Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM

Rallye
Rallye
2013

Rapport du 41ème Rallye Mathématique d'Alsace

IREM de
Strasbourg
IREM de
Strasbourg

UFR de mathématique
et d'informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Patrick GENAUX, Claudine KAHN, Marie-Laure KOSTYRA, Christiane OSWALD.

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 41ème fois en 2013. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich.)

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles à la rubrique « rallye » sur le site de l'IREM (http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale ; elle a réuni environ huit cent participants dont trente cinq de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s’inscrit entièrement dans le cadre des directions actuelles à ce sujet.

En Première, quinze binômes et un singleton sont primés : un premier prix exceptionnel, trois premiers prix, six deuxièmes prix et six troisièmes prix.

En Terminale, quatorze binômes ont été sélectionnés : deux premiers prix exceptionnels, deux premiers prix, cinq deuxièmes prix et cinq troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix, présidée par Madame Armande LE PELLEC MULLER, Recteur de l'Académie de Strasbourg et Chancelier des Universités d'Alsace, a lieu au Conseil Général du Bas-Rhin. Elle est suivie d'une réception offerte à l’Hôtel du Département par Monsieur Guy-Dominique KENNEL, Président du Conseil Général du Bas-Rhin.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 41$^{\text{ème}}$ édition :

- ◊ Le Rectorat de l'Académie de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L’UFR de Mathématique et d’Informatique
- ◊ Le Département de Mathématiques de l'Université de Strasbourg
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ Le Conseil Régional d’Alsace
- ◊ Le Conseil Général du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Général du Haut-Rhin
- ◊ La Ville de Strasbourg
- ◊ Le S.I.A.S. d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville de Colmar
- ◊ La Ville d’Erstein
- ◊ La Ville de Mulhouse
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Ville de St Louis
- ◊ La Communauté de Communes de Thann et de Cernay
- ◊ Les Dernières Nouvelles d’Alsace
- ◊ Le CME du Bas-Rhin
- ◊ Le Musée de la Régence d’Ensisheim
- ◊ Le Musée du Chemin de Fer de Mulhouse
- ◊ La société CASIO
- ◊ La société Texas Instruments
- ◊ Le Parc d’aventures du Lac Blanc
- ◊ Le Musée de l’Énergie Électrique Électropolis de Mulhouse
- ◊ Le Musée de l’Automobile de Mulhouse
- ◊ Le Musée du Pétrole de Pechelbronn
- ◊ Les Musées de la Ville de Strasbourg
- ◊ La Société d’Histoire Naturelle et d’Ethnographie de Colmar
- ◊ Le Maillon
- ◊ L’Office du tourisme et des congrès de Colmar

Nous remercions tout particulièrement le Conseil Général du Bas-Rhin pour son soutien et la mise à disposition de la salle des séances plénières pour la cérémonie de remise de prix et pour la réception à l'Hôtel du Département qu'il organise en l'honneur de nos lauréats.

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace

et

ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Proposent de participer au **Club France**

Pendant l'année de Terminale, vous serez suivis par des tuteurs, essentiellement des élèves d'Écoles Normales Supérieures, qui vous proposeront régulièrement des exercices de Mathématiques du type de ceux que vous avez rencontrés au Rallye Mathématique d'Alsace ou aux Olympiades Académiques. Si vous vous distinguez, vous serez éventuellement invités à représenter la France aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour plus d'information sur toutes les activités proposées, vous pouvez également consulter le site d'Animath **: http://www.animath.fr**

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Ceremonie de la remise des prix

Vendredi 28 juin 2013 à 17 heures

Reception a l'Hotel du Departement

à l'issue de la remise des prix
à 18 heures 30

- ✓ Allocutions

Monsieur Philippe MEYER, Conseiller Général du Bas-Rhin, Président de la Commission de la Jeunesse représentant Monsieur Guy-Dominique KENNEL, Président du Conseil Général du Bas-Rhin

Monsieur Edouard MEHL, Vice Président Sciences en société et représentant Monsieur Alain BERETZ, Président de l'Université de Strasbourg

Monsieur Yann BUGEAUD, Professeur de mathématiques à l'IRMA et représentant Monsieur Vincent BLANLOEIL, Directeur de l'UFR de Mathématique et d'Informatique

