas validée par l'envoyeur (haut du message), qui précise (« non, le segment 2 est trop long … »).

L'émetteur passe aisément d'une expression à une autre : "7 quarts" ou "un, une moitié et un quart". On voit qu'il n'y a pas de difficulté conceptuelle à parler de 7 quarts, qui est aussi naturel que 3 quarts.

- **Pour le segment [EF]**


Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : ....

Message :

Mon segment fait 19 fois la moitié du car

Prénom du récepteur :

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : 4

Remarques :

tu trouve le car de la bande puis tu le plit en deux et tu fait 19 fois

Figure 17 - Message décrivant la longueur EF

Le mot "huitième" n'est pas connu des élèves, sa définition est l'un des enjeux de cette activité. Encore une fois, on voit un échange entre les élèves (fig.17). L'émetteur a bien utilisé une nouvelle unité de mesure de longueur : « *la moitié du car* [sic] » puisqu'il compte avec (« *19 fois* »). L'enjeu de la situation pour cet élève sera d'apprendre comment appeler ce nouveau nombre.

Exemple de messages réussis sans mobilisation du concept de fraction de l'unité

La situation est conçue pour que les fractions de l'unité *demi*, *quart* et *huitième* interviennent comme outil[33] pour résoudre le problème posé par la détermination du petit bout manquant, même si elles ne

[33] au sens de Douady (voir partie 1.A)

sont pas encore nommées ainsi. Il est toutefois possible de contourner cette intention en dessinant un segment de longueur égale au bout manquant (fig.18) Il arrive parfois qu'un élève pense à cette solution, certes efficace, mais qui contourne l'objectif visé d'apprentissage. Ces messages restent heureusement peu nombreux.

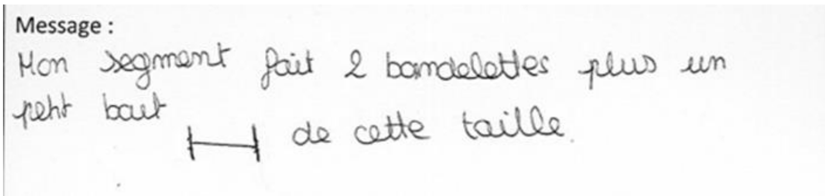


Figure 18 - Un message efficace de description de la longueur AB, en contournant l'utilisation d'une fraction

Exemple de messages qui ne permettent pas de trouver le bon segment

En revanche, beaucoup de messages ne permettent pas de trouver le bon segment. En voici un exemple (fig. 19) :

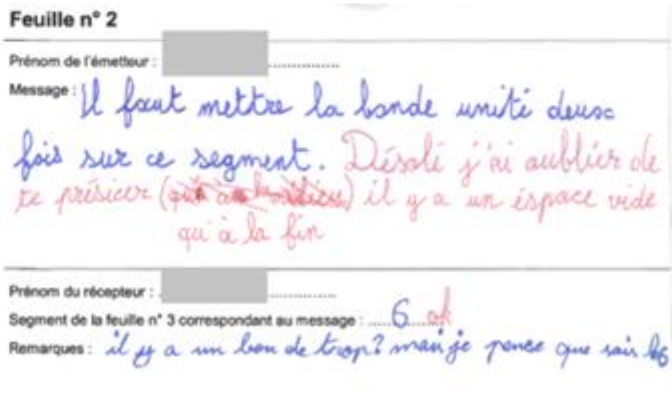


Figure 19 - Message ne décrivant pas la longueur du "petit bout" manquant

Le bout manquant n'est pas correctement identifié. Ceci est normal et attendu, ce n'est pas un échec de la situation. Cela permet de faire naître un besoin : comment réussir à me faire comprendre de mon camarade ? Pour l'élève qui parvient à s'exprimer, ce besoin sera d'une autre nature : comment faire pour que mon camarade me comprenne ?

On voit qu'ici, après l'échange entre les deux élèves, est apparu "*un espace vide*" (fig.19), dont on prend conscience qu'il est nécessaire de définir sa longueur. Le problème apparaît ainsi clairement aux élèves.

Il est alors temps d'organiser la synthèse et le premier temps d'institutionnalisation.

Étape n°4 - Mise en commun, synthèse et première institutionnalisation

Mise en commun

La tâche de l'enseignant est maintenant de faire émerger les raisons de la réussite et de l'échec de certains messages choisis, en dégageant la nécessité de décrire précisément le petit bout manquant. On conclura la séance en institutionnalisant la définition et le nom de nouveaux objets appelés fractions.

Notons qu'il peut être plus confortable de reporter la mise en commun, afin d'avoir le temps d'étudier les messages et de choisir ceux permettant de la structurer. En effet, il n'est pas nécessaire de présenter plusieurs fois le même type de message à la classe, mais il est parfois délicat de les repérer en temps réel. Il peut s’avérer également utile d’agrandir les messages choisis à l’aide d’un visualiseur ou d’une photocopieuse.

Un premier travail de validation est conduit à propos du segment [AB], en commençant par un ou deux messages qui n’ont pas permis de trouver le bon segment ; les élèves doivent d’eux-mêmes formuler la difficulté, à savoir que la longueur du bout manquant n’a pas été assez précisément définie.

La mise en commun doit être rapide et rythmée. A chaque message présenté à la classe, il faut tirer une courte conclusion permettant de passer au message suivant.

Deux procédures de mise en commun sont possibles :

1. laisser le tri des messages choisis aux élèves : présenter les messages choisis de façon non organisée et les laisser choisir et justifier leur choix. Cette procédure est plus longue, mais les implique davantage.
2. laisser le tri des messages choisis à l’enseignant : il les ordonne selon leur intérêt pour la classe et les propose aux élèves en gardant pour la fin le message représentant le mieux l’objet de l’institutionnalisation

La problématique étant de faire émerger qu’il y a un petit bout qu’on ne peut pas mesurer avec la bande étalon, comment peut-on le décrire de façon efficace ? Avec les quelques exemples vus précédemment, on peut rencontrer plusieurs types de propositions.

On commence par présenter une ou deux propositions qui mènent à une impasse :

- “un p’tit bout”
- une “moitié” pour signifier que c’est l’une des deux parties qui font la bande entière, même si elles ne sont pas d’égale longueur
- une mesure évaluée à l'œil en “centimètre” ou après avoir reproduit des “centimètres” sur la *Bande unité*
- une mesure avec la longueur d’un étalon non partagé par l’ensemble de la classe : un pouce, un crayon, etc.
- une mesure avec la largeur de la bande étalon[34]

Puis on présente les propositions menant à une solution efficace :

- dessiner un trait dont la longueur correspond à celle du petit bout manquant
- expliquer la procédure de pliage en deux en utilisant du vocabulaire courant, comme “j’ai plié en deux”
- exprimer la longueur qui reste en utilisant des termes liés aux fractions comme moitié (fig. 15), parfois demi, et même parfois quart (comme dans les figures 16 et 17 mais ce mot n’intervient pas pour traiter la longueur du segment [AB])

Ce sont les deux derniers points qui seront l’objet de l’institutionnalisation.

Comme solution collective à la classe, on peut retenir que la longueur du segment [AB] est égale à deux unités et une demi-unité, voire cinq demi-unités ou cinq fois une demi-unité, si ces dernières propositions ont émergé dans la classe.

34 cette dernière procédure peut être éliminée en donnant des bandes de largeur différente

On procède de la même façon avec les segments [CD] et [EF], avec les évolutions suivantes :

- lorsque l'on déplie la bande qui a été pliée en deux, puis encore en deux, on constate qu'elle est partagée en 4 morceaux de même longueur ; la longueur d'un morceau est alors appelé un quart d'unité, et l'enseignant montre qu'en reportant 4 fois ce quart d'unité, on obtient à nouveau l'unité entière
- de même, lorsque l'on plie la bande en deux, puis encore en deux, puis encore en deux, on peut demander aux élèves de deviner en combien de morceaux sera partagée la bande lorsqu'on la déplie ; beaucoup pensent que la réponse est 6. On vérifie ensuite qu'elle est partagée en 8 morceaux, tous de la même longueur (il est important d'insister sur ce point) et on appelle la longueur d'un petit morceau un huitième d'unité ; on plie de nouveau la bande en 8, et on demande aux élèves combien de fois il faut reporter cette longueur pour obtenir la longueur unité. On valide ensuite la réponse en effectuant effectivement les 8 reports.

On peut retenir les deux formulations suivantes :

- le segment [CD] a pour longueur 1 unité, 1 demi-unité et 1 quart d'unité, ou encore 1 unité et trois fois 1 quart d'unité (plus rare)
- le segment [EF] a pour longueur 1 unité et 1 huitième d'unité

Attention : il est important d'oraliser ces formulations ; si elles sont écrites, elles le sont en langue naturelle ; nous pensons que l'écriture fractionnaire est à ce stade prématurée[35].

Les solutions prennent la forme de schémas du type de la figure 20 :

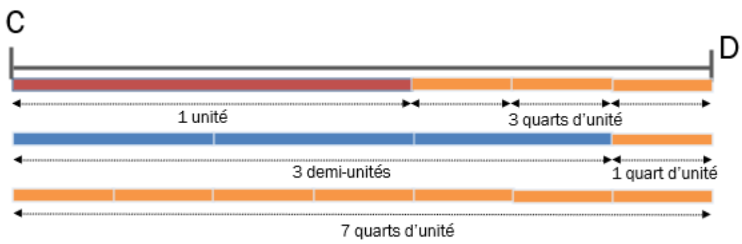


Figure 20 - Différentes expressions de la longueur CD

Synthèse et début d'institutionnalisation

La synthèse se distingue de l'institutionnalisation : elle se construit avec les élèves, à partir de leurs propositions, elle comprend la solution du problème et résume ce qu'il est important de retenir de cette activité.

