**Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM**

Université de Strasbourg

académie Strasbourg

Ministère
de l'Éducation nationale

Ministère
de l'Enseignement supérieur
et de la Recherche

Rallye

Rallye
2020

Rapport du 48ème Rallye Mathématique d'Alsace

ALSACE | Conseil départemental Bas-Rhin

CASIO

NUMWORKS

**UFR de mathématique
et d'informatique**
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

IREM de Strasbourg

IREM de Strasbourg

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Christel BERNHARDT, Pascal MALINGREY, Jean-Claude SABBAN

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 48ème fois en 2020. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (http://mathinfo.unistra.fr/irem/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale. Cette année, seule l'épreuve des Terminales a pu avoir lieu le mercredi 4 mars. L'épreuve des Premières, initialement prévue le mercredi 25 mars, a dû être annulée en raison de l'épidémie de Covid-19. 370 élèves ont participé, dont 40 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s’inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Terminale, vingt-et-un binômes et deux monômes ont été sélectionnés : quatre premiers prix, sept deuxièmes prix et douze troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La traditionnelle cérémonie de remise des prix n’a pas pu avoir lieu cette année.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 48ème édition :

- ◊ L'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- ◊ L'IREM de Strasbourg
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ Le Conseil Départemental du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Départemental du Haut-Rhin
- ◊ La Région Grand Est
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville de Molsheim
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Ville de Saint-Louis
- ◊ La Ville de Saverne
- ◊ La société CASIO
- ◊ La société NUMWORKS

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Vous proposent de participer à des stages de préparation aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour obtenir des informations sur toutes les activités proposées, vous pouvez consulter le site d'Animath **:** http://www.animath.fr

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Palmarès des Terminales 2020

Premier prix

- ✓ MEYER Sven et SCHNEIDER Urbain
  Professeur : M. Alilouch, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ BEN SHEM Michael et MALINOWSKI Ivo
  Professeurs : M. Czerniak et M. Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ FEUILLET Thomas et LUCHNIKOVA Anna
  Professeur : M. Kientz, Lycée Franco-Allemand, Fribourg

- ✓ GUINCHARD Antoine et SCHAEFFER Darian
  Professeur : M. Kientz, Lycée Franco-Allemand, Fribourg

Deuxième prix

- ✓ BOUDOT Valentin et KATZENMAYER Yoan
  Professeur : Mme Higelin, Lycée Don Bosco, Landser

- ✓ BRAUN Gwendal et JACQUES Matthieu
  Professeur : M. Velikonia, Lycée Louis Armand, Mulhouse

- ✓ FOUQUET Alexandre
  Professeur : Mme Cloarec, Ecole Européenne, Luxembourg

- ✓ BAUMANN Valentin et BRENDEL Bruno
  Professeur : M. Werner, Lycée Ribeaupierre, Ribeauvillé

- ✓ BOUDDOUR Salma et SCHNEIDER Aline
  Professeur : Mme Burck, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg

- ✓ AILLOUD- MCINTYRE Edouard et NAHMIAS Arthur
  Professeurs : M. Sutter et M. Thouverel, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ DE BARSY Oscar et VILLEDEY Ulysse
  Professeur : Mme Collette, Lycée Vauban, Luxembourg

Troisième prix

- ✓ TEUBER Maxime et YOUNIS Rasan
  Professeur : M. Alilouch, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ MUNCK Emma et ZIMMERMANN Marie
  Professeur : Mme Martin, Lycée Jean-Jacques Henner, Altkirch

- ✓ MAGHOUT Adam et WILHELM Solène
  Professeur : M. Arnold, Lycée Jean Mermoz, Saint-Louis

- ✓ LUCK Axel et RUSCHER Olivier
  Professeur : M. Marchant, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg

- ✓ BLATZ Victor et CRON Léo
  Professeur : Mme Fehr, Lycée Jean Mermoz, Saint-Louis