Madame Josiane NERVI, Directrice de l'IREM de Strasbourg

Monsieur Nicolas MATT, Conseiller Municipal en charge du développement économique et enseignement supérieur, représentant Monsieur Roland RIES, Maire de Strasbourg

Madame Lilla MERABET, Vice Présidente de la Commission Jeunesse du Conseil Régional et réprésentant Monsieur Philippe RICHERT, Président du Conseil Régional d'Alsace

Madame Armande LE PELLEC MULLER, Recteur de l'Académie de Strasbourg et Chancelier des Universités d'Alsace

- ✓ Présentation du Cercle Mathématique de Strasbourg

Madame Tatiana BELIAEVA, Maître de Conférences à l' IUFM de Strasbourg,

- ✓ Lecture du palmarès et distribution des prix

Membres du Comité Organisateur du Rallye Mathématique d'Alsace – IREM

- ✓ Ouverture de la réception

Monsieur Philippe MEYER, Conseiller Général du Bas-Rhin, Président de la Commission de la Jeunesse représentant Monsieur Guy-Dominique KENNEL Président du Conseil Général du Bas-Rhin

Rallye Mathématique d'Alsace 2013

Dates des épreuves

–

Terminales

mercredi 20 mars 2013

–

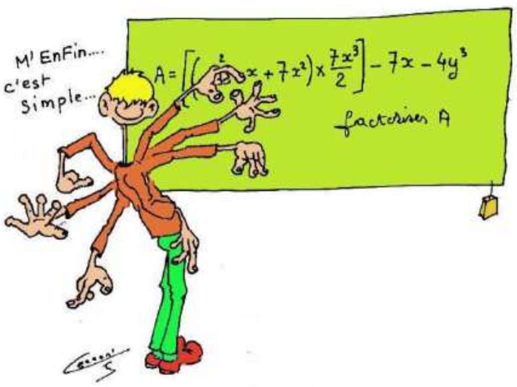
Premières

mercredi 10 avril 2013

Inscription des volontaires par groupes de deux

avant le 6 mars 2013

auprès de leur professeur de mathématiques



Pour tout renseignement : htpp://irem.u-strasbg.fr

Université de Strasbourg

académie Strasbourg

Ministère de l'Éducation nationale

Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche

IREM Strasbourg

Palmarès des Premières 2013

Premier prix exceptionnel

- ✓ RAKOVSKY Valentin et ROUSSEAUX Edouard
  Professeur : Madame COLLETTE, lycée Vauban, Luxembourg

Premier prix

- ✓ PONSARD Bastien et SENGER Nicolas
  Professeur : Monsieur DUDT, lycée Adrien Zeller, Bouxwiller
- ✓ BARDET Valentin et IBATA Neil
  Professeur : Monsieur PETIT, lycée International, Strasbourg
- ✓ GIROUDOT Charles et ROSUNEE Ashveen
  Professeur : Madame HAMMAN, lycée Kleber, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ FLEUROTTE Manon
  Professeur : Madame BRILL, lycée du Haut-Barr, Saverne
- ✓ FEHR Mathieu et HILD Aurélia
  Professeur : Madame OTTMANN, lycée Ribeaupierre, Ribeauvillé
- ✓ DEVIENNE Alexandre et LABAT Camille
  Professeur : Madame TURATI, lycée français Marie Curie, Zurich
- ✓ ROUSSEAU Agathe et TORTORELLI Florian
  Professeur : Madame SEEBERT, lycée Théodore Deck, Guebwiller
- ✓ BERBACH Adrien et MULLER Maxime
  Professeur : Monsieur METZ, Séminaire des Jeunes, Walbourg
- ✓ MARTIN Damien et UHL Quentin
  Professeur : Madame HAMMAN, lycée Kleber, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ HOHNADEL Emile et LARUELLE Florian
  Professeur : Monsieur BOHLER, lycée Jean-Jacques Henner, Altkirch
- ✓ FISCHER Maïlys et FOEGEL Martial
  Professeur : Monsieur KLINGELSCHMITT, lycée Jean Mermoz, Saint Louis
- ✓ LANG Lorette et RONCE Nathan
  Professeur : Madame BACHSCHMIDT, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- ✓ GOFFENEY Amandine et GRANDADAM Patrick
  Professeur : Madame STEFANI, lycée Jean Mermoz, Saint Louis
- ✓ BACHMANN Camille et FEVRE Arnaud
  Professeur : Monsieur JACQUEY, lycée Kirschleger, Munster
- ✓ GRANGER Cyril et ORTNER Philippe
  Professeur : Monsieur OTTOBRINI, lycée Don Bosco, Landser

Palmarès des Terminales 2013

Premier prix exceptionnel

- ✓ VINCENTZ Arthur et LEVY Nicolas
  Professeur : Madame SILVA, lycée épiscopal, Zillisheim.
- ✓ MEYER Charles et HE Matthieu
  Professeur : Monsieur NISSE, lycée St André, Colmar.

