Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM

Rallye

Rallye
2007

Rapport du 34ème Rallye Mathématique d'Alsace

IREM de

Strasbourg

IREM de
Strasbourg

UFR de mathématique
et d'informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 90 24 01 30
Fax : (33) 03 90 24 01 65
Bibliothèque : (33) 03 90 24 61
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Patrick GENAUX, Claudine KAHN, Marie-Laure KOSTYRA,
Christiane OSWALD.

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 34ème fois en 2007. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Budapest, Düsseldorf, Francfort, Berlin, Hambourg, Vienne, Zurich, Sofia).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut disposer d'un rapport de l'année précédente ; les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale ; elle a réuni mille participants dont une centaine de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leur capacité inventive.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont très courts, rédigés de manière amusante, présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux annales et aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas guidée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.

Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle.

En Première, quatorze binômes sont primés : deux premiers prix, douze deuxièmes prix. Cette année les premiers prix récompensent les binômes ayant entièrement résolu deux exercices et largement abordé le troisième. Les deuxièmes prix sont composés des copies ayant bien résolu deux exercices.

En Terminale, quatorze binômes ont été sélectionnés : quatre premiers prix, quatre deuxièmes prix et six troisièmes prix. Les premiers prix concernent les élèves qui ont très bien résolu deux exercices et donné des idées qui auraient pu aboutir pour le troisième. Les deuxièmes prix récompensent les élèves qui ont bien traité deux exercices et donné quelques éléments pour le troisième. Les troisièmes prix sont attribués au élèves ayant correctement résolu deux exercices.

La remise des prix, présidée par Monsieur Gérald CHAIX, Recteur de l'Académie de Strasbourg et Chancelier des Universités d'Alsace, a lieu au Département de Mathématique de l'Université Louis Pasteur. Elle est suivie d'une réception offerte à l'Hôtel du Département par Monsieur Philippe RICHERT, Président du Conseil Général du Bas-Rhin.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, des appareils photos numériques pour fêter la 34ème édition :

- ◊ Le Rectorat de l'Académie de Strasbourg
- ◊ L'Université Louis Pasteur
- ◊ Le Département de Mathématiques de l'Université Louis Pasteur
- ◊ L'A.P.M.E.P
- ◊ Le Conseil Général du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Général du Haut-Rhin
- ◊ La Ville de Strasbourg
- ◊ Le S.I.A.S. d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville de Colmar
- ◊ La Ville d'Ensisheim
- ◊ La Ville de Haguenau
- ◊ La Ville de Kaysersberg
- ◊ La Ville de Lauterbourg
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Ville de St Louis
- ◊ La Communauté de Communes du pays de Thann
- ◊ La Communauté des Communes du Val d'Argent
- ◊ Le Château du Haut-Koenigsbourg d'Orschwiller
- ◊ Le musée Bartholdi de Colmar
- ◊ Le musée de l'Énergie Électrique Électropolis de Mulhouse
- ◊ Le musée animé du Jouet et du Petit train de Colmar
- ◊ Les musées de Strasbourg
- ◊ La Société naturelle et d'Ethnologie de Colmar
- ◊ L'Électricité de Strasbourg
- ◊ Les Dernières Nouvelles d'Alsace
- ◊ La société Calctech
- ◊ La société Texas Instruments
- ◊ Le Théatre du Jeune Public de Strasbourg

Nous remercions tout particulièrement le Conseil Général du Bas-Rhin pour son soutien et pour la réception à l'Hôtel du Département qu'il organise en l'honneur de nos lauréats.

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Proposent de participer au **Club France**

Pendant l'année de Terminale, vous serez suivi par des tuteurs, essentiellement des élèves d'Ecoles Normales Supérieures, qui vous proposeront régulièrement des exercices de Mathématiques du type de ceux que vous avez rencontrés au Rallye Mathématique d'Alsace ou aux Olympiades Académiques. Si vous vous distinguez, vous serez éventuellement invité à représenter la France aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour plus d'information sur toutes les activités proposées, vous pouvez également consulter le site d'Animath : **http://www.animath.fr**

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Cérémonie de la remise des prix

Rallye Mathématique d'Alsace 2007

Jeudi 28 juin 2007 à 17 heures 30

✓ Allocutions

Madame Catherine MONGENET
Directrice de l'UFR de Mathématique et d'Informatique

Monsieur Philippe NUSS
Directeur de l'IREM

Madame Marie-Christine WEYL
Conseillère Municipale et Communautaire, représentant Madame Fabienne KELLER, Maire de Strasbourg et Monsieur Robert GROSSMANN, Président de la Communauté Urbaine de Strasbourg

Monsieur Gérald CHAIX
Recteur de l'Académie de Strasbourg, Chancelier des Universités d'Alsace

♦ Compte rendu des épreuves

Membres du Comité Organisateur du Rallye Mathématique d'Alsace – IREM

♦ Lecture du palmarès et distribution des prix

Membres du Comité Organisateur du Rallye Mathématique d'Alsace – IREM

RÉCEPTION À L'HÔTEL DU DÉPARTEMENT

A l'issue de la remise des prix du Rallye Mathématique d'Alsace 2007
Jeudi 28 juin 2007 à 19 heures