L'institutionnalisation est à la charge entière de l'enseignant, c'est l'exposition du savoir mathématique à apprendre[36]. C'est traditionnellement ce que l'on devrait retrouver dans les manuels, dans le cahier de leçons, ou dans les affiches murales. L'institutionnalisation étant un processus, chaque moment d'institutionnalisation est une évolution par rapport au précédent ; il peut être court et fréquent.

Lors de la synthèse, on peut par exemple soulever les points suivants :

---

[35] voir partie 2.B.2.

[36] voir partie 1.B.3.

- pour comprendre et utiliser les mesures de longueurs écrites dans les messages, il est nécessaire de disposer d'une unité commune à toute la classe
- la mesure d'une longueur ne "tombe pas toujours juste" (verbalisation "élève"), ce qui peut être reformulé par l'enseignant ainsi : la mesure d'une longueur n'est pas toujours un nombre entier (d'unités)
- pour décrire une longueur plus petite que l'unité, il faut se mettre d'accord sur une définition précise.

Les premiers éléments d'institutionnalisation (en gras dans le texte) sont apportés, d'abord à l'oral :

> *Quand on plie la bande de longueur 1 unité en deux (parties égales), on obtient une bande plus petite, de longueur la moitié d'une unité ;* ***quand on reporte[37] cette longueur deux fois*** *(on fait le geste de report en même temps),* ***on obtient l'unité entière*** *; on appelle cette nouvelle longueur une* ***demi-unité****.*
>
> *Quand on plie une nouvelle fois la bande en deux, on obtient la moitié de la moitié de l'unité.* ***Cette longueur, reportée 4 fois, donne l'unité ; on l'appelle le "quart d'unité". C'est la moitié de la moitié*** *(de l'unité).*
>
> *quand on la plie encore en deux, on obtient la moitié du quart de l'unité.* ***Cette longueur, reportée 8 fois, donne l'unité ; on l'appelle le "huitième d'unité"****.*

Institutionnalisation écrite 1.1

Dans un premier temps, des institutionnalisations qui n'utilisent pas l'écriture fractionnaire peuvent être proposées, notamment sous forme d'affichage auquel les élèves pourront se référer pour les situations suivantes. Par la suite, les institutionnalisations feront apparaître l'écriture fractionnaire, mais elles resteront accompagnées le plus possible d'une verbalisation.

Enfin, on rappelle que les écrits d'institutionnalisation sont représentatifs de ce qui a été vu en classe, les rendant tous différents et à adapter selon les habitudes de l'enseignant. La proposition ci-dessous est donc présentée à titre d'exemple, sans contrainte d'utilisation et pouvant être modifiée.

L'important est d'insister sur la relation fondamentale entre une fraction (de l'unité) et l'unité elle-même, et y revenir sans cesse, en variant les formulations. Par exemple, pour la fraction *un demi* :

- une demi-longueur, reportée deux fois, est égale à l'unité
- une demi-unité est deux fois plus petite que l'unité
- il faut deux demi-unités pour faire une unité
- …

[37] Nous insistons sur le fait qu'il s'agit de reporter une longueur, et non de compter les « morceaux » successifs de la bande de papier. Nous pouvons renvoyer le lecteur vers une activité de Nouvelle-Zélande (Vale, Graven, Visnovska et Ford, 2019), dont l'objectif est le même, mais qui construit la longueur « un demi », non à l'aide d'une bande de papier pliable, mais à l'aide d'un bâton qu'il faut rompre ; c'est en faisant plusieurs essais de report que l'on finit par construire la longueur « un demi » ; la définition est ainsi en action : on obtient cette longueur lorsque, reporté deux fois, elle revient à la longueur principale.

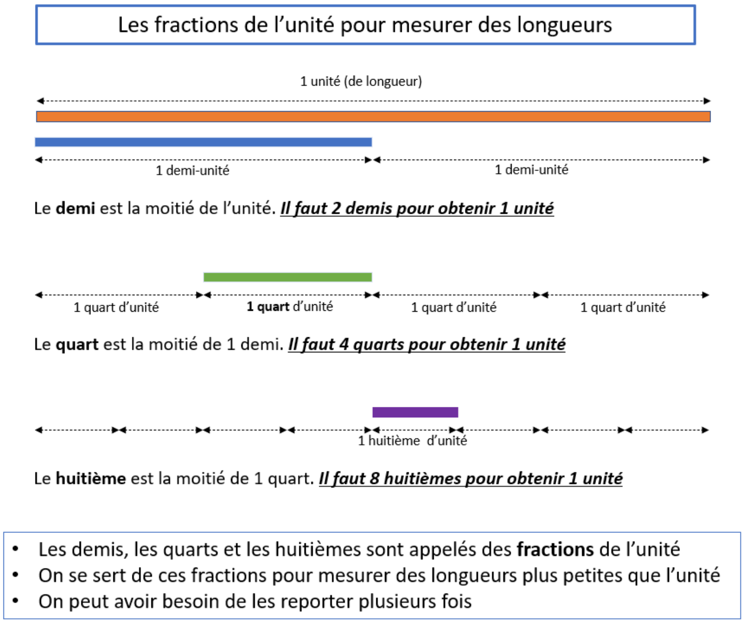


Figure 21 – Institutionnalisation n°1.1 : les fractions de l'unité

Séance 1 bis - (30 min)

Après cette première institutionnalisation, refaire la situation *Bande unité* à l'identique semble pertinent. Cela permet en effet aux enfants de mieux réussir à s'exprimer, et de réutiliser leurs nouvelles connaissances dans un contexte maintenant familier. On prendra soin de donner un segment de longueur différente aux enfants ayant déjà réussi la première situation. La mise en commun est plus rapide car elle s'appuie sur les éléments institutionnalisés lors de la première séance. De plus, la correction n'est pas nécessaire puisqu'elle a déjà eu lieu. En revanche, c'est l'occasion de proposer une nouvelle façon d'écrire les fractions, en langage mathématique cette fois.

Avec grande précaution[38], on introduit l'écriture fractionnaire par la nécessité d'écrire de façon plus pratique des relations entre les fractions. Par exemple, comment peut-on rendre compte en écriture symbolique des relations telles que :

deux demis sont égaux à un ou *deux quarts sont égaux à un demi*

En prenant exemple sur *un demi*, on souligne que cette nouvelle écriture doit rendre compte de sa définition, que l'on peut demander aux élèves de rappeler, au choix :

- "c'est la moitié de l'unité"
- "il en faut deux pour faire une unité"
- "deux fois un demi, ça fait un", …

Le point commun de toutes ces définitions est qu'elles explicitent une relation entre *un* et *un demi*, et que cette relation est "*deux fois*".

38 L'écriture fractionnaire est une réelle difficulté, à dissocier de la définition même des fractions. Pour davantage de détails, voir la partie 2.B.2.

L'écriture rend compte de ce lien, en utilisant les deux nombres *un* et *deux*. On prévient les élèves que le choix a été fait d'une écriture verticale mais que cela aurait pu être autrement. On écrit au tableau, en oralisant en même temps :

$\frac{1}{2}$ oralisé *un demi*

On demande ensuite aux élèves comment on pourrait écrire *un quart* et *un huitième*. On récolte les propositions, c'est l'occasion de vérifier si la logique de l'écriture fractionnaire est bien comprise[39].

Avec ces nouvelles écritures, on peut ensuite réécrire les longueurs des segments [AB], [CD] et [EF], en demandant d'abord aux élèves de le faire. Pour [AB], la trace écrite peut alors être :

$$AB = 2u + \frac{1}{2}u \quad \text{ou} \quad AB = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad AB = 5 \times \frac{1}{2}$$

L'écriture multiplicative $5 \times \frac{1}{2}$ est à privilégier par rapport à l'écriture additive $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ car elle met l'accent sur le rapport multiplicatif entre $\frac{1}{2}$ et le futur $\frac{5}{2}$ (cette écriture n'existe pas encore à ce stade).

Institutionnalisation écrite 1.2

Il semble important de travailler dans un premier temps uniquement avec les fractions unitaires, afin de bien ancrer leur définition et leur écriture fractionnaire. L'extension de cette écriture aux multiples de ces fractions, tels que *3 quarts*, ou *5 demis*, viendra dans la deuxième séance.

Ainsi, on peut proposer un complément de l'institutionnalisation n°1 qui ressemblerait à ceci (fig. 22) :

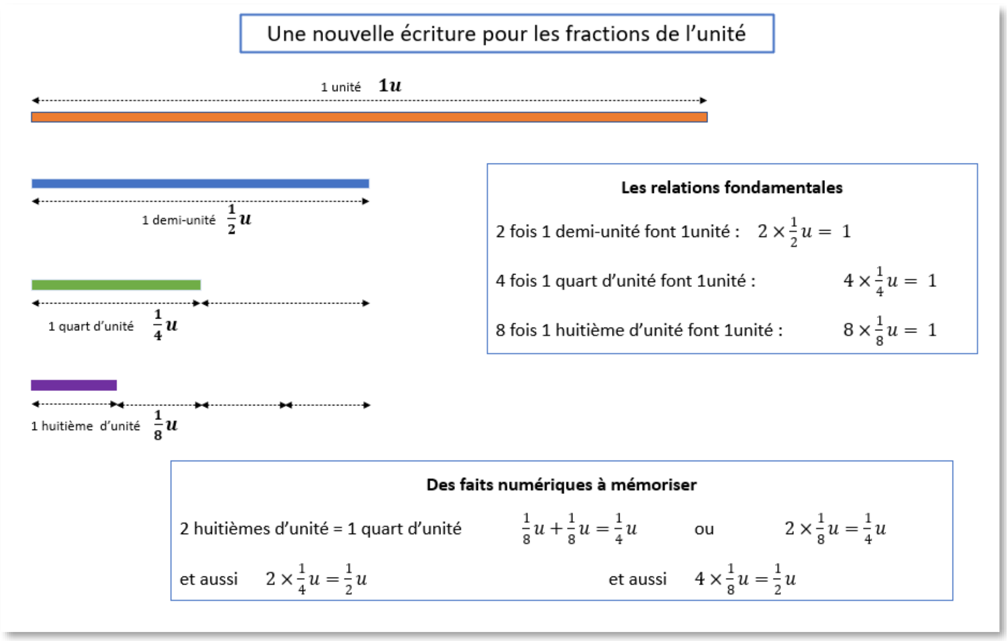


Figure 22 – Institutionnalisation n°1.2 : une nouvelle écriture symbolique pour les fractions de l'unité

39 Pour les enseignants aventureux, on pourrait laisser davantage d'initiative aux élèves, en leur demandant de proposer eux-mêmes, d'inventer une écriture qui pourrait dire "un demi", avant de leur montrer l'écriture fractionnaire. Nous n'avons pas encore testé cette idée à l'heure où nous publions.

