Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM

Rallye
Rallye
2005

Rapport du 32ème Rallye Mathématique d'Alsace

IREM de
Strasbourg
IREM de
Strasbourg

UFR de mathématique
et d'informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 90 24 01 30
Fax : (33) 03 90 24 01 65
Bibliothèque : (33) 03 90 24 61
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Patrick GENAUX, Claudine KAHN, Marie-Laure KOSTYRA,
Christiane OSWALD, Sofiane SOUAIFI, Nathalie WACH.

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 32ème fois en 2005. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Budapest, Düsseldorf, Francfort, Berlin, Hambourg, Vienne, Zurich, Sofia).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut disposer d'un rapport de l'année précédente ; les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale ; elle a réuni mille participants dont une centaine de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leur capacité inventive.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont très courts, rédigés de manière amusante, présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux annales et aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas guidée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.

Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle.

En Première, quinze binômes et un individuel sont primés : un prix exceptionnel, cinq premiers prix, quatre deuxièmes prix et six troisièmes prix. Le premier prix exceptionnel récompense une copie brillante où toutes les solutions sont clairement explicitées. Cette année les premiers prix récompensent les binômes ayant entièrement résolu deux exercices. Les deuxièmes prix sont composés des copies ayant présenté une bonne solution à un exercice et ayant abordé un ou deux autres de manière significative. Les troisièmes prix récompensent les binômes ayant bien maîtrisé un exercice et donné quelques éléments pour un second.

En Terminale, quatorze binômes et un individuel ont été sélectionnés : quatre premiers prix, cinq deuxièmes prix et six troisièmes prix. Cette année les premiers prix récompensent les binômes ayant bien résolu un exercice et fournissant des éléments très significatifs de réponses pour les autres.
Les deuxièmes prix concernent des candidats dominant bien un exercice et donnant des éléments consistants pour la solution des autres. Les troisièmes prix sont attribués à ceux qui ont apporté des pistes intéressantes à au moins deux exercices sur trois.

La remise des prix, présidée par Monsieur Gérald CHAIX, Recteur de l'Académie de Strasbourg et Chancelier des Universités d'Alsace, a lieu au Département de Mathématique de l'Université Louis Pasteur. Elle est suivie d'une réception offerte à l'Hôtel du Département par Monsieur Philippe RICHERT, Président du Conseil Général du Bas-Rhin.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, abonnements ou i-pods pour fêter la 32ème édition:

- ◊ Le Rectorat de l'Académie de Strasbourg
- ◊ L'Université Louis Pasteur
- ◊ Le Département de Mathématiques de l'Université Louis Pasteur
- ◊ L'A.P.M.E.P
- ◊ Le Conseil Général du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Général du Haut-Rhin
- ◊ La Ville de Strasbourg
- ◊ Le S.I.A.S. d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville de Colmar
- ◊ La Ville d'Ensisheim
- ◊ La Ville de Haguenau
- ◊ La Ville de Kaysersberg
- ◊ La Ville de Lauterbourg
- ◊ La Ville de Niederbronn-les-Bains
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Communauté des Communes du Val d'Argent
- ◊ La Ville de Saverne
- ◊ La Ville de Sélestat
- ◊ La Ville de St Louis
- ◊ La Communauté de Communes du pays de Thann
- ◊ Les Dernières Nouvelles d'Alsace
- ◊ La société CASIO
- ◊ La société Texas Instruments
- ◊ Le Musée Bartholdi de Colmar
- ◊ Le Musée d'Histoire Naturelle et d'Ethnographie de Colmar
- ◊ Le Musée de l'Automobile de Mulhouse
- ◊ Le Musée du Pétrole de Pechelbronn
- ◊ Le Cinéma Odyssée de Strasbourg
- ◊ Kinépolis de Mulhouse
- ◊ Les Musées de Strasbourg
- ◊ Europa Park de Rust (Allemagne)
- ◊ Le Musée de l'Energie Electrique Electropolis

Nous remercions tout particulièrement le Conseil Général du Bas-Rhin pour son soutien et pour la réception à l'Hôtel du Département qu'il organise en l'honneur de nos lauréats.