Premier prix

- ✓ RANDE Arthur et NUSSBAUMER Clément
  Professeurs : Mesdames GABUS et LAURENT, lycée Henner, Altkirch.
- ✓ DEMIRCIGIL Mete et MARTEAU-FEREY Ulysse
  Professeur : Madame COLLETTE, lycée Vauban, Luxembourg.

Deuxième prix

- ✓ LI Zi-Long et RUCH Léa
  Professeur : Monsieur ALATI, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg.
- ✓ PODELSKI Constantin et RUMPLER Eva
  Professeur : Monsieur ROTH, lycée Kléber, Strasbourg.
- ✓ FLORIN Franklin et LAMOUILLE Armand
  Professeur : Monsieur GASSER, lycée Rochambeau, Washington.
- ✓ SEMENOV Alexander et DELZANT Julie
  Professeur : Monsieur SCHWARTZ, lycée international des Pontonniers, Strasbourg.
- ✓ SEIFI Faramad et UHL Xavier
  Professeurs : Messieurs ALTSCHUH et ALATI, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg.

Troisième prix

- ✓ BENJIDA Samia et HINSBERGER Laure
  Professeur : Monsieur HIEGEL, lycée Kléber, Strasbourg.
- ✓ WANG Florence et KASTNER Alexander
  Professeurs : Madame SCHEURER et Monsieur ALILOUCH, lycée international des Pontonniers, Strasbourg.
- ✓ GROELLY Florian et SCHNITZLER Pierre-Louis
  Professeur : Monsieur OTTOBRINI, lycée Don Bosco, Landser.
- ✓ SIGNARDIE Tanguy et SCHAEFFER Thibaut
  Professeurs : Madame SCHNEIDER et Monsieur RICHTER, lycée André Maurois, Bischwiller.
- ✓ PILLIAT Emmanuel et KUENEMANN Anthony
  Professeur : Monsieur VELIKONIA, lycée Louis Armand, Mulhouse.

Rallye Mathématique d'Alsace 2013

Avec le soutien de :

L'UFR de Mathématique et d'Informatique

Le Conseil Général du Haut-Rhin

Le Conseil Régional d'Alsace

Les Dernières Nouvelles d'Alsace

Les Villes de
Barr, Colmar, Erstein, Kintzheim, Mulhouse, Obernai, Ribeauvillé, St Louis

La Communauté de Communes de Thann et de Cernay

Le Syndicat Intercommunal pour les Affaires Scolaires d'Altkirch

Le Crédit Mutuel Enseignants du Bas-Rhin

Vendredi 28 juin 2013

Conseil Général du Bas-Rhin

Proclamation des résultats 17h00

Réception des lauréats 18h30

Organisé par :

Ministère de l'Éducation nationale

Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche

http://irem.u-strasbg.fr

Sujets des Premières
10 avril 2013

Exercice 1 :

Anne, Nathalie et Cécile se présentent à une élection. Elles ne participent pas au vote. Chaque électeur doit voter pour une et une seule candidate.

1. S'il y a 40 électeurs, combien y a-t-il de répartitions possibles pour ces 40 voix ?
2. Qu'en est-il avec 2013 électeurs ?

Exercice 2 :

ABC est un triangle isocèle en A qui a la propriété suivante : la bissectrice de l'angle en B de ce triangle coupe le segment [AC] en un point D tel que BCD soit un triangle isocèle en B.

1. Donner la mesure en radians de tous les angles des triangles ABC et BCD.
2. On sait que BC=1. Exprimer la longueur AB en fonction de $\sqrt{5}$.