Séance 2 (20 min)

Matériel

Pour chaque élève

- Un exemplaire de la feuille n°3
- Des bandes de longueur 1 unité en nombre suffisant : l'élève doit pouvoir en utiliser une autre s'il a trop abîmé la sienne

Pour l'enseignant (pour la mise en commun et la synthèse)

- Une version agrandie de la feuille n°3 (vidéo projetée ou affichée)
- une bande étalon agrandie affichée au tableau (dans le cas d'une projection, bien vérifier les dimensions de celle-ci.

Objectifs de la séance

- Utiliser les fractions nouvellement découvertes pour mesurer la longueur de segments
- Étendre l'écriture fractionnaire aux multiples des fractions unitaires
- Constater que pour un même segment de longueur donnée, plusieurs écritures sont possibles
- Donner une nouvelle opportunité aux élèves de consolider le sens et l'utilité des fractions pour exprimer des longueurs

Pour mémoire, les segments (2), (5) et (6) ont déjà été mesurés lors des séances précédentes.

Déroulement de la séance 2

Chaque élève mesure la longueur de tous les segments de sa feuille n°3 avec sa bande de longueur 1 unité et exprime cette longueur en utilisant la nouvelle écriture fractionnaire. En différenciation, on demandera aux élèves les plus rapides de trouver différentes façons d'écrire ces longueurs.

Exemple de consigne :

> *"Cette fois, vous allez devoir mesurer les longueurs de tous les segments de la feuille n°3* (la montrer). *L'unité est la longueur de la bande de papier. Je vous rappelle que toutes les bandes de papier ont la même longueur."*

Lors de la mise en commun, l'enseignant saura être attentif aux traits de construction nécessaires pour les différents reports de longueur. On pourra ainsi découvrir que, pour un même segment, selon que les élèves aient ou non utilisé la bande entière, certains auront moins de traits de constructions que d'autres. Par exemple, la longueur du segment (1) peut être mesurée en reportant cinq fois un quart (4 traits), ou une fois l'unité puis une fois un quart (1 trait). Cela se traduit par une écriture différente. Respectivement, les élèves auront pu écrire :

$$5 \times \frac{1}{4}\,u \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u \qquad \text{ou} \qquad 1u + \frac{1}{4}u$$

Cela permet à la classe de découvrir que ces différentes écritures expriment une même longueur.

C'est alors le moment d'introduire la façon d'écrire $5 \times \frac{1}{4}\,u$ plus facilement. On propose avec précaution l'écriture $\frac{5}{4}$. Il faudra bien insister en langage oral : **5 quarts, c'est 5 fois un quart**.

L'écriture multiplicative est à privilégier par rapport à l'écriture additive, car, non seulement elle est plus efficace, mais elle permet d'expliciter la relation :

5 quarts de l'unité est une longueur 5 fois plus grande que 1 quart de l'unité

On peut demander aux élèves de proposer de nouvelles écritures pour les longueurs déjà écrites, afin de vérifier qu'ils ont compris la logique de cette nouvelle écriture. Le plus longtemps possible, il faudra insister sur l'équivalence entre $\frac{5}{4}$ et $5 \times \frac{1}{4}$, entre *cinq quarts* et *cinq fois un quart*.

Institutionnalisation écrite 2

L'institutionnalisation portant cette fois-ci sur les écritures des fractions, on peut ne pas mentionner l'unité u, bien que l'on soit toujours dans le contexte des mesures de longueur (fig. 23).

Il convient de distinguer les fractions de l'unité (de nouvelles unités pour compter), dont l'écriture apparaît en premier, de leurs multiples, dont l'écriture est un condensé qui sous-entend une multiplication[40].

L'écriture multiplicative est mise en avant, afin d'insister sur la relation fondamentale $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, qui n'est pas du calcul, mais une définition.

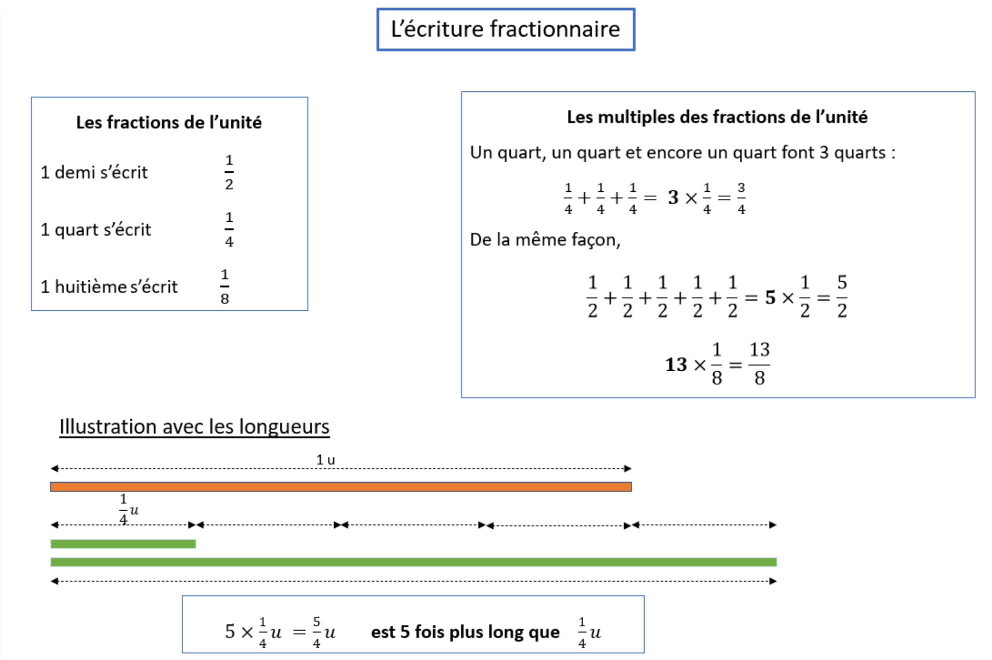


Figure 23 - Institutionnalisation n°2 - L'écriture fractionnaire

40 de la même façon que 54 est une écriture condensée de « 5 dizaines 4 unités », et signifiant 5 **fois** 1 dizaine et 4 **fois** 1 unité

Et la solution de l'activité peut rester affichée en classe, sous cette forme, par exemple :

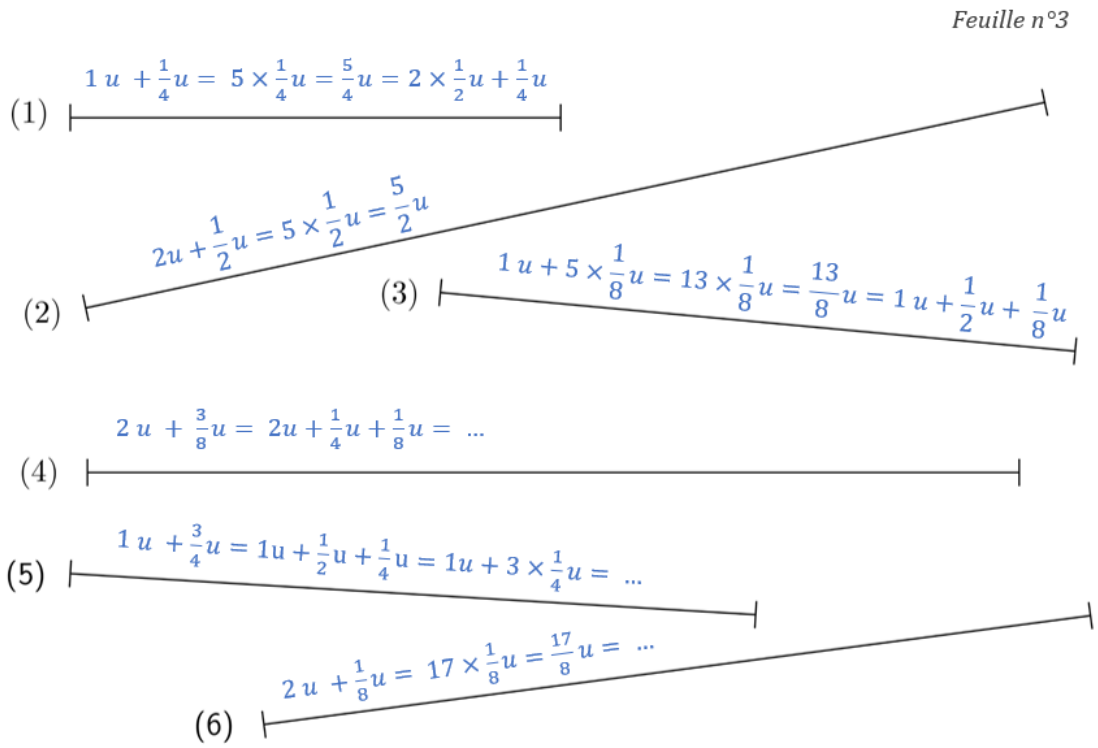


Figure 24 - La correction de la séance 2 : différentes écritures pour une même longueur

On peut dès lors proposer quelques activités d'entraînement décontextualisées, portant spécifiquement sur l'utilisation de ces écritures et sur les différentes relations entre ces premières fractions, telle la fleur des nombres, des dictées de fractions, le jeu du furet… lors des rituels de mathématiques. Cela permet par exemple d'entraîner : trois quarts, c'est trois fois un quart. Deux quarts c'est un demi, donc trois quarts c'est un demi et encore un quart.