✓ Allocutions

Monsieur Yves LE TALLEC
Conseiller Général du Bas-Rhin
Représentant Monsieur Philippe RICHERT, Président du Conseil Général du Bas-Rhin

Monsieur Alain BERETZ
Président de l'Université Louis Pasteur ou son représentant

Monsieur Gérald CHAIX
Recteur de l'Académie de Strasbourg, Chancelier des Universités d'Alsace

Palmarès des Premières

Premier prix

- ✓ HOSSEINI Lucas et SATHICQ Nicolas
  Professeur : Monsieur MATT, lycée International des Pontonniers, Strasbourg.
- ✓ BEY-KOEHL Romain et MEISSNER-BERNARD Claire
  Professeur : Madame SCHEURER et Monsieur PETIT, lycée International des Pontonniers, Strasbourg.

Deuxième prix

- ✓ DURAND Karina et SCHREIBER Marie-Sophie
  Professeur : Monsieur WENDLING, lycée Fustel de Coulanges, Strasbourg.
- ✓ AUBRY Jean-Etienne et RICHERT Quentin
  Professeur : Monsieur LACOMBE, lycée Louis Armand, Mulhouse.
- ✓ MARTIN Alexandre
  Professeur : Madame SCHINDELE, lycée Kléber, Strasbourg.
- ✓ FLORENCE Jacques et VITZIKAM Frédéric
  Professeur : Monsieur HAUBENESTEL, lycée Marcel Rudloff, Strasbourg.
- ✓ BASCH Sébastien et FROITIER Arnaud
  Professeur : Monsieur SCHELL, lycée André Maurois, Bischwiller.
- ✓ PARTY Eliot et PARTY Jules
  Professeur : Madame MASSON, Pôle Jean-Amos Coménius, Strasbourg.
- ✓ MEYER Delphine et SCHIBLER Agathe
  Professeur : Madame AZIN, lycée Jean Mermoz, Strasbourg.
- ✓ GAVOTY Elie et MARIN Sonia
  Professeur : Monsieur DREZET, lycée Fustel de Coulanges, Strasbourg.
- ✓ FRITSCH Charlotte et KUNCHLER Tom
  Professeur : Monsieur VELIKONIA, lycée Louis Armand, Mulhouse.
- ✓ ECHERT Morih et STOTZ Richard
  Professeur : Madame ARMAUD, lycée Français de Berlin, Allemagne.
- ✓ ANCEL Julie et WEISSBART Hugo
  Professeur : Monsieur BOBO-SEKE, LEGT Ribeaupierre, Ribeauvillé.
- ✓ ABERT David
  Professeur Monsieur OTTOBRINI, lycée Don Bosco, Landser.

Palmarès des Terminales

Premier prix

- ✓ DURRIVE Jean-Baptiste et LOPEZ-CORTEGANO Carlos
  Professeur : Monsieur Schwartz, lycée international des Pontonniers, Strasbourg.
- ✓ KOCHERSPERGER Matthieu et RONSE Henri
  Professeur : Madame KAHN, lycée Marie Curie, Strasbourg.
- ✓ SCHMITT Cyril et SCHMITT Thomas
  Professeur : Madame JAEGGY, lycée Episcopal de Zillisheim.
- ✓ AMARILLI Antoine et HALB Alexandre
  Professeur : Monsieur Weil, lycée international des Pontonniers, Strasbourg.

Deuxième prix

- ✓ GOFFINET Guillaume et MARTIN Christophe
  Professeur : Monsieur RICHTER, lycée André Maurois, Bischwiller.
- ✓ RAO Michel et STEPANTCHENKO Alexei
  Professeur : Monsieur WEIL, lycée international des Pontonniers, Strasbourg.
- ✓ BAUR Julien et FUHRER Joffrey
  Professeur : Madame JAEGGY, lycée Épiscopal de Zillisheim.
- ✓ ASFARI Stéphane et CHARNAY Clément
  Professeur : Madame KAHN, lycée Marie Curie, Strasbourg.

Troisième prix

- ✓ FABACHER Emilien et MESSMER Jean-Guillaume
  Professeur : Madame CHAGNARD, LEGT Robert Schumann, Haguenau.
- ✓ MARQUET Bertille et RASSER Céline
  Professeur : Monsieur BUR, lycée Blaise Pascal, Colmar.
- ✓ FRETZ Hélène et HANSMANN Aurélie
  Professeur : Madame TANOH, lycée Blaise Pascal, Colmar.
- ✓ BOCQUILLON Lucie et DAGRENAT Charlotte
  Professeur : Monsieur OURLIAC, Pôle Jean-Amos Coménius, Strasbourg.
- ✓ COUSTÉ Amaury et HEINTZ Mathilde
  Professeur : Madame CORNET, lycée Français de Dusseldorf, Allemagne.
- ✓ CESARE-MERRIAU Thomas et MATHIEU Valentin
  Professeur : Monsieur TINLAND, lycée français de Vienne (Autriche).

Sujets des Premières
21 mars 2007

Exercice 1

Sans utiliser votre calculatrice, comparer 13^{2006} et $12^{2006}+5^{2006}$, puis 13^{2007} et $12^{2007}+5^{2007}$.
Proposer des généralisations du phénomène observé.