- ✓ LEPPER Alexander et PRESS-LOHRMANN Lara
  Professeur : M. Kientz, Lycée Franco-Allemand, Fribourg

- ✓ GIORGI-PANAZZOLO Bruno et STUSSI Raphaël
  Professeur : M. Lutz, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ GLESSER Olivier et LIENHARD Jean
  Professeurs : M. Wintz et Mme Fleurotte, Lycée Adrien Zeller, Bouxwiller

- ✓ THOMAS Aurélien
  Professeur : M. Cattelin, Lycée Leclerc, Saverne

- ✓ MULLER Eliott et WUHRLIN Arthur
  Professeurs : M. Meyer et M. Schultz, Lycée Schuré, Barr

- ✓ BECK Julien et VOHUULE Antoine
  Professeur : Mme Goepfert, Institution Sainte Jeanne d'Arc, Mulhouse

- ✓ CRABEIL Martin et MOUSSAOUI Ilyas
  Professeurs : M. Witter et M. Elophe, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2020
48ème édition

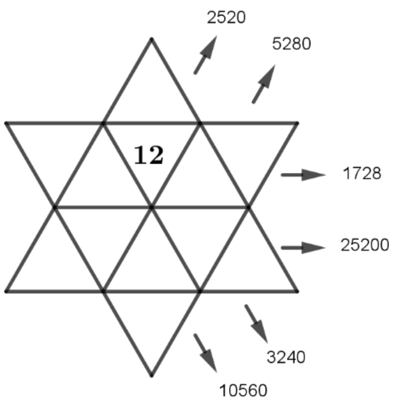
TERMINALES
Mercredi 4 mars 2020

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
Les nombres entiers de 1 à 12 doivent être placés dans les douze cases de l'étoile ci-dessous.
Les nombres écrits à l'extérieur de l'étoile sont les produits des nombres placés dans les cinq cases de l'étoile situées dans la direction de la flèche.

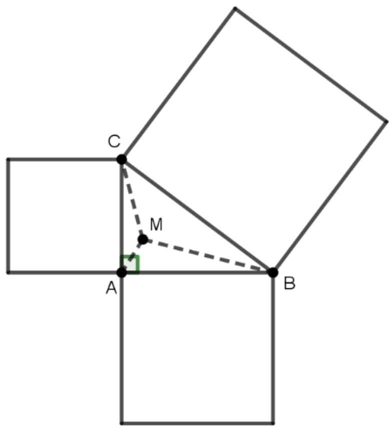


La position du nombre 12 est donnée. Placer les onze autres nombres dans les cases vides.

Exercice 2 :
Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers naturels qui vérifient l'équation :

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1$$

Exercice 3 :
Soit M un point situé à l'intérieur d'un triangle ABC rectangle en A.
Déterminer la position du point M dans le triangle ABC pour que les aires des triangles MAB, MAC et MBC soient respectivement proportionnelles aux aires des carrés construits sur les côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.



Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2020

Cette année, 187 binômes (et quelques monômes) ont participé à l'épreuve du Rallye des Terminales. L'épreuve des Premières (qui devait avoir lieu le mercredi 25 mars) a dû être annulée en raison de l'épidémie de Covid-19. La participation est à peu près identique à celle de l'édition précédente.

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois très originales. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.
Nous continuons à relever que trop d'élèves n'apportent aucun soin à la présentation de leur travail : il y a des ratures à toutes les lignes, les instruments de construction tels que la règle et le compas ne sont pas utilisés : les figures sont tracées à main levée.
C'est d'autant plus dommage que la qualité mathématique des copies est souvent d'un très bon niveau, que les exercices sont abordés par un nombre important de candidats et que les méthodes proposées ont parfois fait l'admiration de l'équipe des correcteurs.
Dans l'exercice de géométrie, qui prenait appui sur une figure donnée dans l'énoncé, nous notons qu'un certain nombre d'élèves ne refont pas la figure sur leur copie mais rajoutent des points. Il est compliqué pour le correcteur de ne pas s'y perdre : ce n'est pas au correcteur de refaire une figure pour pouvoir suivre ce qui est rédigé.