Séance 3 (40 min)

Matériel

- une feuille sur laquelle est dessinée une demi-droite d'origine 0, suffisamment longue pour supporter un report de 3 unités de longueur de bande.
- une ou plusieurs bandes de longueur 1 unité (non nécessairement égale à celle des séances précédentes)
- une bande plus grande pour le tableau lors des phases collectives (en l'absence de visionneuse)

Objectifs de la séance

- Placer des points à une distance donnée d'un point
- Entraîner à la transformation d'écritures fractionnaires
- Préparer à l'usage de la droite graduée

Déroulement de la séance 3

Les élèves reçoivent la feuille où est dessinée une demi-droite. Si c'est la première fois qu'ils rencontrent cet objet (et ce mot), préciser qu'il s'agit d'une ligne droite qui a une extrémité (une origine), et que l'on peut prolonger autant que l'on veut de l'autre côté (comme une droite, mais d'un seul côté)[41]. Ici, le point d'origine est nommé O.

Les élèves doivent placer sur cette demi-droite trois points, A, B et C, tels que :

$$OA = 1u + \frac{5}{4}u \qquad OB = 2u + \frac{2}{4}u \qquad OC = \frac{5}{2}u + \frac{1}{8}u$$

ce qui donne des points volontairement rapprochés (fig. 24)

Figure 25 - Les points A, B et C placés sur la demi-droite

Exemple de consigne :

"Vous disposez à nouveau tous d'une bande de longueur 1 unité.

Sur la demi-droite d'origine le point O, vous devez placer un premier point A tel que la distance entre le point O et le point A soit égale à une unité et cinq quarts de l'unité (écrire en même temps au tableau $OA = 1u + \frac{5}{4}u$).

Quand vous aurez placé le point A, vous devrez placer, sur cette même demi-droite, un deuxième point B, tel que la distance entre le point O et le point B soit égale à deux unités et deux quarts de l'unité (écrire en même temps au tableau $OB = 2u + \frac{2}{4}u$).

Enfin, vous placerez un troisième point, que l'on appellera C, tel que la distance entre le point O et le point C soit égale à cinq demis unités et un huitième de l'unité (écrire en même temps au tableau $OC = \frac{5}{2}u + \frac{1}{8}u$)*."*

Analyse de la tâche

Cette tâche est une évolution de la première situation, elle en garde le contexte : la mesure de longueur avec une unité non conventionnelle, mais elle inverse la consigne ; il ne s'agit plus de mesurer des segments déjà tracés, mais de tracer des segments de longueur donnée ; ou plus exactement, de placer des points à une distance donnée, ce qui n'est pas exactement la même chose, nous allons y revenir[42].

---

41 Si c'est la première fois que les élèves rencontrent une demi-droite graduée, et des écritures comme OA pour évoquer la longueur entre deux points, il peut être intéressant de faire une activité utilisant uniquement des entiers avant d'aborder cette séance

42 On peut d'ailleurs au préalable entraîner les élèves les plus en difficulté à tracer des segments de longueur donnée avec des questions courtes du type : "tracer un segment de longueur $1u + \frac{3}{4}u$" (1 unité et trois quarts de l'unité)

Elle permet de travailler trois savoirs mathématiques :

- la distance entre deux points
- la transformation d'écritures fractionnaires
- la position d'un point sur une droite graduée

Distance entre deux points

La notion de distance entre deux points est sans doute connue des élèves, il est important de la mettre en lien avec la longueur d'un segment. Ici, les segments [OA], [OB] et [OC] sont tous imbriqués (et donc peu visibles pour des élèves). La figure 25 est plus complexe que la figure 26 ci-dessous, et c'est ce qui en fait l'intérêt, car elle prépare à la notion de position d'un point sur une droite graduée.

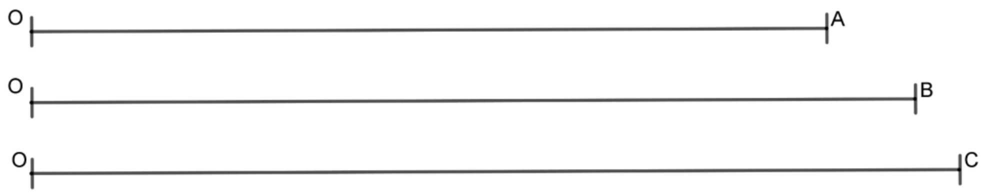


Figure 26 - Les trois segments séparés les uns des autres

Il convient de souligner l'équivalence entre les deux expressions distance entre les points O et A et longueur du segment [OA], qu'illustre la figure 27 :

Figure 27 - Illustration de la distance entre deux points (en haut) et de la longueur d'un segment (en bas)

Position d'un point sur une demi-droite graduée

Dans l'activité qui nous occupe, les segments [OA], [OB] et [OC] sont imbriqués les uns dans les autres.

Ceci va poser un problème (voulu) pour marquer les longueurs de ces segments sur la droite graduée. On pourrait choisir une solution du type de la figure 28.

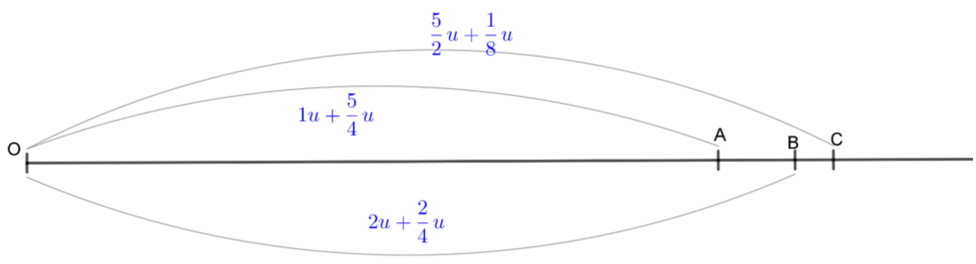


Figure 28 - Solution avec indication des longueurs des segments

Mais son manque de visibilité (ou son côté un peu "chargé") permet de proposer aux élèves une solution plus pratique (fig. 29) : placer les mesures des longueurs au bout de chaque segment, soit en dessous de chacune des extrémités A, B et C.

Figure 29 - Solution avec indication des positions des points

Ainsi, on prépare (sans le dire) la notion d'abscisse d'un point, qui correspond à la distance de ce point à l'origine[43]. On pourra retenir :

> **Sur une droite graduée, on marque la position d'un point par un nombre qui indique sa distance à l'origine de la droite. C'est aussi la longueur de tout le segment depuis l'origine.**

Et ainsi, faire le parallèle avec les nombres indiqués sur la règle graduée.

Équivalence d'écritures fractionnaires

Les longueurs proposées permettent, à dessein, différentes procédures. Par exemple, pour placer le point A, on peut :

- reporter la longueur de la bande une fois, puis la plier en quatre pour obtenir une longueur de $\frac{1}{4}u$, et reporter ensuite cette petite longueur 5 fois.
- raisonner de la façon suivante : "5 quarts, c'est 4 quarts et encore 1 quart ; or, 4 quarts font 1". On reporte alors 2 fois la longueur 1 unité, et 1 fois seulement la longueur 1 quart de l'unité, ce qui est plus économique.

Ainsi, lors de la mise en commun, on prendra soin de noter toutes les techniques qui ont émergé, et d'en demander éventuellement d'autres.

Il n'y a rien de nouveau à institutionnaliser, mais on peut garder la correction finale de l'activité sous la forme de la figure 30 :

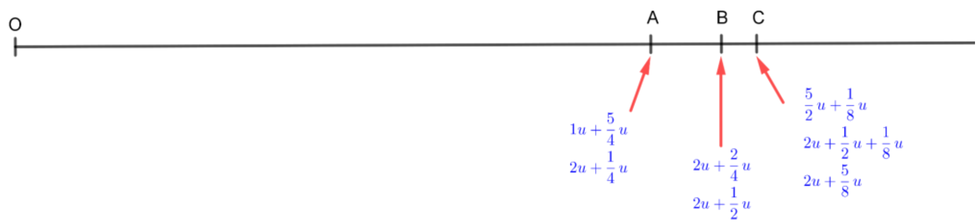


Figure 30 - Solution avec différentes écritures pour les positions des points

43 Dans l'idéal, cette notion est déjà travaillée au cycle 2, car c'est elle qui permet de comprendre l'usage d'une règle graduée.

Séance 4 (40 min)

Matériel

- une ou plusieurs bandes de longueur 1 unité (mais à ne pas distribuer immédiatement, ni nécessairement à tous les élèves)

Objectifs de la séance 4

- Entraîner à la transformation d'écritures fractionnaires
- Décontextualiser les écritures fractionnaires de la situation de référence

Déroulement de la séance 4

Les élèves reçoivent la consigne suivante :

> "*Avec une bande de longueur 1 unité, j'ai mesuré les longueurs de 6 segments.*
> *J'ai trouvé :*
>
> $OA = 1u + \frac{5}{2}u$ $\qquad$ $OB = \frac{7}{2}u$ $\qquad$ $OC = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$
>
> $OD = \frac{10}{4}u$ $\qquad$ $OE = 2u + \frac{7}{8}u$ $\qquad$ $OF = 1u + \frac{15}{8}u$
>
> *Vous devez chercher le segment le plus court, le segment le plus long, et préciser s'il existe des segments de même longueur*."