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Proposent de participer au **Club France**

Pendant l'année de Terminale, vous serez suivi par des tuteurs, essentiellement des élèves d'Ecoles Normales Supérieures, qui vous proposeront régulièrement des exercices de Mathématiques du type de ceux que vous avez rencontrés au Rallye Mathématique d'Alsace ou aux Olympiades Académiques. Si vous vous distinguez, vous serez éventuellement invité à représenter la France aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour plus d'information sur toutes les activités proposées, vous pouvez également consulter le site d'Animath **: http://www.animath.fr**

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Cérémonie de la remise des prix

Rallye Mathématique d'Alsace 2005

Lundi 27 juin 2005 à 17 heures

- ✓ Allocutions

  Monsieur Alain BERETZ
  Vice-président de l'Université Louis Pasteur Chargé de la valorisation et des relations avec les entreprises

  Madame Nicole BOPP
  Directrice de l'IREM

  Monsieur Philippe TRETZ
  Conseiller Communautaire

  Monsieur Gérald CHAIX
  Recteur de l'Académie de Strasbourg, Chancelier des Universités d'Alsace

- ♦ Compte rendu des épreuves

  Membres du Comité Organisateur du Rallye Mathématique d'Alsace – IREM

- ♦ Lecture du palmarès et distribution des prix

  Membres du Comité Organisateur du Rallye Mathématique d'Alsace – IREM

RÉCEPTION À L'HÔTEL DU DÉPARTEMENT

A l'issue de la remise des prix du Rallye Mathématique d'Alsace 2005
Lundi 27 juin 2005 à 19 heures

- ✓ Allocutions

  Monsieur Jean-Claude HALLER
  Conseiller Général du Bas-Rhin
  Représentant Monsieur Philippe RICHERT, Président du Conseil Général du Bas-Rhin

  Madame Catherine MONGENET
  Directrice de l'UFR de Mathématique et d'Informatique

  Monsieur Beranrd CARRIERE
  Président de l'Université Louis Pasteur

  Monsieur Gérald CHAIX
  Recteur de l'Académie de Strasbourg, Chancelier des Universités d'Alsace

Palmarès des Premières

Premier prix exceptionnel

- Julien WHITE et Frédéric WILHELM
  Professeur : Monsieur Vebrel, Lycée Freppel, Obernai

Premier prix

- Adrien GASPARINI et Manuel SCHOTT
  Professeur : Madame Bernhardt, Lycée Marie Curie, Strasbourg
- Morgane GILLARD et Stéphane MARSEGLIA
  Professeur : Monsieur Altschuh, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- Jean-Sébastien DE BARROS et Ronan LETELLIER
  Professeur : Madame Faisans-Malonga, Lycée Français, Zürich
- Valentin WENDLING et Yvan ZIEGLER
  Professeur : Monsieur Adrian, Lycée Koeberlé, Sélestat
- Pierre-Julien BRINGER et Samuel STEINER
  Professeur : Monsieur Gibert, Lycée Kléber, Strasbourg

Deuxième prix

- Cyrille GROSSHOLTZ et Aurélien HARTER
  Professeurs : Madame Kittel et Monsieur Adolph, Lycée Couffignal, Strasbourg
- Mélina BARBERO et Line DUSSOURD
  Professeur : Monsieur Stephan, Lycée Koeberlé, Sélestat
- Quentin GASSER et Valentin PIERRE
  Professeur : Madame Torterotot, Lycée Marguerite Yourcenar, Erstein
- Jonathan STRUB et Florian WINTZ
  Professeur : Madame Burck, Lycée Marc Bloch, Bischheim

Troisièmes prix

- Thomas KOFFEL
  Professeur : Madame Frieker, Lycée Jean-Baptiste Schwilgué, Sélestat
- Xavier GRUCHET et Félix LITZELMANN
  Professeur : Madame Roche, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- Sylvie CHABRIER et Aurélie VINOT
  Professeur : Madame Bernhardt, Lycée Marie Curie, Strasbourg
- Jean-Yves KIMENAU et Kévin ROE
  Professeur : Madame Meyer, Lycée Marguerite Yourcenar, Erstein
- Yeter AKGUL et Pierre SCHAMBERGER
  Professeur : Monsieur Velikonia, Lycée Louis Armand, Mulhouse
- Nicolas BACHSCHMIDT et Elisa LE
  Professeur : Monsieur Adrian, Lycée Koeberlé, Sélestat

Palmarès des Terminales

Premier prix

- ✓ Mathieu PETIT et Diane VALENTIN
  Professeur : Madame Busser, Lycée Bartholdi, Colmar
- ✓ Jean-Philippe DUGARD et Laurent LEVEQUE
  Professeur : Madame Kahn, Lycée Marie Curie, Strasbourg
- ✓ Esther ELBAZ
  Professeur : Monsieur Weinzaepflen, Lycée Jeanne d'Arc, Mulhouse
- ✓ Jean-René BELLEC et Marion UETTWILLER
  Professeur : Monsieur Hiegel, Lycée Kléber, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ Yassine NAFATNI et Louis van ROOSENDAAL
  Professeur : Madame Muller, Lycée Victor Hugo, Francfort
- ✓ Marie-Odile GROSS et Salomé HALLER
  Professeur : Monsieur Roesch, Lycée Alfred Kastler, Guebwiller
- ✓ Paul-Antoine BITTNER et Gabriel PITRAS
  Professeur : Monsieur Courtois, Lycée Scheurer Kestner, Thann
- ✓ Efrate HAMOU et Haya LEVY
  Professeur : Monsieur Ohnouna, Lycée Aquiba, Strasbourg
- ✓ Benoît MATHELET et Ayssen OLLAND
  Professeur : Madame Arleen, Lycée Le Corbusier, Illkirch