Exercice 2

Chaque année, Philippe l'illustrateur publie un album qui comporte un dessin de plus que l'année précédente.
En 2008, il constate qu'il a publié 2008 dessins depuis le début de la collection.
En quelle année a-t-il commencé sa collection, et combien de dessins comportait son premier album ?

Exercice 3

On considère uniquement des triangles non aplatis dont les côtés sont des nombres entiers. On réalise en découpant du carton pour un périmètre donné toutes les plaques triangulaires distinctes possibles.
Y-a-t-il plus de plaques de périmètre 2010 cm que de plaques de périmètre 2007 cm ?

Sujets des Terminales
28 mars 2007

Exercice 1

Une cagnotte contient autant de pièces de 1 € et de 2 € que nécessaire.
On tire des pièces l'une après l'autre en tenant compte de l'ordre jusqu'à obtention d'une somme désirée.

1. De combien de manières obtient-on ainsi une somme de 5 € ?
2. De combien de manières obtient-on ainsi une somme de 34 € ?
3. Proposer une généralisation pour obtenir ainsi une somme de N € ?

Exercice 2

Dans cet exercice ABC est un triangle donné, G son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit.

1. Démontrer que parmi tous les points M intérieurs au triangle ABC, le point G est le seul à vérifier les égalités :

   Aire (MAB) = Aire (MBC) = Aire (MAC)

1. On suppose que les trois angles du triangle ABC sont aigus.
   De manière analogue, trouver une relation liant les aires des triangles MAB, MBC, MAC et les angles du triangle ABC (avec M intérieur au triangle ABC) vérifiée seulement par le point O.

Exercice 3

Sur une très longue table sont disposés à intervalles réguliers 2007 gâteaux différents. Le long de cette table se trouvent alignés 2007 enfants gourmands, à intervalles réguliers égaux à ceux qui séparent les gâteaux. Chaque enfant se trouve en face de son gâteau préféré.
Un plaisantin change des gâteaux de place…

Montrer que deux au moins de ces enfants se trouvent à la même distance de leur gâteau préféré.

ANCEL Julie et WEISBBART Hugo
Lycée Ribeaupierre - Ribeauvillé

RALLYE MATHEMATIQUE

I très bonne idée avec la formule du binôme (1)

Exercice 1

- Comparons 13^{2006} et $12^{2006}+5^{2006}$.

$*$ $13^{2006} = (12+1)^{2006}$.

Après quelques exemples, nous avons remarqué qu'on peut trouver le coefficient des puissances d'après cette technique :

$a+b$: $1a \; 1b$

$(a+b)^2$: $1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3$: $1a^3 + 3a^{(3-1)}b + 3ab^{(3-1)} + 1b^3$

$(a+b)^4$: $1a^4 + 4a^{(4-1)}b + 6a^2b^2 + 4ab^{(4-1)} + 1b^4$

Pour $(12+1)^{2006}$, $a = 12$ et $b = 1$

donc $(12+1)^{2006} = \underbrace{12^{2006}} + 2006 \times 12^{2005} + \dots + 2006 \times 12 + 1$

$*$ Comparer 13^{2006} et $\underbrace{12^{2006}} + 5^{2006}$ revient donc à comparer 5^{2006} et $2006 \times 12^{2005} + \dots + 2006 \times 12 + 1$

Or $5^{2006} = (5^{2005}) \times 5$ et :

$12^{2005} > 5^{2005}$; $2006 > 5$

donc $2006 \times 12^{2005} > 5 \times 5^{2005}$

d'où $5^{2006} < 2006 \times 12^{2005} + \dots + 2006 \times 12 + 1$

Finalement, $12^{2006} + 5^{2006} < 13^{2006}$.

- Comparons 13^{2007} et $12^{2007}+5^{2007}$. De la même manière :
  * $13^{2007}=(12+1)^{2007}=12^{2007}+2007\times12^{2006}+\ldots+1$
  * $5^{2007}=(5^{2006})\times5$

  Comme $13^{2007}=12^{2007}+2007\times12^{2006}+\ldots+1$, comparer 13^{2007} et $12^{2007}+5^{2007}$ revient à comparer : $2007\times12^{2006}+\ldots+1$ et $5^{2007}=5\times5^{2006}$

  On sait que $2007>5$ et $12^{2006}>5^{2006}$, d'où

  $2007\times12^{2006}>5\times5^{2006}$

  $\Leftrightarrow 2007\times12^{2006}>5^{2007}$.

  Par conséquent, $13^{2007}>12^{2007}+5^{2007}$

- Généralisons avec 13^n et 12^n+5^n :
  * $13^n=(12+1)^n=12^n+n\times12^{n-1}+\ldots+1$
  * $5^n=5(5^{n-1})$

  Comme $13^n=12^n+n\times12^{n-1}+\ldots+1$, comparer 13^n et 12^n+5^n revient à comparer $n\times12^{n-1}+\ldots+1$ et 5^n

  On sait que pour $n\geqslant2$, $12^{n-1}>5^{n-1}$,

  donc pour $n\geqslant5$, $5(5^{n-1})\leqslant n\times12^{n-1}$

  On vient de prouver que pour $n\geqslant5$, $13^n>12^n+5^n$
  * Pour $n=2$: $13^2=169$ et

    $12^2+5^2=144+25=169$

    donc $13^2=12^2+5^2$.
  * Pour $n=1$: $13^1=13$ et $12^1+5^1=17$

    donc $13^1<12^1+5^1$

FLORENCE Jacques et VITZIKAM Frédéric
Lycée Marcel Rudloff - Strasbourg

Exercice 2.