Exercice 3 :

Christine dispose de manière aléatoire tous les entiers de 1 à n^2 sur les cases d'un échiquier carré ayant n lignes et n colonnes en respectant toutefois les contraintes suivantes : le produit des entiers de la première colonne est égal à celui des entiers de la première ligne, le produit des entiers de la deuxième colonne est égal à celui des entiers de la deuxième ligne, et ainsi de suite.

1. Est-il possible de construire un tel carré pour $n = 2$?
2. Proposer un tel carré pour $n = 3$ et pour $n = 4$.
3. Montrer qu'il n'est pas possible de construire un tel carré pour $n = 9$.

Sujets des Terminales
20 mars 2013

Exercice 1 :

François attribue à chaque nombre entier strictement positif une couleur, soit bleue, soit rouge. Pour cela, il suit la règle suivante : si trois nombres (distincts ou non) ont la même couleur, leur somme a également cette couleur. On sait que la couleur rouge a été attribuée au nombre 58 et que la couleur bleue a été attribuée de nombreuses fois.
Quelle couleur a été attribuée au nombre 40 ? Et au nombre 2013 ?

Exercice 2 :

Trois chemins délimitent un terrain qui a la forme d'un triangle rectangle. Sur ce terrain est creusé un étang de forme circulaire. Il y a sur chacun des trois chemins un point situé au bord de l'étang. Le chemin le plus long est ainsi divisé en deux tronçons, l'un de 100 mètres et l'autre de 30 mètres.
Quelle est l'aire du terrain et quel est le rayon de l'étang

Exercice 3 :

Les billets d'une tombola sont tous numérotés. Le premier porte le numéro 1, le deuxième porte le numéro 2 et ainsi de suite. Tous les billets ont été distribués.
Sont gagnants les billets sur lesquels on peut lire, de gauche à droite, un « 1 » suivi, pas forcément immédiatement, d'un « 3 ». C'est le cas, par exemple, du numéro 13, du numéro 135, du numéro 153, du numéro 813, du numéro 1038. En revanche, les billets portant le numéro 231 ou le numéro 351 sont perdants.

1. Dans le cas où l'organisation distribue entre 200 et 1400 billets, peut-il y avoir exactement 10 % de gagnants ?

2. L'organisation annonce (avec raison) qu'il y a exactement une chance sur 10 de gagner et qu'un nombre de billets à quatre chiffres a été imprimé. Combien a-t-elle distribué de billets ?

Commentaires pour le Rallye de Première et de Terminale 2013

Cette année, 400 binômes représentant donc 400 élèves de première et 400 élèves de terminale ont participé aux épreuves du Rallye. La participation est donc sensiblement la même que celle de l'année précédente.

Nous sommes heureux de constater l'excellent niveau des copies dans leur ensemble. C'est un fait remarquable, surtout si on le met en parallèle de la relative désaffection des sciences exactes observée auprès des élèves.

Les premier prix exceptionnels récompensent des copies excellentes à tous égards. Les trois exercices y sont intégralement traîtés, sans erreur et la rédaction est d'une grande précision et concision.

Les premiers prix correspondent à des copies dans lesquelles les trois exercices sont résolus dans leur intégralité avec parfois quelques maladresses de rédaction.

Les deuxièmes prix sont des binômes qui ont dominé deux exercices et ont apporté des éléments de résolution significatifs pour le troisième.

Enfin, les troisièmes prix récompensent des bonnes copies qui ont bien résolu deux exercices sur les trois.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les nombreuses bonnes solutions rencontrées.

Copies des Premières

BARDET Valentin et IBATA Neil
Lycée International – Strasbourg
Exercicen°1

Exercice 1 :

Intéressons-nous au score d'une candidate. Elle peut avoir un score compris entre 0 et 40. Il suffit de dénombrer le nombre de répartitions différentes du score entre les deux autres candidates pour chaque valeur entre 0 et 40.

Pour un score de 0 pour la première candidate, il existe 41 répartitions différentes du score de la deuxième candidate, qui peut être compris entre 0 et 40. Le score de la troisième candidate est déterminé par celui des deux autres. Pour un score de 1 chez la deuxième candidate, il reste 39 à répartir chez les deux autres, soit 40 répartitions différentes, et ainsi de suite.