Troisième prix

- ✓ Martine CHRIST et Emilie KAUFMANN
  Professeur : Madame Cuzin, Lycée Fustel de Coulanges, Strasbourg
- ✓ Floriane CANTON et Arnaud DALLONGEVILLE
  Professeur : Monsieur Roesch, Lycée Alfred Kastler, Guebwiller
- ✓ Vincent BIALECK et Jonathan VOGEL
  Professeur : Madame Cuzin Lycée Fustel de Coulanges, Strasbourg
- ✓ Jérémy BLEYER et Guillaume FEDERLE
  Professeur : Madame Jaeggy, Lycée Episcopal, Zillisheim
- ✓ Arnaud HEMMERLE et Nicolas THAL
  Professeur : Madame Schruoffeneger, Lycée Jean Monnet, Strasbourg
- ✓ Arthur EWENCZYK et Léon FURCHTGOTT
  Professeur : Madame Lohner, Lycée Rochambeau, Washington

Sujets des Premières
6 avril 2005

Exercice 1
Deux sphères de rayon 1 sont placées à l'intérieur d'un cube.

Quelle est la longueur minimale du côté d'un tel cube ?

Exercice 2
Les entiers de 1 à n sont écrits dans un ordre tel que chaque entier est soit inférieur à tous ceux qui le précèdent, soit supérieur à tous ceux qui le précèdent.

De combien de façons peut-on les ordonner ainsi ?

Exercice 3
Un journal organise un sondage auprès de ses abonnés. Il détermine le sexe, l'état civil, la profession d'un échantillon de 1000 lecteurs. Il obtient les résultats suivants : 312 hommes, 470 personnes mariées, 525 étudiantes ou étudiants, 42 étudiants de sexe masculins, 147 étudiantes ou étudiants mariés, 86 hommes mariés et 25 étudiants de sexe masculin mariés.

Montrer que ces résultats sont contradictoires.

Sujets des Terminales
23 mars 2005

Exercice 1

n personnes sont assises autour d'une table. Elles se lèvent et se rasseyent de telle manière que deux personnes assises côte-à-côte auparavant soient maintenant séparées par deux convives.

Pour quelles valeurs de n ce scénario est-il possible ?

On pourra commencer par étudier les cas n=15 et n=16.

Exercice 2

A quelle condition sur quatre points A, B, C et D du plan existe-t-il un point P tel que les aires des triangles PAB, PBC, PCD et PAD soient égales?

Exercice 3

Quel est le plus grand nombre d'éléments que peut contenir un ensemble d'entiers compris entre 1 et 4010 dont aucun élément n'est divisible par un autre?

Commentaires

Epreuves de Première

Vous trouverez un exemple de solutions proposées pages 12 à 14.

Exercice 1

Il s'agissait de déterminer la longueur minimale de l'arête d'un cube contenant deux sphères de rayon 1.
Beaucoup de copies admettent d'emblée que la position optimale est celle où les deux sphères sont tangentes entre elles et aux faces du cube, de telle sorte que leurs centres soient sur la grande diagonale du cube. C'est exact, mais cela ne dispense pas d'une justification .
On pouvait ensuite utiliser deux théorèmes bien connus (de Pythagore et de Thalès) pour déterminer la longueur cherchée, et là, bien des erreurs ont été commises ; en particulier certains ont considéré que les sphères étaient tangentes aux arêtes du cube.

Exercice 2 :

Dans cet exercice on demandait de ranger les entiers de telle sorte qu'un entier soit inférieur à tous ceux qui le précèdent ou supérieur à tous ceux qui le précèdent.
Les candidats ont le plus souvent pensé aux deux ordres les plus naturels (croissant et décroissant), mais pas à d'autres manières de les ranger.
Quelques copies proposent tout de même des cas particuliers pour des valeurs successives de n et mettent en évidence le nombre total cherché. Des solutions correctes ont été rencontrées.

Exercice 3 :

Cet exercice de dénombrement, malgré quelques erreurs, a été très bien traité.

Epreuves de Terminale

Nous avons reproduit une solution obtenue pour l'exercice 1, concernant les convives autour d'une table. Pour les deux autres exercices, nous n'avons pas trouvé dans les copies de solutions entièrement satisfaisantes.
Vous trouverez un exemple de résolution de l'exercice 1 pages 15 et 16.