Les élèves ne disposent plus nécessairement de la bande pour effectuer leurs recherches. En tout cas, c'est la première activité qui ne nécessite pas son emploi. Il s'agit maintenant de se détacher progressivement de la situation de référence, en anticipant si possible le résultat des manipulations. On peut bien-entendu proposer la bande aux élèves qui le souhaitent, tout en insistant sur le fait qu'ils devront, à terme, réussir ce type de tâche sans l'aide de la bande. Il est tout de même conseillé de s'aider d'un schéma.

Lors de la mise en commun, la manipulation reste souhaitable pour appuyer certains raisonnements d'élèves, afin qu'ils soient accessibles à tous.

Les fractions proposées telles que $\frac{10}{4}$ ou $\frac{15}{8}$ sont propices à décourager toute velléité de manipulation et d'encourager la schématisation et les raisonnements fondés sur les relations fondamentales du type :

A chaque fois que l'on a 4 quarts de l'unité, on obtient 1 unité

Ainsi, par exemple, la transformation suivante est justifiée par cette relation:

$$\frac{10}{4}u = \frac{4}{4}u + \frac{4}{4}u + \frac{2}{4}u = 1u + 1u + \frac{2}{4}u = 2 + \frac{2}{4}u$$

On peut encore simplifier l'écriture en utilisant le fait mémorisé : $\frac{2}{4}u = \frac{1}{2}u$, en verbalisant toujours :

Deux quarts (d'unité) sont égaux à une demi-unité

Et l'on obtient $2u + \frac{1}{2}u$, expression qui correspond au minimum de reports.

Il convient de prendre appui sur une représentation telle que la figure 31 pour illustrer ce raisonnement en langue naturelle.

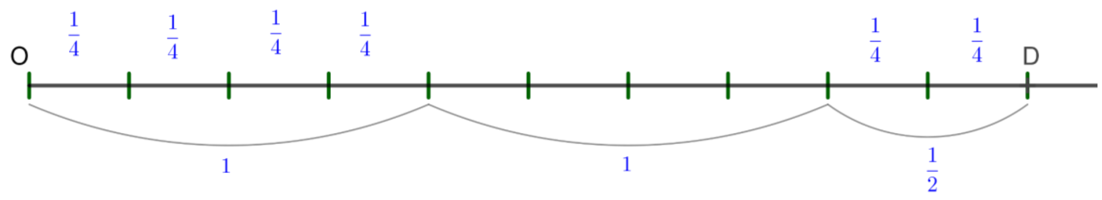


Figure 31 - longueur OD : reports permettant de transformer l'écriture $\frac{10}{4}u$

Si la problématique du minimum de reports se présente dans la classe, on pourrait institutionnaliser par exemple :

On appelle écriture simplifiée, l'écriture qui correspond au minimum de report. Cette écriture simplifiée permet de comparer plus vite les longueurs entre elles.

On peut noter que l'écriture simplifiée n'est pas nécessaire pour comparer toutes les longueurs. Voici quelques exemples :

- *exemple 1*

$$OF = 1u + \frac{15}{8}u = 1u + \frac{8}{8}u + \frac{7}{8}u = 2u + \frac{7}{8}u$$

Cette transformation suffit à prouver que les longueurs OF et OE sont égales.

- *exemple 2*

$$OD = \frac{10}{4}u = 2 \times \frac{4}{4}u + \frac{2}{4}u = 2u + \frac{2}{4}u = 2u + \frac{1}{2}u$$

Cette transformation suffit à prouver que OD est plus petite que OC car $OC = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$

- *exemple 3*

$OC = 2u + \frac{3}{4}u$, ce qui permet de la comparer avec OD sous la forme $2u + \frac{2}{4}u$

Il s'agit d'accepter toutes les écritures et tous les raisonnements qui permettent d'effectuer des comparaisons.

On pourra garder comme solution la trace suivante (tableau 4), qui insiste sur les transformations d'écriture :

Tableau 4 - Transformation des écritures des longueurs afin de les comparer

$OA = 1u + \frac{5}{2}u = 3u + \frac{1}{2}u$	$OB = \frac{7}{2}u = 3u + \frac{1}{2}u$	$OC = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$
$OD = \frac{10}{4}u = 2u + \frac{1}{2}u$	$OE = 2u + \frac{7}{8}u$ $2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}u$	$OF = 1u + \frac{15}{8}u$ $2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{8}u$

ou encore, s'il a fallu tracer les segments, et rappeler qu'il s'agit d'égalité de longueurs:

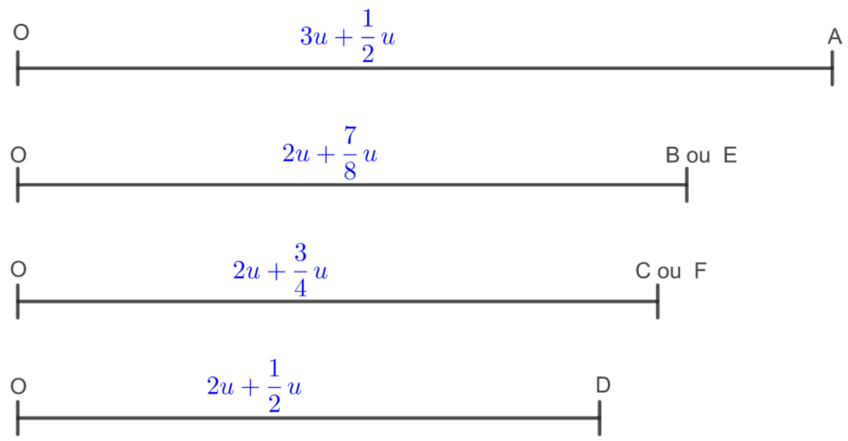


Figure 32 – Solution de la séance 4 avec les longueurs des segments

ou mieux encore, une solution à afficher provisoirement et qui permet de continuer la familiarisation avec la demi-droite graduée :

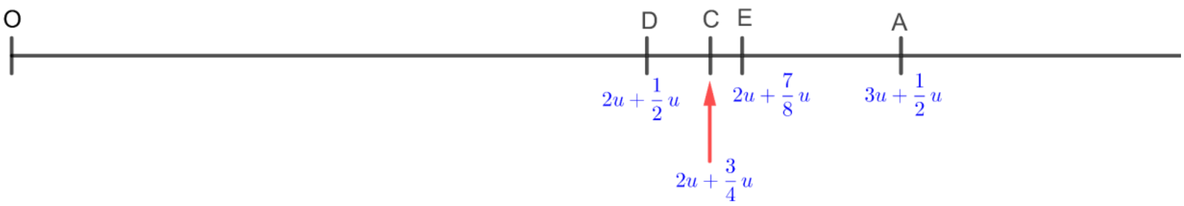


Figure 33 - Solution de la séance 4 avec les distances des points à l'origine O

Séance 5 (40 minutes)

Ces séances sont courtes, elles peuvent servir d'activité de rupture, d'entraînement quotidien, elles ont vocation à ancrer les nouveaux savoirs dans la durée.

Objectifs

- Poursuivre la décontextualisation de l'écriture fractionnaire
- Entraîner à la transformation d'écritures fractionnaires
- Découvrir de nouvelles fractions unitaires

Exercice 1

Consigne

Trouver, parmi les écritures suivantes, celles qui désignent la même mesure de longueur

$$\frac{4}{8} \qquad \frac{5}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{14}{8} \qquad \frac{10}{4} \qquad \frac{7}{4} \qquad 2+\frac{1}{2} \qquad 1+\frac{6}{8}$$

Les élèves peuvent travailler en binôme, mais cette fois-ci sans bande étalon.

En revanche, la validation se fera systématiquement avec les mesures de longueur au tableau, après avoir récolté les propositions des élèves.

Analyse de l'exercice 1

Pour la première fois, des écritures fractionnaires sont données sans être accompagnées d'une unité de longueur. Elles gardent toutefois le statut de mesures, mais il est implicite que ces mesures sont toutes exprimées dans la même unité de longueur.

Ces écritures ont vocation peu à peu à exprimer des nombres, indépendamment d'un contexte de mesure de longueur.

On attend des élèves que, à terme, ils manipulent ces égalités sans utiliser une bande de longueur unité ; la verbalisation reste importante. Par exemple :

$\mathbf{\frac{14}{8}}$**, c'est 14 huitièmes, c'est <u>8 huitièmes, qui font 1</u>, et encore 6 huitièmes, c'est donc égal à** $\mathbf{1 + \frac{6}{8}}$

Nous rappelons qu'aucune technicité n'est attendue des élèves pour réduire des écritures fractionnaires, seules les égalités en référence à la définition d'une fraction unitaire sont à expliciter (soulignée dans l'exemple ci-dessus).

Exercice 2

Consigne

Trouver en justifiant d'autres écritures pour :

$\frac{18}{8}$ $\quad 3 + \frac{1}{4}$ $\quad \frac{10}{4}$ $\quad \frac{8}{3}$ $\quad \frac{24}{5}$

Analyse de l'exercice 2

Le travail sur les transformations d'écriture continue, avec une introduction de nouvelles fractions unitaires, les tiers et les cinquièmes.

Cette introduction permet de commencer une généralisation de la famille des fractions, en proposant des fractions que l'on peut difficilement produire par manipulation. Il est en effet difficile de plier une bande de papier en cinq.

L'enseignant demande d'abord aux élèves comment peuvent se lire ces nouvelles fractions. On attend les réponses *huit tiers* et *vingt-quatre cinquièmes* mais il est probable que des élèves proposent *huit troisièmes*, ce qui n'est pas faux.

C'est l'occasion de vérifier que les élèves parviennent à généraliser les définitions des demis, quarts et huitièmes.