On déduit de l'énoncé que le nombre d'images par album suit le principe d'une suite arithmétique de formule :

$$u_{n+1} = u_n + 1$$

Cette relation par récurrence peut se mettre sous forme explicite :

$$u_n = u_0 + 1 \times n$$ de terme initial u_0 de raison $r = 1$

où u_0 est le nombre d'images du premier album, et n est le nombre d'années d'édition d'albums. On peut en déduire :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

D'après les propriétés de la somme d'une suite arithmétique :

$$2008 = \frac{(u_0 + u_n)(\text{nombre de termes})}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2008 = \frac{(u_0 + u_0 + n)(n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2008 = \frac{(2u_0 + n)(n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4016 = (2u_0+n)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4016}{n+1} = 2u_0+n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4016}{n+1} - n = 2u_0$$

$$\Leftrightarrow \quad u_0 = \frac{\frac{4016}{n+1}-n}{2}$$

On essaye à présent de trouver toutes les possibilités de n.

U_0 étant un entier naturel, $\dfrac{\frac{4016}{n+1}-n}{2}$ doit l'être également, donc $\dfrac{4016}{n+1}-n$ aussi, ainsi que $\dfrac{4016}{n+1}$. Donc, après décomposition en facteurs premiers de 4016, nous trouvons les valeurs possibles de $n+1$:

$$\begin{aligned}4016 &= 4016\times 1\\ &= 2008\times 2\\ &= 1004\times 4\\ &= 502\times 8\\ &= 251\times 16\end{aligned}$$

donc : $n+1 \in \{1; 2; 4; 8; 16; 251; 502; 1004; 2008; 4016\}$

Or, $\dfrac{\frac{4016}{n+1} - n}{2} \geqslant 0$ car $U_0 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \dfrac{4016}{n+1} - n \geqslant 0$

$\Rightarrow \dfrac{4016}{n+1} \geqslant n$

$\Rightarrow 4016 \geqslant n^2 + n$

Cette condition n'est PAS vérifiée pour les $(n+1) \geqslant 251$

donc, $n+1 \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$

$U_0 \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow \dfrac{\frac{4016}{n+1} - n}{2} \in \mathbb{N}$

en appliquant la formule $u_0 = \dfrac{\frac{4016}{n+1} - n}{2}$,

Déterminons U_0 pour chaque valeur de $n+1$

$n+1$	u_0
1	2008
2	1003,5
4	500,5
8	247,5
16	118

On remarque qu'il y a deux valeurs possibles répondant à la condition $U_0 \in \mathbb{N}$

$n_1 = 1-1 = 0$ $\qquad$ $n_2 = 16-1 = 15$

En admettant que Philippe n'ait pas commencé sa collection en 2008, il ne reste qu'une solution. n

L'illustrateur a donc commencé sa collection il y a 16 ans, en 1993, si l'on admet qu'il a déjà publié son album de 2008.

SCHMITT Cyril et SCHMITT Thomas
Lycée Episcopal - Zillisheim

Exercice 1.