En terminale, les premiers prix ont donné une solution exacte à deux exercices et ont très bien avancé dans le troisième ou donné des éléments.
Les deuxièmes prix ont très bien résolu un exercice et ont donné beaucoup d'éléments dans les deux autres.
Les troisièmes prix ont soit très bien résolu un exercice et donné des éléments dans un deuxième exercice soit bien avancé dans les trois exercices.

Compte–rendu de l'épreuve de Terminale

L'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Terminale comprend, comme à l'habitude, trois exercices. Dans le premier exercice, on demandait de placer les entiers de 1 à 12 dans les cases d'une étoile sous certaines contraintes. Dans le deuxième exercice, il s'agissait de résoudre une équation à trois inconnues, les trois inconnues étant des nombres entiers. Le troisième exercice était un exercice de géométrie : il fallait trouver la position d'un point dans un triangle.

Les trois exercices ont été bien compris et bien abordés. Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

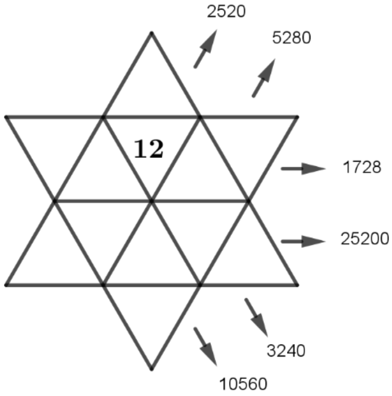
Exercice 1 : Cet exercice semble avoir beaucoup plu aux candidats. C'est celui qui a été le mieux réussi. On peut regretter que certains élèves, qui expliquent bien leur raisonnement, s'arrêtent à une seule solution trouvée, alors que l'exercice en comportait deux. Plusieurs binômes se contentent de livrer l'étoile complétée sans aucune explication.

Exercice 2 : Beaucoup de candidats ont donné des résultats intéressants, sans toutefois aller jusqu'à une résolution complète. Nous y avons trouvé des idées originales. Là encore il est nécessaire de bien présenter la rédaction lorsque les élèves distinguent plusieurs cas.

Exercice 3 : Cet exercice a été le moins bien réussi des trois. Les exercices de géométrie continuent de poser plus de problèmes aux candidats : ils semblent être passés de mode. Mais nous avons tout de même trouvé plusieurs excellentes résolutions.
La proportionnalité est trop souvent mal traduite : les élèves utilisent trois coefficients réels distincts pour traduire la proportionnalité des aires ! Les notations choisies sont parfois inappropriées : les élèves notent A la longueur d'un côté, alors qu'une lettre majuscule désigne habituellement un point.
Nous réitérons notre remarque sur la figure : les candidats doivent refaire une figure propre sur leur copie, figure sur laquelle ils rajoutent les éléments qu'ils décrivent par des phrases.

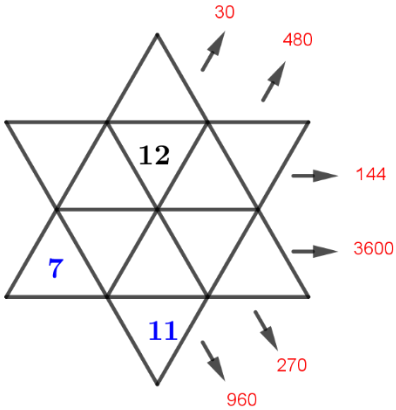
Correction de l’épreuve des Terminales

Exercice n°1

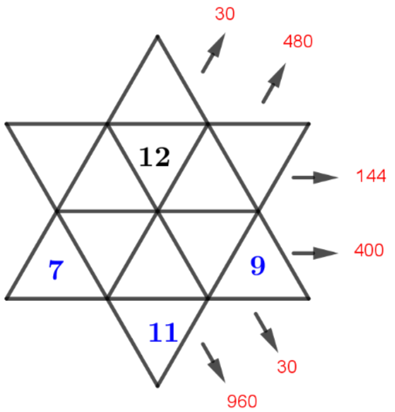


- Les seuls nombres divisibles par 7 sont : 2520 et 25200 ; le 7 se trouve donc dans la seule case qui n’appartient à aucune autre « ligne »
- Les seuls nombres divisibles par 11 sont : 5280 et 10560 ; le 11 se trouve donc dans la seule case qui n’appartient à aucune autre « ligne »