Il est nécessaire de verbaliser, à un moment ou un autre, les définitions respectives d'un tiers et d'un cinquième, en langue naturelle et en langage symbolique, avec diverses formulations. Par exemple pour le tiers :

- **un tiers, c'est le nombre tel qu'il le faut trois fois pour obtenir l'unité**
- un tiers est trois fois plus petit que l'unité
- 3 fois un tiers égale 1
- $3 \times \frac{1}{3} = 1$

Et toujours travailler la relation "**huit tiers, c'est huit fois un tiers**".

Ainsi :

$$\frac{8}{3} = 8 \times \frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1 + 1 + 2 \times \frac{1}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

Quelques exemples de questions-flash

- compter de quarts en quarts (un quart, deux quarts égalent un demi, trois quarts, quatre quarts égalent un, cinq quarts, …)
- combien de quarts dans cinq demis ?
- combien d'unités dans quinze quarts ?
- …

Commentaires

La langue naturelle reste fondamentale, il est important de rappeler que l'écriture fractionnaire n'est pas toujours utile pour raisonner avec des fractions simples. Il convient donc de proposer des questions sans cette écriture.

A chaque difficulté, se référer à une longueur unité et à un report de longueur sur une demi-droite.

Conclusion de la partie 3

La situation *Bande unité* que nous venons d'exposer dans sa totalité permet une première rencontre avec les fractions simples, dans le contexte de la mesure de longueur.

Elle a permis la construction de deux types d'objets :

- les **fractions unitaires** telles que un demi, un quart et un huitième
- les **multiples de ces fractions unitaires**, tels trois quarts ou cinq demis

Elle a introduit une nouvelle écriture, l'écriture fractionnaire, qui permet de représenter ces objets :

- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$
- $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{2} = 5 \times \frac{1}{2}$

Nous avons complété la proposition ERMEL par :

- une analyse des prérequis nécessaires à cette situation
- une proposition d'activités préalables permettant de s'assurer de ces prérequis
- un exposé plus explicite des différentes étapes, en insistant en particulier sur la formulation des consignes
- différentes propositions d'institutionnalisation permettant de laisser une trace écrite évoluant avec les connaissances des élèves
- et, plus largement, dans les parties 1 et 2, un développement des aspects didactiques et mathématiques qui la sous-tend.

Cette situation prépare de façon implicite la situation suivante, *Droite-graduée-1*, où il s'agira de placer des nombres en écriture fractionnaire sur une droite graduée (fig.34) :

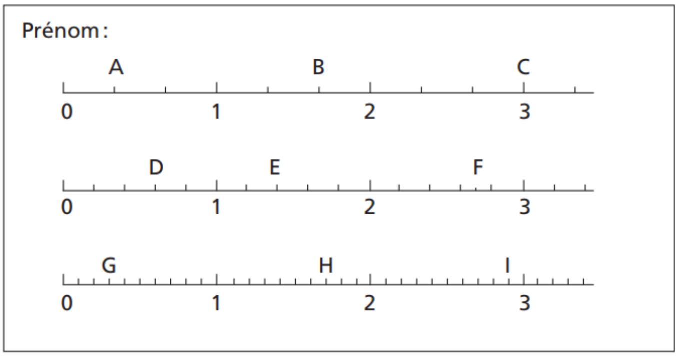


Figure 34 - Extrait de Droite-graduée-1, ERMEL CM1 (2005)

Bande unité ne parle pas encore de droite graduée, mais dès la séance 3, on commence à placer des nombres sous des points sur une demi-droite.

Elle ne parle pas encore non plus explicitement de nombre, on reste dans les mesures de longueurs, mais les dernières activités se détachent de l'écriture $\frac{a}{b}u$ au profit de l'écriture $\frac{a}{b}$.

Elle travaille essentiellement avec les demis, les quarts et les huitièmes, mais on rencontre finalement de nouvelles fractions de l'unité, les tiers et les cinquièmes.

L'objectif des situations suivantes, *Droite-graduée-1* et *Droite-graduée-2*, est la construction des nombres décimaux, à partir des fractions décimales et dans le contexte des droites graduées. Pourquoi ce choix ?

- les dixièmes, et encore plus les centièmes, sont des fractions impossibles à obtenir par pliage, il faut donc renoncer à reporter de telles longueurs pour mesurer
- le matériel de numération usuel (tels que les petits cubes, les barres, les plaques, …) focalise l'attention sur des collections d'objets, donc des quantités, et donc des nombres entiers, alors que les fractions unitaires, en particulier les dixièmes et les centièmes, sont des nombres inférieurs à 1. La droite graduée permet de le conceptualiser plus efficacement.

Ainsi, dès la situation *Droite-graduée-1*, on rencontre des dixièmes ; *Droite-graduée-2* étend la droite graduée aux centièmes, et permet l'introduction d'une nouvelle écriture pour les dixièmes et les centièmes : l'écriture dite "à virgule", qui n'est en fait que l'extension de l'écriture écrite chiffrée des nombres entiers, de son vrai nom *l'écriture décimale*.

Les fractions seront de nouveau rencontrées au CM2, dans deux nouveaux contextes, celui de mesure des aires, et celui des fractions de grandeurs mesurées, telles « les trois quarts de 200 mètres ».

Toutefois, l'enseignement des fractions reste très léger à l'école primaire, et son objectif principal reste l'introduction des nombres décimaux. Nous renvoyons aux parties 1 et 2 pour une étude théorique approfondie du lien entre les fractions et les nombres décimaux.

Conclusion générale

En France, l'enseignement des fractions a deux finalités :

- l'introduction des nombres décimaux à partir des fractions décimales ; cette construction se fait actuellement tout au long du cycle 3
- l'introduction des nombres rationnels, à travers l'écriture fractionnaire, qui concerne davantage le collège.

Il est donc crucial que les enseignants soient outillés tant d'un point de vue didactique que mathématique, à propos de cet objet finalement peu ou mal identifié. Son enseignement cède souvent à la facilité, en prenant le risque de créer chez les élèves des obstacles majeurs dont on ne percevra les conséquences que des années plus tard. Combien de collégiens ne donnent aucun sens à l'écriture décimale, combien de lycéens ne savent pas manipuler l'écriture fractionnaire ?

Pour mettre les élèves en réussite dans l'apprentissage des fractions, les enseignants proposent des tâches qui se réduisent souvent à l'association d'une écriture fractionnaire à des parts coloriées de tartes, de pizzas, de diverses formes géométriques. Ces tâches, que de nombreux chercheurs ont déjà critiquées (voir encore récemment Margolinas, 2021), construisent souvent des conceptions erronées chez les élèves. Les évaluations nationales et internationales récentes le prouvent. On peut citer à titre d'exemple la note d'alerte du CSEN[44] de septembre 2023[45] qui signale que «[A l'entrée en sixième] seuls 22 % des élèves placent correctement la fraction 1/2 sur une ligne graduée de 0 à 5 », et que « seule la moitié des élèves trouve la bonne réponse à la question « combien y a-t-il de quarts d'heure dans trois quarts d'heure ? » ».

A l'heure où nous écrivons, les projets des nouveaux programmes du cycle 2[46] nous laissent toutefois assez perplexes. Il s'agirait précisément d'introduire ces activités de coloriage dès la classe de CP, alors que le CSEN lui-même affirme que « les fractions sont trop souvent introduites uniquement dans le contexte du partage d'un gâteau ou d'une pizza »[47]. Ces mêmes nouveaux programmes prévoient d'introduire l'écriture à virgule dès le CE1 dans le cadre de la monnaie :

> *Ceci permet de manipuler des nombres écrits avec une virgule, de les comparer, de les additionner et de les soustraire, dans des contextes concrets. Ce travail prépare les élèves à l'introduction plus formelle des nombres décimaux à partir des fractions décimales qui sera menée au cycle 3.*[48]

Cette introduction précoce de la virgule, indépendante de celle des unités de la numération, est pourtant indiquée comme non souhaitable par les documents ressources actuellement en vigueur :

> *[…] on dit « trois euros vingt-cinq » ou « trois mètres vingt-cinq » tout comme on dit « trois heures vingt-cinq », montrant bien qu'il s'agit là d'une juxtaposition des euros et des centimes d'euros, ou des mètres et des centimètres, comme sont juxtaposées les*

---

44 Conseil Scientifique de l'Éducation Nationale, créé en janvier 2018, et dont aucun membre n'est un spécialiste de la didactique des disciplines
45 Note d'alerte du CSEN – Septembre 2023, n°2, p.1
46 En ligne : https://www.education.gouv.fr/projets-de-programmes-pour-l-ecole-elementaire-et-le-college-8174, consulté le 16 mai 2024
47 CSEN, 2023, Ibid., p.3
48 Programme de mathématique du cycle 2 – 08 avril 2024 – p.5. En ligne : https://www.education.gouv.fr/projets-de-programmes-pour-l-ecole-elementaire-et-le-college-8174, consulté le 16 mai 2024

heures et les minutes. Démarrer l'apprentissage des nombres décimaux en s'appuyant sur cet usage ne favorise de ce fait sans doute pas leur compréhension et risque au contraire d'encourager les élèves à concevoir l'écriture à virgule d'un nombre comme étant composée de deux nombres entiers, juxtaposés et séparés par une virgule.[49]

L'enseignement des nombres décimaux, et en particulier celui des fractions, a perdu au fil des années ses fondements mathématiques et s'est ainsi vidé de sens, au point que le terme « fraction » est devenu source de beaucoup de confusions : est-ce un nombre, est-ce une écriture ? Que signifient des expressions qui sont apparues dans les ressources ces dernières années comme « fraction-partage » ou « fraction-quotient » ? Pourquoi, dans les programmes de collège, le mot « fraction » a-t-il remplacé « nombre en écriture fractionnaire » ? Qui sait dire aujourd'hui comment distinguer un nombre rationnel d'une fraction ? Qui sait même définir une fraction ? On pourrait se mettre d'accord sur ce qu'elle n'est pas : une fraction n'est pas la même chose qu'un nombre rationnel (sinon, pourquoi les distinguer), et une fraction n'est pas non plus la même chose qu'une écriture avec une barre de fraction, un entier au numérateur et un entier au dénominateur, sinon on ne la considèrerait pas comme un nombre.