Soit n le nombre de voix de la première candidate. Il restera $40-n$ voix à répartir entre les deux autres candidates. La candidate 2 aura au maximum $40-n$ voix, et au minimum 0 voix, ce qui fera un total de $(40-n+1)$ $=41-n$ répartitions différentes du score pour chaque valeur de n. Ainsi à la somme du nombre des ~~des~~ répartitions différentes pour chaque valeur de n sera (pour n allant de 0 à 40) :

$$(41-0)+(41-1)+(41-2)+\dots+(41-40)$$

Séparons les termes des parenthèses. On a 41 valeurs de n différentes donc 41 termes. Il suffit donc de faire :

$$41\times 41-\frac{40\times 41}{2}=861$$

Il y aura donc 861 répartitions différentes de 40 voix entre Anne, Nathalie et Cécile.

Puisque la somme des nombres de 1 à n est $\frac{n(n+1)}{2}$.

2) On applique le même raisonnement pour 2013. On aura 2014 répartitions différentes des voix de la première candidate, donc pour n le nombre de voix de celle-ci la deuxième candidate aura au maximum $2013-n$ voix et au minimum 0, soit un total de $(2013-n+1)=2014-n$ répartitions différentes du score pour chaque valeur de n.

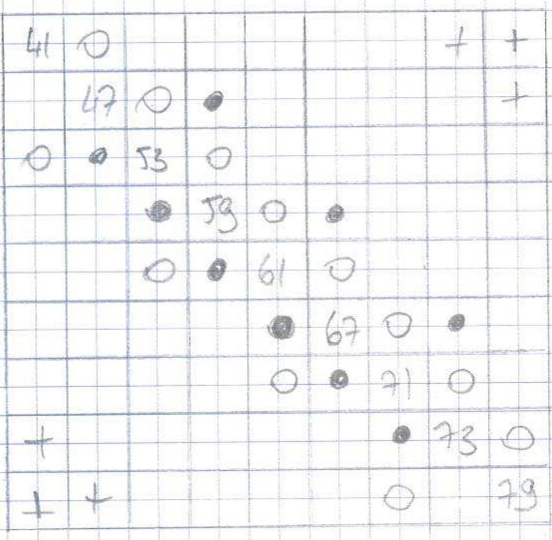
Ainsi : la somme du nombre de répartitions différentes pour chaque valeur de n allant de 0 à 2013 sera :

$$(2014-0)+(2014-1)+(2014-2)+(2014-3)\dots+(2014-2013)$$

La somme des nombres de 1 à q étant $\frac{q(q+1)}{2}$, on peut ainsi séparer les 2014 termes de la somme ci-dessus :

$$2014\times2014-\frac{2013\times2014}{2}=4056196-2027091=\boxed{2029105}$$

Il y aura donc 2029105 répartitions différentes de 2013 roses entre Anne, Nathalie et Cécile



Exemple de remplissage de la grille 9×9
Les boules au centre ont été placées par trois pour qu'elles soient dans trois lignes en même temps et qu'elles satisfassent les ~~équation~~ égalités des lignes

Cette situation aurait été certainement impossible avec 10 ou 8 nombres premiers entre 41 et 81 puisque la diagonale n'aurait pas été achevée

FLEUROTTE Manon
Lycée du Haut-Barr – Saverne

Exercice n° 2

Exercice 2 :

1) ABC est isocèle en A donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$
BCD est isocèle en B donc $\widehat{BCD} = \widehat{BDC}$
BD est la bissectrice de $\widehat{ABC}$ donc $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$
$D \in [AC]$ donc $\widehat{ACB} = \widehat{BCD}$
Donc $\widehat{BDC} = \widehat{BCD} = 2\,\widehat{DBC}$
La somme des angles d'un triangle est π rad, donc dans BCD :
$\widehat{BDC} + \widehat{BCD} + \widehat{DBC} = \pi$
donc : $\widehat{BDC} = \frac{2\pi}{5}$ rad

$\widehat{BCD} = \frac{2\pi}{5}$ rad

$\widehat{DBC} = \frac{\pi}{5}$ rad

dans ABC :
$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = \pi$
$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{2\pi}{5}$

$\frac{4\pi}{5} + \widehat{BAC} = \pi$

Donc : $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{5}$ rad

$\widehat{ACB} = \frac{2\pi}{5}$ rad

$\widehat{BAC} = \frac{\pi}{5}$ rad

2) ABC et BCD ont les mêmes angles donc BCD est une réduction de ABC donc $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$