Exercice 1 :

Les cas particuliers ont été bien traités dans de nombreuses copies.
Le cas général est souvent abordé de manière significative et la discussion selon la congruence bien vue. La mise en forme de l'impossibilité dans le cas où n n'est pas un multiple de 3 n'est pas toujours claire.

Exercice 2

Cet exercice de géométrie, qui concernait un problème d'existence a été le moins bien dominé. Les candidats ont sans doute été surpris par ce type d'énoncé délicat, inhabituel au lycée.
On demandait une condition nécessaire et suffisante, ce qui a rarement été vu. Quelques configurations particulières ont été parfois envisagées.

Exercice 3

Le troisième exercice était cette année celui du millésime. La construction d'un ensemble de 2005 éléments a souvent été correctement faite.

Le raisonnement consistant à montrer qu'il ne peut pas y avoir d'ensemble de cardinal supérieur est en général erroné. Dans de nombreuses copies, il se limite à montrer qu'il n'est pas possible de rajouter aux entiers de 1 à 2005 un entier supplémentaire, ce qui n'est évidemment pas satisfaisant.

Notons que cet exercice, se généralise avec $2n$ entiers au lieu de 4010, et n à la place de 2005.

RALLYE PREMIÈRE

Adrien GASPARINI
Manuel SCHOTT

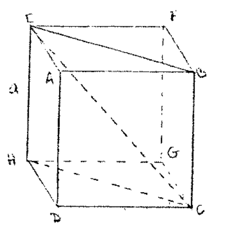
Lycée Marie-Curie
Strasbourg

Exercice 1.

Afin de prendre le moins de volume possible, les deux sphères doivent être tangentes.

Soit a le côté du cube.

Le plus long segment contenu dans le cube est une des grandes diagonales.



On définit plusieurs plans contenant chacun la grande diagonale et une petite diagonale qui est le projeté orthogonal de cette grande diagonale sur une des faces du cube.

Démontrons que la grande diagonale fait le même angle avec chacune de ces petites diagonales.

Pour cela, il suffit de considérer 3 faces contenant chacune le sommet dont est issu la grande diagonale (cela est suffisant car le cube est symétrique selon son centre).

Considérons par exemple les 3 diagonales [CH], [CA] et [CF], des faces respectives (DCGH), (ABCD) et (CBFG).

Les petites diagonales mesurent toutes $a\sqrt{2}$.

- dans le plan (ECH), la tangente de l'angle $\widehat{ECH}$ vaut $\frac{EH}{HC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

- dans le plan (CEF), la tangente de l'angle $\widehat{ECF}$ vaut $\frac{EF}{FC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

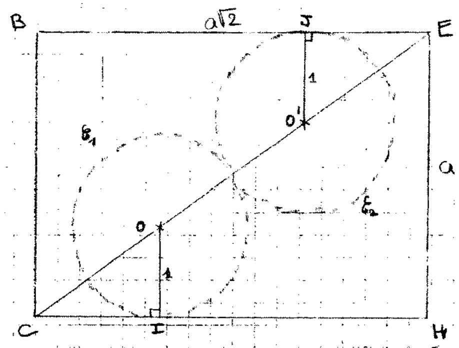
- dans le plan (CEA), la tangente de l'angle $\widehat{ACE}$ vaut $\frac{EA}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Les tangentes de ces angles sont égales. Or ces angles sont géométriques, donc ils sont égaux.

On en conclut que la démonstration qui suit est valable pour n'importe quel plan contenant la grande diagonale et une petite diagonale issue du même sommet.

Nous décidons de disposer les centres des sphères sur la grande diagonale [EC]. Pour prendre le moins de place possible les cercles sont tangents respectivement aux côtés CH et BE.

Considérons pour la démonstration le plan (CEH).



La longueur de la grande diagonale [CE] vaut :

$$CE = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

Calculons la vraie valeur de cette longueur :

Pour cela, nommons O et O' les centres des cercles, I le point de contact entre le premier cercle $(\mathcal{E}_1)$ et le côté CH et J le point de contact entre le cercle $\mathcal{E}_2$ et le côté BE.

On a donc (OI) perpendiculaire à (CH) et (O'J) perpendiculaire à BE.

Utilisons le théorème de Thalès dans le triangle CEH

$$\frac{OI}{EH} = \frac{CO}{CE} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{CO}{a\sqrt{3}} \quad \text{d'où } CO = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3},$$

de même, dans le triangle BCE :

$$\frac{O'J}{BC} = \frac{EO'}{EC} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{EO'}{a\sqrt{3}} \quad \text{d'où } EO' = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

Or nous savons que la longueur OO' vaut deux fois le rayon des sphères (les cercles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont tangents), donc $OO' = 2$.