C'est pourquoi, dans cet ouvrage, nous nous sommes attachés à définir rigoureusement le concept de fraction que nous entendions développer. Ainsi, nous avons :

- insisté particulièrement sur la distinction entre un objet mathématique et ses différentes représentations (partie 1)
- exposé le concept mathématique d'unité relative sous-tendant celui de fraction de l'unité (partie 2)
- développé une unité d'enseignement en appui sur une définition rigoureuse d'un point de vue mathématique (partie 3)

Après cette introduction des fractions, le chemin est donc encore long, pour aboutir aux nombres rationnels de la fin du collège.

Nous espérons que cet ouvrage contribuera à retrouver le chemin de la rigueur mathématique, tant pour les enseignants que pour les élèves, sans sacrifier au plaisir d'enseigner et d'apprendre, qui est la marque de fabrique de la ressource ERMEL.

---

[49] Eduscol (2016). Fractions et nombres décimaux au cycle 3. MENESR. https://eduscol.education.fr/251/mathematiques-cycle-3 , consulté le 16 mai 2024

ANNEXES

Annexe 1- Analyse détaillée des prérequis

1. En lien avec le contrat didactique

Défini par Brousseau (1984) comme l'"ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève, et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant", le contrat didactique lié à Ermel se caractérise par une démarche d'*élève-chercheur*, et par un enseignant souvent en position de retrait, qui favorise la formulation des élèves pour les élèves.

Un rapport à l'écrit des élèves particulier

Son rôle social et son sens

Dans la démarche d'Ermel, l'écrit des élèves est porteur de sens et essentiel à l'activité mathématiques. Il est une base sur laquelle ont lieu les échanges lors des mises en commun. C'est la trace d'une démarche, et un moyen de communiquer son raisonnement aux autres.

La situation émetteur récepteur et ses modalités de travail

Situation récurrente d'Ermel (présence d'au moins une séance par an de cette modalité), la situation émetteur récepteur est une situation de formulation (voir partie 1.B.2.), organisée en deux phases, l'une où l'élève écrit un message à un autre élève, et l'autre où il reçoit un message de ce dernier. Pour entrer pleinement dans l'activité, l'élève doit comprendre que son message sera porteur d'un savoir pour l'autre enfant.

Il semblerait nécessaire que l'élève ait déjà vécu de telles situations "émetteur-récepteur" afin que sa nouveauté ne "pollue" pas leur attention, qui doit être entièrement focalisée sur le problème à résoudre.

L'utilisation du matériel

Il s'agit de travailler avec autre chose qu'un manuel ou que l'outil règle graduée. La situation étant parfois reconnue comme une séance de "mesure", les élèves peuvent être gênés de ne pas avoir accès aux instruments usuels. De plus, nous avons pu constater que certains élèves se refusaient à plier la bande de papier par peur d'abîmer du matériel scolaire.
Cela suppose donc de l'élève un esprit d'initiative et une compréhension de la liberté qui lui est permise au sein de la situation.

2. En lien avec les contenus mathématiques

En plus des aspects de contrat avec l'enseignant, l'élève a besoin de certaines compétences mathématiques de cycle 2 pour arriver à bout de la situation[50].

50 voir le BO du 30 juillet 2020 https://www.education.gouv.fr/media/70279/download6

Mesurer des longueurs

Savoir utiliser une unité de longueur non conventionnelle

BO (n° 31 du 30 juillet 2020) : “notion d’unité : grandeur arbitraire prise comme référence pour mesurer les grandeurs de la même espèce.”, cela demande donc à l’élève d’avoir vécu au moins une situation où il a été amené à utiliser une unité non conventionnelle pour mesurer une longueur.

Savoir effectuer un report de longueur

La compétence de mesure de longueur est parfois reléguée par les manuels et remplacée par la règle de “placer sur le zéro”. Dans le BO, il est demandé aux élèves de cycle 2 : “Dans des cas simples, mesurer des longueurs, (...) en reportant une unité (bande de papier ou ficelle)”

Mobiliser la notion de moitié dans le cadre des longueurs

Faire le geste de plier le matériel donné pour trouver la moitié d’une longueur

Cet aspect est essentiel. Il est le lien entre la notion de moitié et celle de longueur. Il faut que les élèves aient déjà établi que plier une bande précisément en deux donne la moitié de sa longueur.

Connaître le sens du mot “moitié”, et éventuellement celui de “quart”

Savoir que la moitié est le résultat d’un partage en deux parts de longueurs égales, et que le quart peut-être défini comme la moitié de la moitié.

Annexe 2- Enchaînement des situations Ermel répondant aux prérequis de la situation *Bande-unité*

Lorsque la situation a deux noms, le premier provient de ERMEL historique, et le second des Essentielles.

Prérequis	CP	CE1	CE2	CM1 *(période 1 et 2)*
Rôle de l'écrit	P3 Le jeu du banquier- Échange 10 contre 1 P4 Carrelages (groupement de 10)	P1 Les billes P2 Le panneau Le zoo, Julie au centre commercial, P4 les factures	P2 production libre d'énoncés	P2 Les bandes colorées
Situation émetteur récepteur (organisation)	P1 Les mosaïques P5 Les carrelages (algorithme addition)	P2 Le panneau P4 Les factures	P2 Les règles bizarres P4 Mise bout à bout	
Activité de mesures de longueurs		P1 Les billes P3 le couloir	P2 Activités environnantes (report d'unité) P2 Les règles bizarres & La règle effacée P4 Mise bout à bout	P2 Les bandes colorées
Le pliage / la moitié	P4 : Jeu des 5 cartes	P3 Loto des doubles	P3 Les masses marquées P5 Le jeu des six cartes	P1 Graduations P2 Des rectangles qui ne manquent pas d'air. P1 Le jeu des 6 cartes

Annexe 3 – Description des situations ERMEL

Le jeu des 6 cartes

(dans ERMEL CE2 (ed. 2005), p.362 et CM1(ed. 2005), p.164)

Il s'agit d'un jeu avec des règles simples ayant pour objectif d'aborder la notion de moitié et de quart de nombres entiers. On peut y jouer jusqu'à 4.

Le matériel se compose de 30 cartes. On y trouve 24 cartes de 4 couleurs différentes (pique, cœur, carreau et trèfle) auxquelles on associe des valeurs du type : 12, 14, 16, 18, 20, 24 (des multiples de 2) et 6 cartes neutres (sans couleur) avec des valeurs du type : 12, 24, 36, 60, 100 (multiples de 4).

Au début de la partie, on attribue une couleur à chaque joueur. Puis, à tour de rôle, chacun tire une carte.

- si la carte est de sa couleur, le joueur gagne les points indiqués sur celle-ci
- si la carte n'est pas de sa couleur, il la donne au joueur dont c'est la couleur, qui ne gagnera que la moitié des points
- si la carte est neutre, il gagne le quart des points indiqués

On joue jusqu'à épuisement des cartes. Le gagnant est celui avec le plus de points.

Graduations

Activité « Graduations » dans la version historique d'Ermel CM1(2005), page 260. Elle est devenue la phase 1 de l'activité BANDE UNITÉ dans Les Essentielles CM1, page 64

Objectifs

- Utiliser les propriétés de la proportionnalité (linéarité, rapport entre les écarts entre les nombres et les graduations)
- Placer des graduations correspondant à des nombres sur une demi-droite à partir de 0 et d'un autre nombre proposé
- Placer des nombres correspondant à des graduations
- Utiliser un vocabulaire spécifique (double, moitié, milieu) et des procédures spécifiques (pliage de la bande, report des longueurs).

Remarques : La notion de proportionnalité n'est pas forcément à évoquer, les relations entre les nombres et les graduations suffisent. La règle graduée n'est pas autorisée.

Les élèves doivent procéder par pliages d'une bande de papier fournie et par reports de longueurs déterminées pour trouver les nombres correspondant aux graduations et pour placer les graduations des nombres étudiés. Le pliage permet d'obtenir un résultat précis.

Les intérêts de cette activité comme activité préalable sont les suivants :

- Les élèves manipulent une bande de papier et prennent conscience qu'ils peuvent l'utiliser comme unité de longueur non conventionnelle et qu'ils peuvent la plier
- Les notions de moitié, de double sont évoquées

- On insiste sur la précision des mesures.

En résumé, nous avons plusieurs pré-requis à la situation bande unité qui trouvent des réponses grâce à cette situation. Il manque encore cependant la modalité de travail émetteur récepteur, et d'autres situations de mesure de longueur avec l'utilisation d'une unité non conventionnelle (une seule occurrence peut être insuffisante pour la plupart des élèves).