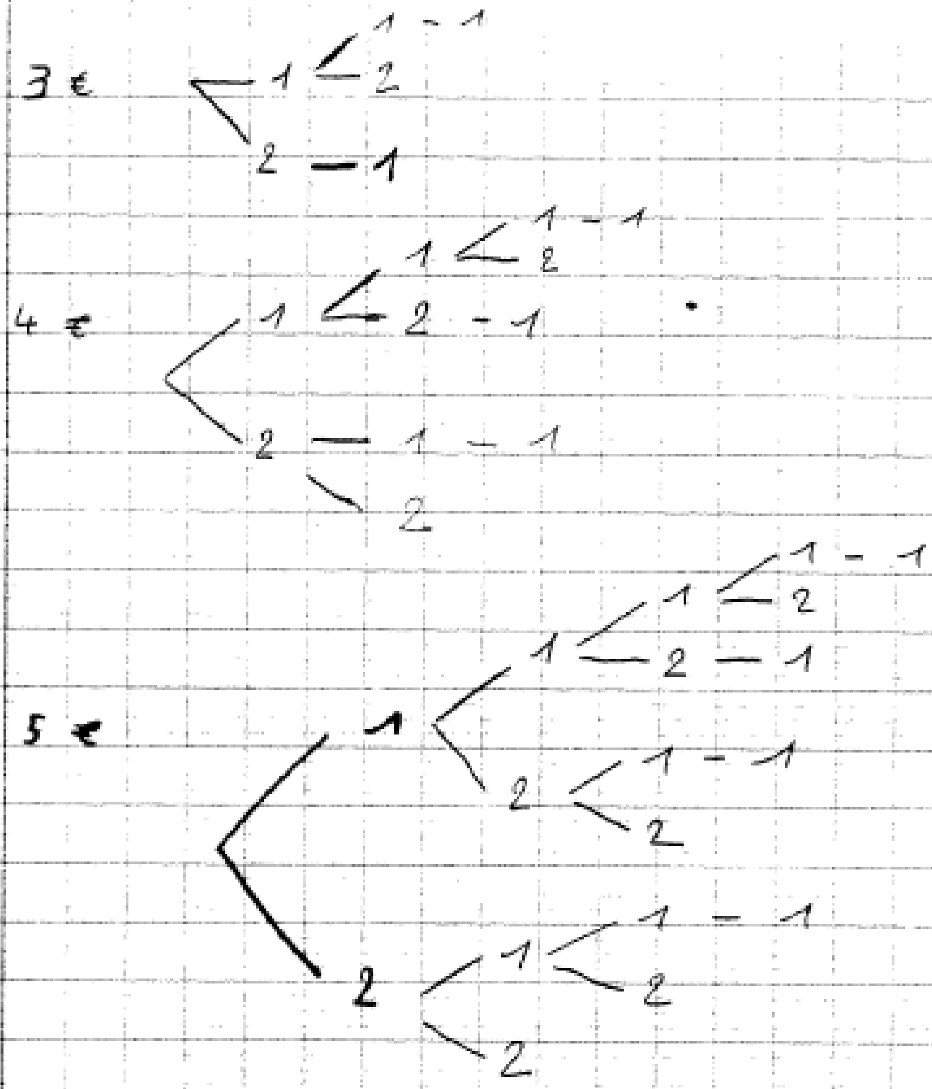
Une cagnotte contient autant de pièces de 1 € et de 2 € que nécessaire.
On tire des pièces l'une après l'autre en tenant compte de l'ordre jusqu'à obtention d'une somme désirée.

1. De combien de manière obtient-on ainsi une somme de 5 € ?

On réalise des arbres d'événements :

1 € : — 1

2 € : 1 — 1
2



Il y a donc 8 manière d'obtenir 5 €.

On remarque par ailleurs que chaque arbre est composé des deux précédent.
Ce qui veut dire que le nombre de manière d'obtenir une somme est égale à la somme des manière d'obtenir les deux sommes précédentes.

On pense donc à la suite de Fibonacci.

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

Démonstration :

si on veut obtenir la somme de n+2 €, la première pièce tiré sera 1€ ou 2€.

- si on tire en premier une pièce de 1€, il reste une somme de n+1 € à tirer. On a donc le nombre de manière d'obtenir n+1 € qui nous permettent d'obtenir n+2 €.

- si on tire en premier une pièce de 2 €, il reste une somme de n € à tirer. On a donc le nombre de manière d'obtenir n € qui nous permettent d'obtenir n+2 €.

Le nombre de manière total d'obtenir n+2 € sera donc celui d'obtenir n+1 € plus celui d'obtenir n €.

Soit v_n le nombre de manière d'obtenir n €
on a donc : $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.

<u>2. De combien de manières obtient-on ainsi une somme de 34 €.</u>

On utilise la récurrence sur la calculatrice
On obtient $v_{34} = 9\ 227\ 465$

Il y a donc 9 227 465 manière d'obtenir 34 €

3. Proposer une généralisation pour obtenir ainsi une somme de N € ?

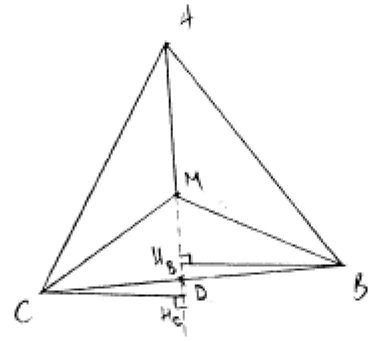
On a vu que le principe est la suite de fibonacci.

Pour obtenir ainsi une somme de N € on a donc les manières d'obtenir $N-1$ € plus les manières d'obtenir $N-2$ €.

RAO Michel et STEPANTCHENKO Alexeï
Lycée International - Strasbourg

Exercice 2 :

1.



Soient H_B et H_C les projetés orthogonaux de B et C sur (AM).

On suppose que : $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MAC) = \mathcal{A}(MBC)$

Comme $\mathcal{A}(MAC) = \mathcal{A}(MAB)$, alors :

$CH_C = BH_B$ (car $\frac{1}{2} AM \times CH_C = \frac{1}{2} AM \times BH_B$).

Soit D l'intersection de (AM) et (BC), alors

$\frac{1}{2} \cdot AD \times CH_C = \frac{1}{2} AD \times BH_B$

$\mathcal{A}(ACD) = \mathcal{A}(ABD)$

Donc on a : $CD = CB$, car ABD et ACD ont la même hauteur issue de A.