$\widehat{CAB} = \frac{\pi}{5}$ et $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{5}$ donc ABD est isocèle en D donc $BD = AD$

Comme BCD est isocèle en B, $BC = BD$

donc $DA = BC = 1$

$AC = AD + CD$

donc : $\dfrac{AD+CD}{BC} = \dfrac{BC}{CD}$

$$\frac{1+CD}{1} = \frac{1}{CD}$$

$$CD(1+CD) = \cancel{\frac{1\times CD}{CD}}$$

$$CD^2 + CD - 1 = 0$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1)$

$\Delta = 1 + 4$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$

$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

impossible, une longueur doit être positive $\qquad$ donc $CD = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$AB = AC = AD + CD$

$AB = 1 + \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$AB = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

HOHNADEL Emile et LARUELLE Florian
Lycée Jean-Jacques Henner – Altkirch

Exercice n° 3

Exercice 3:

2)

3^2	2^3	1
2^2	7	2×3
2	3	5

$\Leftrightarrow$

9	8	1	$\Rightarrow 72$
4	7	6	$\Rightarrow 168$
2	3	5	$\Rightarrow 30$
$\Downarrow$ 72	$\Downarrow$ 168	$\Downarrow$ 30	

5	2	2×7	2^2
1	$2^2\times3$	3×5	2^3
7	2×5	13	3^2
2^4	2×3	3	11

$\Leftrightarrow$

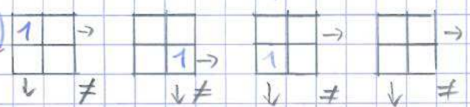
5	2	14	4	$\Rightarrow 560$
1	12	15	8	$\Rightarrow 1440$
7	10	13	9	$\Rightarrow 8190$
16	6	3	11	$\Rightarrow 3168$
$\Downarrow$ 560	$\Downarrow$ 1440	$\Downarrow$ 8190	$\Downarrow$ 3168	

3) 41 / 43 / 47 / 53 / 59 / 61 / 67 / 71 / 73 / 79 sont 10 nombres premiers qui n'apparaissent qu'une seule fois dans la factorisation des nombres de 1 à 81.

Ils doivent donc obligatoirement se trouver dans la diagonale où se croisent la $n^{ième}$ colonne et la $n^{ième}$ ligne.

Or cette diagonale ne contient que neuf cases.

Il est donc impossible de construire un tel carré pour n = 9.

1) 

Ainsi, il est impossible de construire un tel carré pour n = 2, car peu importe la position de 1, au moins deux produits sont différents.

Copies des Terminales

PILLIAT Emmanuel et KUENEMANN Anthony
Lycée Louis Armand – Mulhouse

Exercice n° 1

Exercice 1

Soit P_1 la propriété : " Un entier de la forme $2+4n$ est de la même couleur que 2 ", $n \geqslant 0$.
2 est de sa couleur.
On suppose P_1 vraie pour n fixé.
On a donc $2+4n+2+2$ est de la même couleur que 2 car c'est une somme de trois entiers de même couleur. Donc $4(n+1)+2$ est de la couleur de 2.
P_1 est vraie au rang $n+1$. Elle est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
Par l'absurde, si 2 est bleu et comme $58 = 14 \times 4 + 2$, 58 serait bleu, ce qui est contraire à l'hypothèse.
Donc 2 est rouge.

Soit P_2 la propriété : " si p est de la forme $2n+1$, alors p est de la même couleur que 1", $n \geqslant 0$
P_2 est vraie au rang 0.
On suppose P_2 vraie pour n fixé.
On a donc $(2n+1)+1+1$ de la même couleur que 1, donc $2(n+1)+1$ de la même couleur que 1.
P est vraie au rang $n+1$, elle est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
Tous les nombres impairs sont donc de la même couleur.

On montre par l'absurde que 1 est bleu.
En effet, supposons qu'il soit rouge. On peut ainsi démontrer la propriété P_3 par récurrence : " les nombres de la forme $2n$ sont de la même couleur que 2 ".
P_3 est vraie au rang 1.
1 et 2 sont de la même couleur par hypothèse, donc en supposant P_3 vraie pour n fixé, on a $2n+1+1 = 2(n+1)$ de la même couleur que 1 et 2.
P_3 serait héréditaire et par récurrence vraie pour tout $n \geq 1$.
Tous les nombres entiers seraient de la même couleur (pairs et impairs), ce qui est en contradiction avec le fait qu'on ait colorié "plusieurs nombre en bleu" et que 58 soit rouge".
Donc 1 et 2 sont de couleur différente.
Donc 1 est bleu, et donc tous les nombres impairs sont bleus.