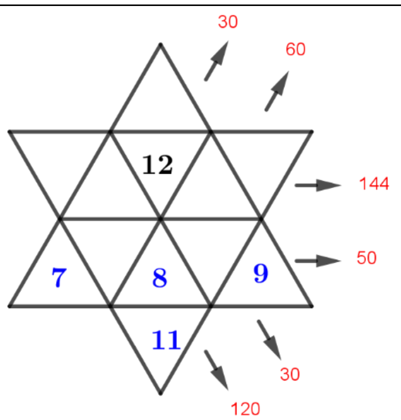
  Nous notons en rouge le produit des nombres manquants dans chaque ligne



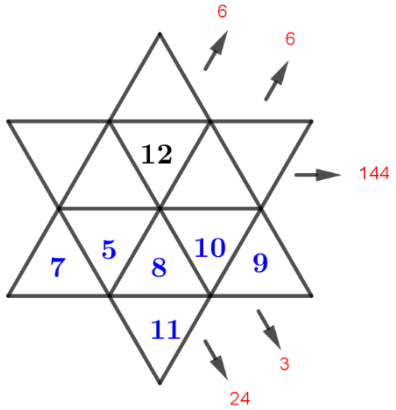
- Les nombres qui ne sont pas divisibles par 9 sont : 30, 480 et 960 ; le 9 ne peut donc appartenir à aucune de ces lignes : il n’y a qu’une seule case possible pour le 9



- 400 est le seul nombre divisible par 25 : le 5 et le 10 doivent se situer sur la ligne du 400
  $$400 \div (5 \times 10) = 8$$
  Le 8 appartient donc à la ligne du 400
  Parmi les trois cases libres de la ligne 400, deux sont situées sur des cases appartenant aux lignes 30, or 30 n’est pas divisible par 8 : on peut donc placer le 8



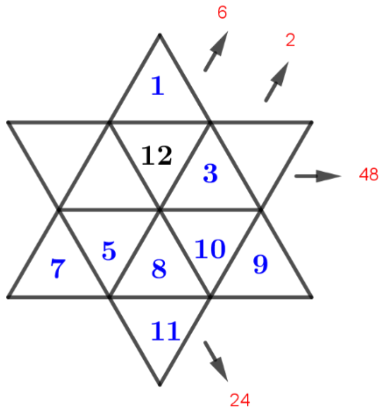
Etudions les deux configurations possibles pour le 5 et le 10 :



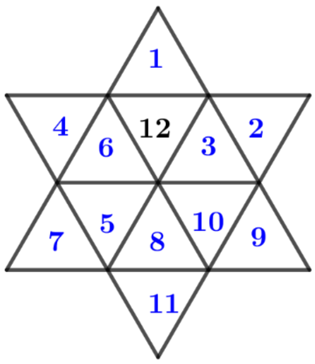
Il reste les nombres 1, 2, 3, 4, 6 à placer

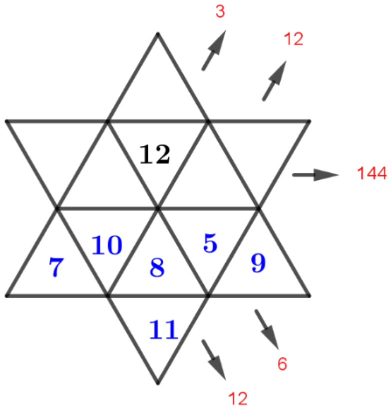
- La ligne 3 ne peut être complétée qu'avec 1 et 3
- La ligne 144 ne peut être complétée qu'avec 2, 3, 4, 6