Annexe 4 – Vue synthétique de la séquence

<table>
<tr><td colspan="2">Séances préalables facultatives</td><td>Les séances que nous avons développées:
- Activité préparatoire 1 : multiples et sous-multiples
- Activité préparatoire 2 : Fruits et légumes
- Activité préparatoire 3 : Rectangles
Les situations ERMEL :
- Jeu des six cartes
- Graduations</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Bande-unité
(Ermel)</td><td>Séance 1</td><td>La situation Bande-unité
Situation émetteur récepteur de mesure de longueur de segments. .
Institutionnalisation 1 : introduction aux premières unités fractionnaires</td></tr>
<tr><td>Séance 1 (bis)</td><td>La situation Bande-unité (bis)
Reprise de la situation précédente. Les élèves disposent cette fois de la première institutionnalisation que nous proposons.
Institutionnalisation 1 (bis) : introduction de l'écriture fractionnaire, et multiples des unités fractionnaires</td></tr>
<tr><td>Séance 2</td><td>Mesure de tous les segments de la feuille n°3 en utilisant la bande de longueur unité
Institutionnalisation 2 : extension de l'écriture fractionnaire aux multiples des fractions de l'unité</td></tr>
<tr><td>Séance 3</td><td>Placer des points sur une demi-droite en connaissant leurs abscisses.</td></tr>
<tr><td>Séance 4</td><td>Comparer des longueurs écrites en cherchant à ne pas utiliser la bande de longueur une unité.</td></tr>
<tr><td>Séance 5</td><td>Trouver des nombres égaux parmi une série de nombres écrits sous formes fractionnaires.</td></tr>
</table>

Annexe 5- Fiche de préparation de la séance 1 de *Bande-unité*

<table>
<tr>
<td colspan="4">Travail préalable :

Organiser les binômes ou les groupes et déterminer les segments que chacun recevra, en fonction de leur longueur plus ou moins faciles à mesurer :
le segment [AB], dont la longueur est la plus simple $AB = 2u + \frac{1}{2}u$
le segment [CD], de difficulté moyenne : $CD = 1u + \frac{3}{4}u$
le segment [EF], dont la longueur est la plus difficile à mesurer $EF = 2u + \frac{1}{8}u$</td>
<td>Matériel:

Feuilles (1), (2) et (3)

Bandes de longueur 1 unité en grande quantité.</td>
</tr>
<tr>
<td>Étapes</td>
<td>Durée :</td>
<td>Plan</td>
<td>Déroulement</td>
<td>Bilan/Remarques</td>
</tr>
<tr>
<td>Étape 1.1</td>
<td></td>
<td>Phase de rangement</td>
<td colspan="2">S'assurer que tous les outils de mesure habituels sont rangés. Un crayon par élève.</td>
</tr>
<tr>
<td>Étape 1.2</td>
<td>5'</td>
<td>Passation de la consigne

présenter le but de la séance : mesurer sans utiliser la règle ou l'équerre et faire identifier un segment</td>
<td colspan="2">“Aujourd'hui, nous allons faire une situation émetteur-récepteur en mathématiques, comme vous avez déjà fait.

Cela veut dire qu'il y aura deux étapes : une première où vous écrirez un message à un camarade, et une seconde où vous en recevrez un.

Je vais commencer par vous présenter le matériel que vous utiliserez :

Sur la feuille n°1, il y a un segment rien qu'à vous. Il est secret.

Sur la feuille n°3 sont dessinés tous les segments secrets que la classe a reçus. Je vous donnerai cette feuille tout à l'heure.

C’est sur la feuille n°2 que vous allez écrire votre message. Le message devra permettre à votre camarade de retrouver le segment que vous aviez parmi les segments de la feuille n°3.

Enfin, vous recevrez une bande de papier ! Vous n'avez pas le droit à la règle, mais pouvez utiliser la longueur de la bande comme unité de longueur. Toute la classe a une bande de la même longueur. Si vous l'abîmez, j'en ai beaucoup d'autres.”</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>Étape 1.3</td><td>5'</td><td>Reformulation</td><td>Distribution des feuilles (1) et (2). Reprise de la consigne quand ils les ont reçues :
"Sur la feuille n°1, il y a votre segment. Sur la feuille n'°2 vous devez écrire un message qui permettra à celui qui le recevra de retrouver sur la feuille n°3 le segment qui a la même longueur que le vôtre"</td><td>Les segments sont distribués en fonction du niveau des élèves (cf. plus haut)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Étape 1.4</td><td rowspan="2">5'</td><td rowspan="2">Mesures des segments/écriture des messages
mesurer des segments. Individuel NB : l'utilisation de la règle ou de l'équerre est proscrite
écrire un message permettant d'identifier un segment</td><td colspan="2">Interventions : il peut y avoir des remarques sur le fait que le segment « ne rentre pas », ou que « la bande dépasse ». Il peut aussi y avoir des élèves bloqués sur le centimètre qu'ils tentent de reproduire. Dans les deux cas, il peut être pertinent de faire une pause dans la situation afin de faire une mise en commun rapide, dans laquelle on demandera à la classe la pertinence du centimètre, ou une technique pour "faire rentrer la bande". On en profitera pour insister sur la précision des mesures : il est important que l'élève qui reçoit le message retrouve exactement le bon segment.</td></tr>
<tr><td>Rôle de l'élève : utiliser sa bande pour mesurer son segment, et écrire un message pour le destinataire futur.</td><td>Rôle de l'enseignant : Il circule avec une feuille, où il note les messages intéressants à sélectionner pour la mise en commun.</td></tr>
<tr><td>(facultatif)</td><td></td><td>Réécriture des messages</td><td colspan="2">Ici, il est possible, afin de faciliter le traitement des messages, de demander leur "réécriture" par binôme, puis par groupe de 4 après comparaison des propositions de chaque binôme.</td></tr>
<tr><td>Étape 2</td><td>5'</td><td>Échange
identifier le segment à partir du message (écrit par un autre élève/ groupe). Valider les réponses trouvées</td><td>Procéder aux échanges (il peut être intéressant de le faire pendant une pause/récréation), et distribuer la feuille (3)
"En utilisant les messages que vous avez reçus, trouvez quel segment avait l'écrivain du message sur la feuille n°3. Quand vous pensez avoir la réponse, écrivez le numéro correspondant au segment sur la feuille et rééchangez. Quand vous aurez rééchangé, vérifiez la réponse de votre camarade en trouvant votre segment sur la feuille n°3.</td><td>Après les rééchanges, les enfants sont parfois tentés de discuter entre eux, laisser faire.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Étape 3</td><td></td><td>Rééchange</td><td>Ceux qui ont des remarques à faire sur des formulations pas assez précises ou sur des incompréhensions peuvent l'écrire et renvoyer leur message, continuant ainsi la correspondance entre deux élèves/deux groupes d'élèves.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Étape 4.1</td><td rowspan="2">5'</td><td rowspan="2">Mise en commun

mettre en évidence les critères de réussite à travers l'étude des messages ayant conduit à une réponse correcte, puis de ceux n'ayant pas conduit à une réponse correcte</td><td colspan="2">Après avoir sélectionné une variété de messages, les afficher au tableau. Des plus primaires au plus aboutis (cf ci-après). Questionner la classe sur le sens des différents messages. Conclure par les messages utilisant le pliage, et apporter le nom de ceux-ci : si moitié apparaît, fournir "quart et huitième"

Sur la sélection, on retrouve différents types de réponses, dans l’ordre de pertinence :
- des messages vides, y répondre une fois la situation terminée : si on refaisait la situation, saurais-tu quoi écrire ?
- des messages utilisant le centimètre, la classe y répond en pointant l’absence de l’outil règle.
- des messages avec un langage approximatif (“c’est un peu plus que la bande”), la classe y répond en montrant que cette description va avec beaucoup de segments.
- des messages faisant appel au geste : “posé la bande”, “plie la bande”, “colle la au bord”, la classe ajoute qu’il faut être précis dans les pliages
- des messages comprenant “moitié”, “quart”, “moitié de quart”, etc. on fait le lien avec les heures ou les faits numériques. Préciser que c’était l’objectif de la séance, et passer à l’institutionnalisation.</td></tr>
<tr><td>Rôle de l'élève : Partager sa stratégie à l'oral, analyser la stratégie des autres.</td><td>Rôle de l'enseignant : gérer la parole, organiser les échanges et l'ordre des réponses, apporter les nouveaux termes.</td></tr>
<tr><td>Étape 4.2</td><td>5'</td><td>Institutionnalisation</td><td colspan="2">Élaborer une synthèse abordant :
- la nécessité de mesurer avec précision
- la nécessité parfois de plier la bande
- la notion de moitié, quart et huitième de l'unité (uniquement en lettres), cf plus haut.</td></tr>
</table>

Université de Strasbourg
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Dépôt légal : 4ème trimestre 2024

Titre : **Introduire les fractions à l'école primaire**

ou

Comment réussir en classe la situation « Bande-unité » de la ressource ERMEL

- **Les auteurs :**

  Julien ANGLARD, Jennifer KIEFFER, Olivier METTER, Sven SEYFRIED et Gwenola URVOY sont professeurs des écoles de l'académie de Strasbourg

  Catherine THOMAS est formatrice en didactique des mathématiques à l'INSPÉ de Strasbourg

- **Résumé :**

  Cette brochure reprend, avec l'aimable autorisation des éditions Hatier, la célèbre situation « Bande-unité » de la ressource ERMEL qui permet une construction des fractions basée sur la résolution de problème et l'autonomie des élèves.

  Son objectif est de proposer une situation consistante mathématiquement et plus facile à mettre en œuvre. Elle est le fruit d'une démarche d'explicitation la plus précise possible de tous les gestes professionnels nécessaires à sa réussite, faisant suite à de nombreuses réalisations dans les classes.

  Elle est complétée par des apports mathématiques et didactiques issus des travaux de recherche les plus récents. Elle propose en particulier de définir les fractions comme de nouvelles unités relatives à une unité principale, et propose des moments d'institutionnalisation adaptés à l'âge des élèves.

  Elle est pensée pour que les différentes parties soient indépendantes, et permet d'accompagner les enseignants qui le souhaitent dans une première mise en œuvre d'une situation ERMEL.

- **Public concerné :** enseignants du cycle 3 (1er et 2nd degré), formateurs intervenants en formation initiale et continue sur les deux degrés (INSPÉ, PEMF, RMC, …)
- **Mots-clés :** fractions – unité relative - situation – résolution de problèmes – cycle 3 -
- **Date :** novembre 2024
- **Nombre de pages :** 82
- **Éditeur :** IREM de Strasbourg **Numéro :** S. 201

IREM de Strasbourg, 7 rue René Descartes 67084 STRASBOURG CEDEX
Tél : 03 68 85 01 61 Courriel : bibirem@math.unistra.fr
https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications

ISBN 978-2-911446-39-9