Par l'absurde, il apparaît que 4 est rouge.
En effet, s'il était bleu, $4+1+1=6$ serait bleu.
or 6 est de la forme $2+4n$, donc rouge, d'après P_1.

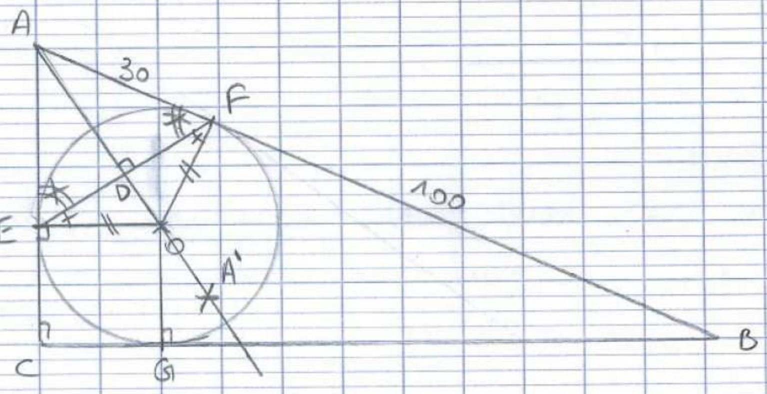
Soit P_4 : " les nombres de la forme $4n$ sont rouges." $n \geq 1$. P_4 est vraie au rang 1.
$4n+2+2 = 4(n+1)$ est rouge car 2 est rouge.
P_4 est vraie au rang $n+1$. Elle est vraie au rang 1 et est héréditaire, donc P_4 est vraie pour tout $n \geq 1$.
D'après P_4 et P_1, tous les nombres pairs sont rouges.

40 est pair, donc il est rouge
2013 est impair, donc il est bleu.

VINCENTZ Arthur et LEVY Nicolas
Lycée épicospal de Zillisheim

Exercice n° 2

Exercice 2 :



• Les points E et F appartiennent au cercle de centre O

• O est l'intersection des bissectrices du triangle ABC, donc (AO) est une bissectrice de l'angle $\widehat{AEF}$, donc le point A' tel que AEA'F soit un losange est sur la droite (AO).

• Comme AEA'F est un losange, les droite (AA') et (EF) sont perpendiculaires. Comme O est sur

(AA'), les droites (AO) $\perp$ (EF) donc AEOF est un cerf-volant. donc $AE = AF = 30$ m

- De même CGOE et GOFB sont deux cerf-volant, d'où $FB = GB = 100$ m et $EC = CG$ et soit x la longueur CG

1) On peut donc appliqué le théorème de Pythagore dans ABC rectangle en C :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$130^2 = (30+x)^2 + (100+x)^2$$
$$16900 = 900 + x^2 + 60x + 10000 + 200x + x^2$$
$$16900 = 2x^2 + 260x + 10900$$
$$2x^2 + 260x - 6000 = 0$$

on obtient :

$$\Delta = 115\,600$$
$$x_1 = -150$$
$$x_2 = 20$$

or x vaut une longueur, et une longueur ne peut pas être négative.

d'où $x = 20$ m.

Ainsi on a dans ABC rectangle en C :

$AB = 130$ m , $AC = 50$ m , $BC = 120$ m.

d'où l'aire d' terrain ABC est de :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{B \times H}{2} = \frac{AC \times BC}{2}$$
$$= \frac{120 \times 50}{2} = 3000 \text{ m}^2.$$

2) De plus, (CB) est la tangente au cercle en G
d'où $(CG) \perp (OG)$.
(CA) est la tangente au cercle en E
d'où $(CE) \perp (OE)$. (ABC est rectangle en C)
Or CGOE est un cerf-volant possédant
3 angles droits, donc CGOE est un carré.

d'où $EO = OG = CE = GC = 20$ m.
(EO est un rayon de l'étang).
donc le rayon de l'étang vaut 20 mètres.