On peut donc placer le 1 et le 3



On peut ensuite finir la construction de l'étoile :

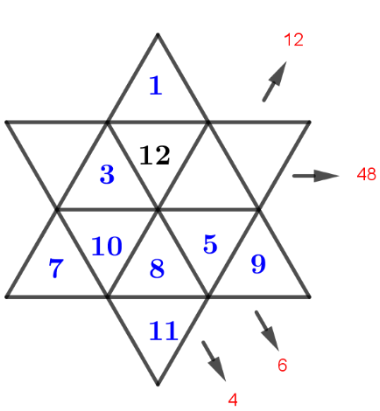




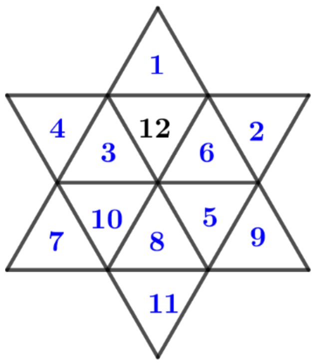
Il reste les nombres 1, 2, 3, 4, 6 à placer

- La ligne 3 ne peut être complétée qu'avec 1 et 3
- La ligne 144 ne peut être complétée qu'avec 2, 3, 4, 6

On peut donc placer le 1 et le 3



On peut ensuite finir la construction de l'étoile :



Il y a donc deux façons de compléter l'étoile

Exercice n°2

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1$$

Supposons que $x>3$ et $y>3$:

$$x>3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}<\frac{1}{3} \qquad et \qquad y>3 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{y}<\frac{2}{3}$$

On en déduit alors que :

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}<1$$

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}<1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}<1-\frac{3}{z} \quad \Rightarrow \quad 1<1-\frac{3}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{z}<0$$

On en déduit que : $x \leq 3$ ou $y \leq 3$

$$\boldsymbol{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1 \quad \Leftrightarrow \quad yz+2xz-3xy=xyz \quad (E)}$$

<u>1er cas :</u> $x \leq 3$: $x \in \{1;2;3\}$

$x=1$: $(E) \Leftrightarrow 2z=3y$ les solutions sont les triplets : $(1,2a,3a)$ où $a \in N^*$

(on utilise le théorème de Gauss pour justifier que 2 divise y)

$x=2$: $(E) \Leftrightarrow yz+4z-6y=2yz$

$(E) \Leftrightarrow yz-4z+6y=0$

$(E) \Leftrightarrow (y-4)(z+6)=-24$

d'où $y-4<0$ d'où $y \in \{1,2,3\}$ les solutions sont les triplets : $(2,1,2)$, $(2,2,6)$, $(2,3,18)$

$x=3$: $(E) \Leftrightarrow yz+6z-9y=3yz$

$(E) \Leftrightarrow 2yz-6z+9y=0$

$(E) \Leftrightarrow (y-3)(2z+9)=-27$

d'où $y-3<0$ d'où $y \in \{1,2\}$ la solution est : $(3,2,9)$

<u>2ème cas :</u> $y \leq 3$: $y \in \{1;2;3\}$

$y=1$: $(E) \Leftrightarrow z+2xz-3x=xz$

$(E) \Leftrightarrow xz-3x+z=0$

$(E) \Leftrightarrow (x+1)(z-3)=-3$

d'où $z-3<0$ d'où $z \in \{1,2\}$ la solution est : $(2,1,2)$

$y=2$: $(E) \Leftrightarrow 3x=z$ les solutions sont les triplets : $(a,2,3a)$ où $a \in N^*$