On en déduit la longueur de la grande diagonale [CE] :

$$CE = CO + OO' + O'E = 2\sqrt{3} + 2,$$

On établit la relation :

$$CE = a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2$$

d'où $a = \frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$

$$= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$a = \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \approx 3,15.$$

La longueur minimale d'un côté du cube est : $\boxed{\frac{6+2\sqrt{3}}{3}}$

KALLYE PREMIERE

Julien WHITE
Frédéric WILHELM

Lycee FREPPEL
Obernai

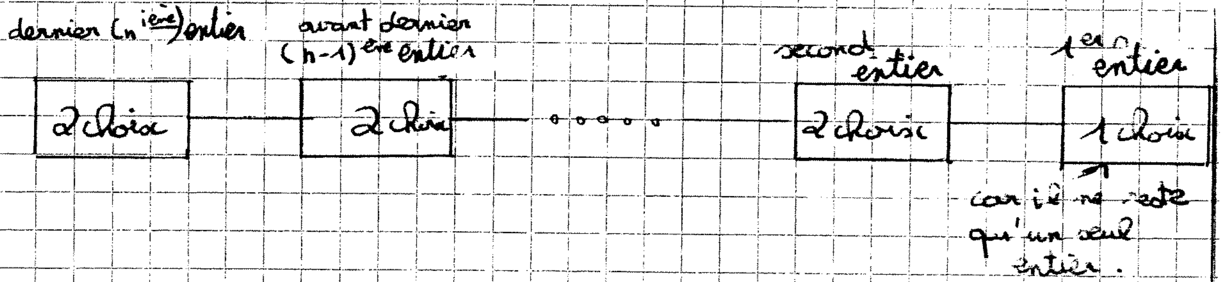
Question 2 :

Traitons le cas avec une suite d'entiers de 1 à 5 :
Si on les range dans un tel ordre, le dernier entier, supérieur aux 4 autres ou inférieur aux 4 autres, ne pourra-t-être que 1 ou 5.
L'avant dernier entier, supérieur ou inférieur aux 3 autres, ne pourra-t-être que :

* 1 ou 4 si le dernier entier est 5.
* 2 ou 5 si le dernier entier est 1.

Le raisonnement est le même pour le $3^{ème}$ et $2^{ème}$ entier on prend à chaque fois le plus petit entier ou le plus grand chiffres qui nous reste. Le 1^{er} entier sera le dernier chiffre restant.
Le procédé est le même pour une série d'entiers de 1 à n.
Il faut construire la série, entiers par entiers, en partant de la fin avec 2 choix pour chaque entier (plus grand ou plus petit entier parmi les entiers qui restent à choisir).

Schématisons cette construction sous forme de boîte



On a $(n-1)$ cases avec 2 choix (car un seul choix pour le dernier entier, donc $2^{(n-1)}$ choix.

$$\boxed{\text{On peut donc les ordonnés de } 2^{(n-1)} \text{ façons}}$$

RALLYE PREMIÈRE

Exercice 3. Pierre-Julien BRINGER Lycée Kleber
Samuel STEINER Strasbourg

Le sondage a été réalisé auprès de 1000 personnes.
Ce sondage va déterminer le sexe, l'état civil (mariés ou non mariés) et la profession (étudiant ou non étudiant) de l'échantillon.
Tous ces critères sont booléens et donc mutuellement exclusifs: caractère + non-caractère = total.

D'après les résultats obtenus, on trouve :

- 312 hommes donc <u>688 femmes</u>
- 525 étudiants dont 42 étudiants de sexe masculin.
  Il y a donc <u>477 étudiantes</u>.
- 147 étudiant(e)s mariés dont 25 étudiants de sexe masculin.
  Il y a donc <u>122 étudiantes mariées</u>.
- 470 personnes mariées dont 86 hommes.
  Il y a donc <u>384 femmes mariées</u>.

D'après ces résultats, on peut en déduire que le sondage a interrogé 688 - 477, soit 211 femmes non étudiantes.
On constate par ailleurs que dans ce même sondage, 384 - 122, soit 262 femmes non étudiantes sont mariées, ce qui est totalement absurde puisque seul 211 femmes non étudiantes ont été interrogées.

Les résultats du sondage sont donc contradictoires.

RALLYE TERMINALE

Jean-Philippe DUGARD
Laurent LEVEQUE

Lycée Marie-Curie
Strasbourg

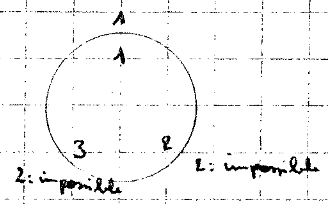
Exercice 1.

On a considéré deux points qui pouvaient prêter à confusion :
- un convive peut occuper la place qu'il avait avant « l'échange »
- ils doivent être séparés par deux convives exactement.