De la même façon, on montre que M est l'intersection des trois médianes du triangle : c'est le centre de gravité de ABC

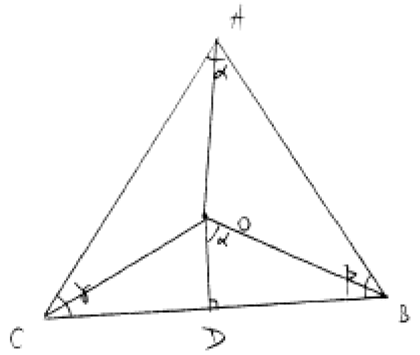
Inversement, on montre que

$$\mathcal{A}(GAB) = \mathcal{A}(GBC) = \mathcal{A}(GAC),$$

en "remontant" la démonstration précédente.

Donc : $\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MBC) = \mathcal{A}(MAC) \iff M = G$.

2.



Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC.

Alors : $OA = OB = OC = R$.

On note $\widehat{A} = \alpha$, donc l'angle au centre $\widehat{COB}$ vaut

$$\widehat{COB} = 2\widehat{A} = 2\alpha.$$

D est le pied de la hauteur de OBC issue de O, donc D est le milieu de [BC] car OBC est isocèle en O.

De $\begin{cases} CD = BD \\ OD = OD \\ OC = OB \end{cases}$ on obtient : OCD et OBD sont isométriques.

Donc $\widehat{COD} = \widehat{BOD} = \alpha$.

De plus, OBD est rectangle en D, donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(OBD) &= \frac{1}{2}\, OD \times BD \\ &= \frac{1}{2} R \times \cos\alpha \times R \times \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2} R^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}(OBC) = R^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha$.

Finalement, de la même manière on trouve : $\mathcal{A}(OAC) = R^2 \cdot \cos\beta \sin\beta$

et $\mathcal{A}(OAB) = R^2 \cos\gamma \sin\gamma$.

KOCHERSPERGER Matthieu et RONSE Henri
Lycée Marie Curie - Strasbourg

Exercice 3

On démontre par l'absurde qu'il est impossible que chaque enfant se trouve à une distance différente de son gateau. Nous nous mettons donc dans la peau du plaisantin.
On va donc essayer de déplacer chaque gateau de façon à les déplacer chacun d'une distance différente. Il faut donc un gateau se déplaçant de 2006 places, un de 2005 places, un de 2004 ... un de 2, un de 1 et un de 0 places. Les gateaux seront donc éloignés de l'enfant correspondant du nombre de places dont on les a déplacé. On notera tout d'abord le gateau qui ne change pas de place en considérant qu'on a trouvé celui qui permettra de satisfaire l'énoncé. On procèdera ensuite de la manière suivante, en considérant une fois encore chaque déplacement comme judicieux (on différencie les gateaux déjà déplacé et les gateaux pas encore déplacés) : on prend un gateau pas encore déplacé que l'on amène à une place où il n'y a pas encore de gateau déplacé, il y a deux possibilités : soit le gateau initialement présent sur cette table y est encore soit on l'a déjà déplacé. Si le gateau est encore là alors on le prend pour effectuer un nouveau déplacement si il n'est plus on change de place pour trouver un nouveau gateau pas encore déplacé on aura alors fermé une boucle.
Étant donné que à chaque déplacement on comble une place et on enlève un gateau il n'y aura toujours au maximum qu'une place sans aucun gateau. Quand on arrive à une telle place on aura donc forcément jamais fait aucun déplacement les mains vide depuis

que l'on a pris le gateau qui s'y trouvait
par exemple

En arrivant a la place "départ" on a donc effectué une boucle car seul cette case était complètement vide.

A la fin de l'opération toutes les places étant remplies on aura donc effectué un certain nombre de boucles.

Une boucle regroupe une somme de déplacement, étant donné qu'elle commence et s'arrête à la même le nombre de déplacements vers la gauche et vers la droite sont égaux le nombre de déplacement totale est donc pair. En additionnant le nombre de déplacem de chaque boucle (on ne compte donc que les déplacements avec un gateau) on obtient finalement un nombre pair de déplacement. Ce nombre totale de déplacement est égale à la somme des écarts entre chaque enfant et son gateau c'est à dire :

$1 + 2 + 3 + \ldots + 2005 + 2006$. Dans cette somme on a $\frac{2006}{2}$ nombres impairs, ce qui fait 1003 nombres impairs. Ces nombres sont mis deux à deux donc 1003 étant impair leur somme est impair.

La somme totale de déplacement à effectuer devrait donc être impair. On arrive donc à une contradiction qui montre qu'il est impossible d'éloigner chaque gateau d'un nombre de places différents de l'enfant correspondant.

Commentaires et solutions pour le Rallye de Première 2007

Exercice 1

Cet exercice a été abordé et correctement traité dans de nombreuses copies. Les triplets pythagoriciens, c'est-à-dire les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que $a^2+b^2=c^2$, ont été vus par les candidats et permettaient un traitement élégant de ce problème.

Ainsi, notant que

$13^2 = 12^2 + 5^2$, on a $13^{2006} = (12^2 +5^2)^{1003} >12^{2006} +5^{2006}$.

Ensuite

$13^{2007} >13(12^{2006} + 5^{2006})$

$>12^{2007} + 5^{2007}$

Une récurrence facile permet de montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $13^n > 12^n + 5^n$, sur le modèle de ce qui précède. Le phénomène observé se généralise avec les triplets pythagoriciens.