HE Matthieu et MEYER Charles
Lycée St André – Colmar

Exercice n° 3

Exercice 3

1) Dans le cas d'une distribution de 200 et 1400 billet, il peut y avoir 10% de gagnant

Entre 0 et 100 ticket
13 donc 1 gagnant
Entre 100 et 200 :
103, 113, 123, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136
137, 138, 139, 143, 153, 163, 173, 183, 193.
soit 19 gagnant
donc de 0 a 200 ticket
$1 + 19 = 20$ gagnant
Le rapport du nombre de gagnant et du nombre de ticket donne :
$\frac{20}{200} = \frac{10}{100}$ soit 10%

2) Si un billet a 4 chiffre, est distribué il peut y avoir 10% de gagnants :

On rappelle que de 0 a 200 il y a 20 gagnant
de 200 à 300
213 donc 1 gagnant
de 300 à 400
313 donc 1 gagnant
⋮
900 à 1000
913 donc 1 gagnant

donc de 0 à 1000 il y a :
20 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 28 gagnant
Rapport : $\frac{28}{1000}$

de 1000 a 1100
1003, 1013, 1023, 1030, 1031, 1032, 1033 1034
1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1043, 1053
1063, 1073, 1083, 1093
soit 19 gagnant.
même chose pour de 1100 à 1200 (il suffit de remplacer le 0 par un 1 : 1003 -> 1103)
soit 19 gagnant de 1100à1200
idem de 1200 à 1299 soit 19 gagnants

donc de 0 à 1299 il y a :
28 + 19 + 19 + 19 = 85
1300 est aussi gagnant donc de 0 à 1300 il y a 86 gagnants
rapport : $\frac{86}{1300} \neq \frac{10}{100}$

Le nombre de ticket doit terminer par 0 pour que 10% de gagnant soit possible :
de 1300 à 1310, 10 gagnant en plus :
$\frac{96}{1310} < \frac{10}{100}$

de 1300 à 1350, 50 gagnant en plus :
$\frac{136}{1300} > \frac{10}{100}$
et de 0 à 1400, il y a 185 soit $\frac{185}{1400} \neq 10\%$.
Il faut donc distribuer plus de 1400 billet

pour 1400 il y a donc 185 gagnants
de 1400 à 1500 , c'est comme de 1000 à 1100
soit 19 gagnant
pareil pour 1500 à 1600
⋮
pareil pour 1900 à 2000

Soit de 0 à 2000 tickets il y a :
$185 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 = 299$ gagnants
Rapport : $\frac{299}{2000} > \frac{10}{100}$

Pour de 2000 à 3000 le decompte est le même
que pour 0 à 1000
il y a donc 28 gagnants entre 2000 et 3000
soit 327 gagnant de 0 à 3000 ticket :
Rapport : $\frac{327}{3000} > \frac{10}{100}$

Pareil pour de 3000 à 4000
soit 355 gagnant de 0 à 4000
rapport : $\frac{355}{4000} < 10\,\%$

Donc le nombre de ticket pour obtenir 10 % de
gagnant peut etre entre 3000 et 4000.

De 3000 à 3200 , le decompte est le même
que de 0 à 200 soit 20 gagnant en plus
Rapport : $\frac{347}{3200} > \frac{10}{100}$

De 3200 à 3300 il y a un gagnant (le 3213)
Rapport : $\frac{348}{3300} > \frac{10}{100}$

De 3300 à 3400, il y a un gagnant en plus

Rapport : $\frac{349}{3400}$

De 3400 à 3500, il y a un gagnant en plus

Rapport : $\frac{350}{3500} = \frac{10}{100}$

Il faut donc que 3500 ticket soit distribués pour qu'il y ai exactement 10% de gagnant.

Il y a-t-il d'autre possibilité ?

On a vu que de 0 à 4000, il y a 355 gagnants ce qui est inferieur à 10% de gagnants

De 4000 à 5000, comme de 0 à 1000 il y a 28 gagnant

idem pour de 5000 à 6000, de 6000 à 7000, de 7000 à 8000, de 8000 à 9000 et de 9000 à 9999

Cela donne de 0 à 9999 :

$355 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 523$

Rapport : $\frac{523}{9999} < 10\%$.

L'enoncé precise que le nombre de ticket distribué est un nombre à 4 chiffres, il n'y a donc pas plus de 9999 ticket distribués