On attribue à chaque convive un numéro de 0 à $n-1$
On considère une table circulaire pour des raisons pratiques, mais toute table conviendrait (rectangulaire, ...) pourvu que l'on considère qu'elle est « attachée » (c'est-à-dire forme une boucle).

$n = 1$ ou 2 : évidemment impossible.

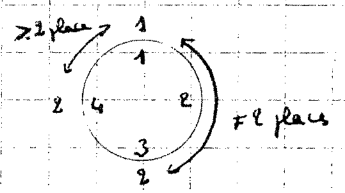
$n=3$:



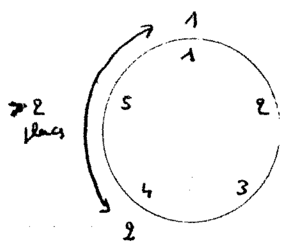
intérieur du cercle : place initiale
extérieur ——— : place finale

$n=3$: cas impossible.

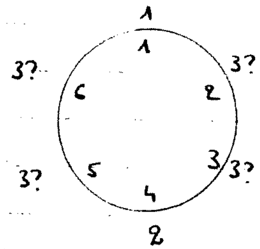
$n=4$



$n=5$

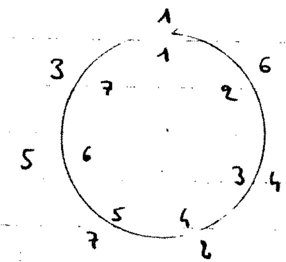


$n=6$



pas de possibilité de place 3 : dans le sens horaire ou anti horaire, il y aura forcément un nombre de place inférieur à 2.

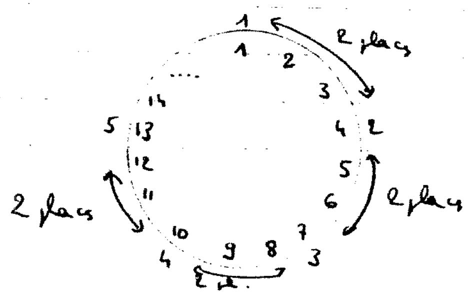
$n=7$



ce cas marche : on peut vérifier que chaque convive est séparé de deux places selon les conditions de l'énoncé.

Méthode générale de placement

On attribue au numéro 1 la même place.
Au numéro 2, on attribue la place séparée de deux places par rapport au 1 : $1+3=4$.
Au numéro 3, celle séparée de deux places du 4, etc... :



Soit u_k la place du convive k, $k \in [\![1, n]\!]$ après changement.
La place est définie « naturellement » par sa position de 1 à n.
La place de l'individu u_k avant changement est k (k le convive est repéré par sa place avant le changement).

u_{k+1} est le reste dans la division euclidienne de $u_k + 3$ par n.

On envisage

<u>$n \equiv 0 \pmod 3$</u>

il existe p tel que $n = 3p$.

$u_1 = 1$; $u_2 = 1+3 = 4$, $u_k = 1 + 3p'$.

Il arrivera un k où la place serait supérieure à n, on retranchera alors n (pour respecter la méthode).

le plus petit entier de la forme $1+3p'$ supérieur (strictement) à $n = 3p$ est l'entier $1+3p$:

$$1+3p > n \Rightarrow 1+3p > 3p \Leftrightarrow 1 > 0.$$

On retranchera donc n à $1+3p$:
le résultat est 1. Or, la place 1 a déjà été attribuée : $u_1 = 1$.
(voir cas $n = 6$). Il ne sera donc pas possible de placer les convives si $n \equiv 0 \pmod 3$, car la place 1 serait attribuée plusieurs fois.

<u>$n \equiv 1 \pmod 3$</u>

$n = 3p+1$.

De même que dans le cas précédent, on a
$u_1 = 1$, $u_2 = 4$, … $u_k = 1+3p'$.
le plus petit entier de la forme $1+3p'$ supérieur (strictement) à $n = 3p+1$ est $1+3(p+1)$.

On retranche n à ce nombre : on obtient 3.
Ce 3 correspond à la place du convive amorçant le 2^e tour.
Les places du second tour seront donc : $3+3p''$.

le plus petit entier de la forme $3+3p''$ ~~inf~~ supérieur (strictement) à $n = 1+3p$ est $p = p''$

$(3+3p) - n = (3+3p) - (1+3p) = 2$, place du convive amorçant le 3^e tour.
Les nouvelles places seront congrues à 2 modulo 3 : $2+3p'''$

De même on obtient $p''' = p$:

$2+3p-(1+3p) = 1$; le dernier convive est espacé de 2 espaces par rapport au 1^{er}.

Cette place est attribuée.