Conclusion : Les copies ont réservé de bonnes surprises. Les raisonnements effectués sont en général corrects et le phénomène bien vu. C'est l'exercice le mieux traité en première.

Exercice 2

Là encore de bonnes solutions ont été observées. L'illustrateur peut commencer en 2008 et donc publier 2008 dessins pour ce premier album. Mettons de côté ce cas très particulier.

Notons n le nombre de pages du 1^{er} album et k+1 le nombre d'albums publiés en comptant celui de 2008.

Nous avons donc $n+(n+1)+\ldots+(n+k)=2008$ c'est-à-dire $(2n+k)(k+1)=2^4.251$

La parité impose alors $2n+k=251$ et $k+1=16$, ce qui donne $n=118$ et $k=15$.

Le premier album comptait donc 118 pages et sa date de publication est 1993. C'est 1992 si on considère qu'en 2008, au moment du compte, il n'y a pas encore eu d'album publié.

Conclusion : Les entiers 118 et 1993 ont été souvent obtenus. Dans certaines copies, on se borne à vérifier que c'est un cas de figure possible, sans montrer que c'est le seul. Une solution correcte demandait naturellement cette unicité (en dehors du cas de début de parution en 2008…)

Exercice 3

Cet exercice est de loin celui qui a donné les moins bons résultats. L'énoncé n'a pas toujours été compris. Passons sur les « preuves » du type 2010>2007 donc il y a d'avantage de plaques de type 2010 que de plaques de type 2007.

Une plaque de type 2010 est donc la donnée de $(X,Y,Z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $X \leq Y \leq Z$, avec $X+Y>Z$ et $X+Y+Z=2010$.

Notons $E_{2007}=\{(X,Y,Z) \in \mathbb{N}^{*3}, X\leq Y\leq Z, X+Y+Z=2007\}$ et E_{2010} analogue. Il s'agit de vérifier, afin de voir que les nombres cherchés sont égaux, que les cardinaux de E_{2007} et de E_{2010} sont les mêmes.

Si $(X,Y,Z) \in E_{2007}$, montrons que $(X+1,Y+1,Z+1) \in E_{2010}$.

$X+Y+Z=2007$ donc $(X+1) + (Y+1) + (Z+1) = 2010$.

$X \leq Y \leq Z$ donc $X+1 \leq Y+1 \leq Z+1$.

De plus $(X+1)+(Y+1) > Z+2 > Z+1$ d'où le résultat.

Réciproquement, si $(a,b,c) \in E_{2010}$, montrons que $(a-1, b-1, c-1) \in E_{2007}$.

$a+b+c = 2010$ donc $(a-1)+(b-1)+(c-1) = 2007$.

$a \leq b \leq c$ donc $a-1 \leq b-1 \leq c-1$

$a+b \geq c+1$, car $(a,b,c,) \in E_{2010}$.

Si $a+b = c+1$, alors $2c+1 = 2010$, ce qui est exclu (parité).

On a donc $a+b \geq c+2$ donc $(a-1)+(b-1) > c-1$.

Il reste à voir que $a-1 \geq 1$ donc que $a \geq 2$.

Si $a=1$, alors $1+b>c$ donc $b \geq c$. Or $b \leq c$ donc $b=c$ et $2b+1=2010$, ce qui est exclu.

Pour suite, on a le résultat voulu. Tout ceci prouve que l'application $(X,Y,Z) \longmapsto (X+1, Y+1, Z+1)$ réalise une bijection entre E_{2007} et E_{2010}. L'égalité des cardinaux en résulte.

<u>*Conclusion*</u> : Cet exercice était plus difficile que les deux autres. Il fallait voir que pour deux entiers, l'inégalité stricte $a < b$ s'écrit $a \leq b-1$. Une bonne description des ensembles considérés était déjà une difficulté pour la résolution de ce petit problème. La solution proposée utilise une bijection, outil naturel pour obtenir l'égalité des deux cardinaux. Ce vocabulaire n'était évidemment pas exigé des élèves de première. Nous avons rencontré quelques éléments de réponse, mais pas de résolution entièrement satisfaisante.

Commentaires et solutions pour le Rallye de Terminale 2007

Exercice 1

Cet exercice a été traîté de manière assez satisfaisante par bon nombre de candidats.

La différence s'est faite essentiellement sur le traitement de la troisième question.

1) Décomposer 5 euros : les 8 façons ont été presque toujours obtenues.

2) Décomposer 34 euros : là encore, pas de surprises, si ce n'est quelques oublis de configurations possibles.

A ce stade, certains ont déjà entrevu le lien avec la fameuse suite de Fibonacci, ce qui peut simplifier les calculs demandés.

3) Décomposer n euros : notant u_n le nombre de manières de décomposer n euros, on a $u_1=1$ et $u_2=2$. Pour obtenir une décomposition de n+2 euros, on prend une décomposition de n+1 euros à laquelle on rajoute 1 pièce de 1 euro ou on prend une décomposition de n euros à laquelle on rajoute une pièce de 2 euros.

Ainsi, on obtient la formule de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$. Elle permet de calculer facilement les décompositions de 5 et 34 euros demandées et constitue une réponse valable à la troisième question.