Mais on remarque qu'on a parcouru les entiers inférieurs à n s'écrivant :

- $3p'+1$ (1^{er} tour)
- $3p''+3$ (2^e tour)
- $3p'''+2$ (3^e tour)

En fin de compte, on a parcouru $[\![1, n]\!]$.

En raisonnant de même avec $n \equiv -1 \pmod 3$, on obtiendrait les mêmes résultats, à la différence que l'on obtiendrait des places de forme $3p''+2$ au 2^e tour.

Finalement, la situation proposée est possible si $n \not\equiv 0 \pmod 3$.
Par ailleurs, avec cette méthode, le nombre de tours sera toujours de 3.

La suite (u_k) des places des convives k est telle que :

$$\begin{cases} u_{k+1} \equiv u_k + 3 \pmod n \\ 1 \leq u_{k+1} \leq n \end{cases} \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!]$$

Corrigés des sujets des Premières 2005

Exercice 1

Le cube minimal contenant les deux sphères est tel que les centres I et J des sphères soient sur la diagonale de ce cube. Appelons le cube ABCDEFGH et a la longueur d'un de ses côtés.
On « coupe » par le plan (ADG). Les points I et J sont sur [AG]. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AEG, on obtient AG=$\sqrt{3}a$.
Soit I' le projeté orthogonal de I sur (AC). On a AI'=AI=1, et appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AII' on obtient AI $=\sqrt{2}$.
Ainsi AG=AI+IJ+JG=2(1+$\sqrt{2}$).
Finalement a=$\dfrac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{3}$.

Exercice 2

On veut montrer qu'on peut les ordonner de 2^{n-1} façons.

Le dernier (n-ième) entier doit être soit supérieur à tous les autres, soit inférieur à tous les autres, donc soit c'est n, soit c'est 1. On a par conséquent 2 choix.

Puis, plaçons l'avant dernier : il doit être soit supérieur aux (n-2) premiers, soit inférieur aux (n-2) premiers, donc soit c'est n-1, soit c'est 2. On a par conséquent 2 choix.

Et ainsi de suite. On a par conséquent deux choix pour chaque entier, sauf le premier pour lequel il n'y aura qu'une possibilité. On a donc $2\ldots2 = 2^{n-1}$ façons de les ordonner.

Exercice 3

Il y a 525-42=477 étudiantes et 147-25=122 étudiantes mariées. Donc 477-122=355 étudiantes non mariées.
Or, il y a 470-86=384 femmes mariées et 1000-312=688 femmes donc 688-384=304 femmes non mariées.
On aboutit à une contradiction, le nombre d'étudiantes non mariées étant supérieur au nombre de femmes non mariées.

Corrigés des sujets des Terminales 2005

Exercice 1

Les convives et leurs places.
On peut commencer par étudier les petites valeurs de n, disons de 1 à 6 et essayer de réaliser la situation proposée. On constate aisément qu'elle est impossible.
Numérotons de 1 à n les places prises successivement , le sens de rotation étant arbitrairement choisi. Nommons xi le convive initialement assis à la place i.
Après le mouvement, on peut supposer que x1 reste assis à la place 1 (rotation de l'ensemble).
On peut également supposer que x2 a pris la place 4 (symétrie de l'ensemble).
L'étude du cas n=15 montre en plaçant les convives successivement comme indiqué que x6 se retrouve à la même place que x1, ce qui est exclu.
Les cas n=16 et n=17 montrent la possibilité de réaliser la situation proposée en plaçant les convives successivement comme indiqué.
Le cas n=3k (multiple de 3) donne une impossibilité comme le cas n=15 : x1 et xk+1 se retrouvent à la même place.
Regardons le cas n=3k+1, dont relève le cas n=16.
Pour i de p+1, xi prend la place 1+3(i-1). C'est le premier « tour ».
Le convive xi avec i=p+1 est à la place 3p+1, à côté de x1.
Pour i de p+2 à 2p+1, xi prend la place 3(i-p+1). C'est le deuxième « tour ».
Le convive xi avec i=2p+1 est à la place 3p, à côté de xi avec i=p+1.
Pour i de 2p+2 à 3p+1, xi prend la place 2+3(i-2p-2). C'est le troisième « tour ».
Le convive xi avec i=3p+1 se retrouve à la place 3p-1, à côté de xi avec i=2p+1.
La situation peut dons se réaliser dans ce cas.
Le cas n=3k+2 est analogue.

Bilan : on peut réaliser cette amusante situation pour n supérieur ou égal à 7 et non multiple de 3.