Remarquons que certains binômes, partant de cette récurrence, ont explicité le terme général de la suite (u_n) manifestement étudiée dans de nombreuses terminales de l'Académie.

Conclusion : cet exercice a été relativement classant car de difficulté croissante et donc accessible au plus grand nombre. Le petit raisonnement de dénombrement proposé ici a été rencontré et correctement explicité dans quelques copies.

Exercice 2

1) Cet énoncé de géométrie du triangle a souvent dérouté les binômes qui s'y sont attelés. La formulation des questions nécessitait clairement de montrer que le point envisagé était effectivement solution du problème posé et qu'il était le seul. Autrement dit, une question d'existence et d'unicité.

Le centre de gravité : si G est le centre de gravité du triangle ABC, il est bien connu qu'il est situé sur chaque médiane de ABC, au tiers de la longueur de celle-ci en partant du pied.

Notons I le milieu de [BC], H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A et K celui de la hauteur du triangle GCB issue de G.

Si ABC est isocèle en A, il est facile de voir que Aire(GCB)=Aire(ABC)/3.

Si ABC n'est pas isocèle en A, alors H et I sont distincts.

Le théorème de Thalès donne GK/AH=GI/AI=1/3 et donc GK=AH/3.

Alors, Aire(BGC)=GK.BC/2=AH.BC/6=Aire(ABC)/3.

On procède de même pour les deux autres aires et donc le point G convient.

Si un point M intérieur au triangle ABC vérifie l'égalité des aires, alors Aire(MAB)=Aire(GAB)=Aire(ABC)/3.

Les triangles MAB et GAB ayant même aire et un côté commun [AB], M est sur la parallèle à la droite (AB) passant par G, les deux triangles ayant même hauteur. M est donc par symétrie sur la parallèle à la droite (BC) passant par G, donc M=G.

2) Le centre du cercle circonscrit : l'angle au centre étant le double de l'angle inscrit, on a aisément Aire(OAB)=R^2.sin(2C)/2 et de même pour Aire(OAC) et Aire(OBC). Ainsi, on obtient la relation

(*) Aire(OAB)/sin(2C)=Aire(OAC)/sin(2B)=Aire(OBC)/sin(2B).

Réciproquement, supposons que M est un point intérieur au triangle tel que Aire(MAB)/sin(2C)=Aire(MAC)/sin(2B)=Aire(MBC)/sin(2B) et notons α cette valeur commune.

On calcule l'aire du triangle ABC de deux manières.

M étant intérieur au triangle ABC, on a d'une part

Aire(MAB)+Aire(MBC)+Aire(MAC)=Aire(ABC)

et d'autre part

Aire(MAB)+Aire(MBC)+Aire(MAC)= α(sin(2A)+sin(2B)+sin(2C)).

O est également intérieur au triangle ABC donc

Aire(ABC)=Aire(OAB)+Aire(OBC)+Aire(OAC)= R^2(sin(2A)+sin(2B)+sin(2C))/2.

On en déduit que α= $R^2/2$ puis que

Aire(MAB)/sin(2C)=Aire(OAB)/sin(2C)

donc que

Aire(MAB)=Aire(OAB).

M est donc sur la parallèle à la droite (AB) passant par O puis de même sur la parallèle à (BC) passant par O. Finalement, M=O et une solution à la question posée est donc (*).

<u>*Conclusion*</u> : la première question a été souvent abordée mais l'unicité rarement traitée de manière satisfaisante. La seconde question, plus difficile car la relation sur les aires n'était pas proposée dans l'énoncé, n'a guère eu de succès. Il est vrai qu'elle nécessitait davantage d'initiative.

Exercice 3

Le troisième exercice proposé était millésimé 2007 et sa résolution a connu selon les binômes des fortunes diverses. Très bien appréhendé par certains, l'énoncé a parfois été compris de manière erronée par d'autres.

Il s'agit de montrer que l'on peut trouver deux enfants effectuant le même déplacement latéral (au signe près) pour rejoindre leur gâteau.

Numérotons les enfants de 0 à 2006, ainsi que les gâteaux, en partant d'un des bouts de la table.

Les enfants sont donc aux abscisses 0,…2006 et après le passage du plaisantin, le gâteau de l'enfant i est à l'abscisse g_i. Son déplacement latéral est $d_i=g_i-i$ et il s'agit de montrer que deux tels déplacements au moins ont la même valeur absolue.

Si ce n'est pas le cas, les $|d_i|$ forment une permutation de 0,..,2006.

Il y a donc 1003 déplacements latéraux impairs et 1004 pairs.

La somme des déplacements est nulle car la somme des i est égale à celle des g_i.

La somme des 1003 déplacements impairs est un entier impair et celle des 1004 déplacements pairs est un entier pair : leur somme ne peut pas être nulle, d'où la solution de l'exercice.

Conclusion : cet énoncé gourmand était aux yeux des concepteurs du Rallye le plus délicat. La mise en forme du problème posé constituait une part non négligeable de la résolution. Des solutions fort correctes ont été rencontrées, ce dont nous nous réjouissons. Le lecteur attentif de ces lignes pourra généraliser cet exercice pâtissier à des entiers autres que 2007.