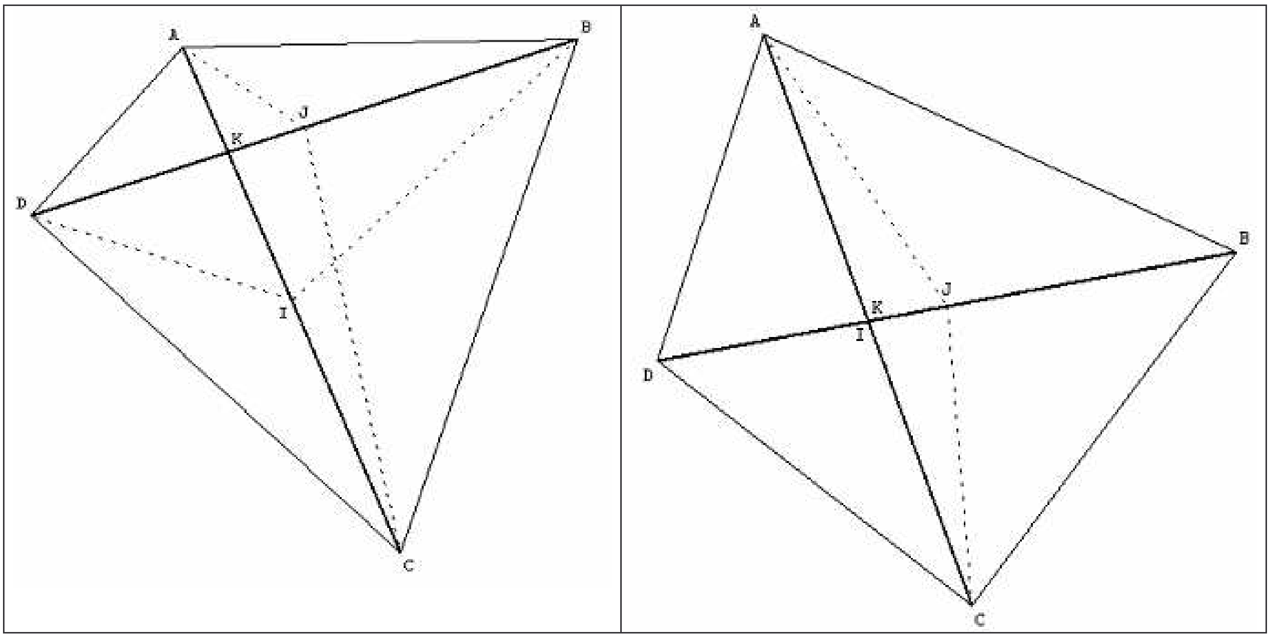
Exercice 2

<u>Rappel</u> :
Soient A, B, C trois points non alignés. Un point M est tel que les aires des triangles ABM et ACM sont égales si et seulement si M appartient à la médiane issue de A du triangle ABC.

Dans le quadrilatère ABCD, on appelle I le milieu de la diagonale [AC], J celui de [BD] et K le point d'intersection de (AC) et (BD).
Pour que les triangles PAB et PBC aient la même aire, il faut que P appartienne a (BI).
De même, pour que les triangles PAB et PAD aient la même aire, il faut que P appartienne a (AJ) ; pour que les triangles PAD et PDC aient la même aire, il faut que P appartienne a (DI) ; et pour que les triangles PCD et PBC aient la même aire, il faut que P appartienne a (CJ) . Donc P est le point commun des droites (AJ), (BI), (CJ) et (DI).

- Si le point I appartient à (BD), I est confondu avec K (seul point commun aux quatre droites précédentes) donc le point P existe si et seulement si I et J sont confondus c'est-à-dire si ABCD est un parallélogramme.

- Si le point I n'appartient pas à (BD), P doit être en I (point d'intersection de (BI) et (DI)), or P doit appartenir à (AJ) et (CJ) donc J doit appartenir à (AC).
  Si J appartient à (AC), il existe un unique point P : c'est I.
  Si J n'appartient pas à (AC), il n'existe pas de tel point P.



Exercice 3

On veut montrer qu'un tel ensemble contient au plus 2005 éléments.

1°) Un tel ensemble existe :

Les entiers compris entre 2006 et 4010 contient 2005 éléments et répond à la question car tout « vrai » multiple d'un entier de cet ensemble est supérieur ou égal à 4012.

2°) Un tel ensemble ne peut pas contenir plus de 2005 éléments :

Tout entier naturel non nul s'écrit de manière unique $2^{\alpha}(2p + 1)$ avec α et p des entiers naturels. Comme aucun élément n'est divisible par un autre, les facteurs impairs sont tous différents ; ces facteurs impairs étant compris entre 1 et 4009, il n'y en a que 2005 différents. Dans un tel ensemble, il ne peut donc pas y avoir plus de 2005 éléments.

Note : on peut généraliser ce résultat en remplaçant 4010 par 2n et 2005 par n (n un entier naturel non nul).