$y=3$: $(E) \Leftrightarrow 3z+2xz-9x=3xz$

$(E) \Leftrightarrow xz+9x-3z=0$

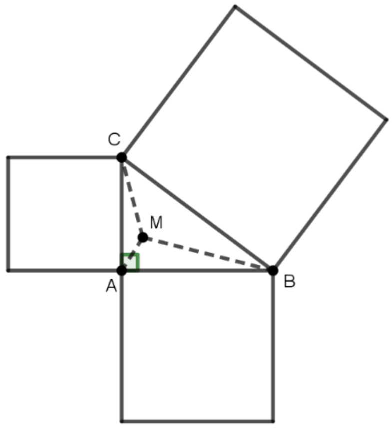
$(E) \Leftrightarrow (x-3)(z+9)=-27$

d'où $x-3<0$ d'où $x \in \{1,2\}$ la solution est : $(2,3,18)$

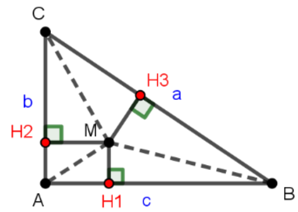
les solutions sont les triplets :

- $(1,2a,3a)$ où $a \in N^*$
- $(a,2,3a)$ où $a \in N^*$
- $(2,1,2)$, $(2,3,18)$

Exercice n°3



On note a, b, c les longueurs respectives des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$
H_1, H_2, H_3 sont les pieds des hauteurs issues de M
On se place dans un repère orthonormé $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$:
$A(0;0)$, $B(c,0)$, $C(0,b)$, $M(x_M,y_M)$, $H_1(x_M,0)$, $H_2(0,y_M)$, $H_3(x_3,y_3)$
$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} + 1$



$$\text{équation de } (BC) : y = -\frac{b}{c}x + b \qquad \vec{u}_{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix} \text{ (vecteur directeur) d'où } \vec{n}_{BC}\begin{pmatrix} \frac{b}{c} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (vecteur normal)}$$

$$\text{les vecteurs } \overrightarrow{MH_3} \text{ et } \vec{n}_{BC} \text{ sont colinéaires :}$$

$$\overrightarrow{MH_3} = \begin{pmatrix} x_3 - x_M \\ y_3 - y_M \end{pmatrix} = k\vec{n}_{BC} = k\begin{pmatrix} \frac{b}{c} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_3 = k\frac{b}{c} + x_M \\ y_3 = k + y_M \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\text{or } H_3 \in (BC) \quad \text{d'où} \quad y_3 = -\frac{b}{c}x_3 + b$$

$$y_3 = -\frac{b}{c}x_3 + b \quad \Leftrightarrow \quad k + y_M = -\frac{b}{c}\left(k\frac{b}{c} + x_M\right) + b$$

$$\Leftrightarrow \quad k + y_M = -k\frac{b^2}{c^2} - \frac{b}{c}x_M + b$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{-\frac{b}{c}x_M - y_M + b}{1 + \frac{b^2}{c^2}}$$

$MH_1 = y_M$
$MH_2 = x_M$

$$\overrightarrow{MH_3} = k\begin{pmatrix} \frac{b}{c} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad MH_3 = \sqrt{k^2\left(\frac{b^2}{c^2} + 1\right)} = \sqrt{\left(\frac{-\frac{b}{c}x_M - y_M + b}{1 + \frac{b^2}{c^2}}\right)^2 \times \left(\frac{b^2}{c^2} + 1\right)}$$

$$= \left(-\frac{b}{c}x_M - y_M + b\right) \times \sqrt{\frac{1}{\frac{b^2}{c^2} + 1}}$$

$$= \left(-\frac{b}{c}x_M - y_M + b\right) \times \frac{c}{a}$$

$$MH_3 = -\frac{b}{a}x_M - \frac{c}{a}y_M + \frac{bc}{a}$$

Ecrivons le tableau de proportionnalité entre les aires des triangles et des carrés :

$2A(triangle)$	bx_M	cy_M	$-bx_M - cy_M + bc$
$A(carré)$	b^2	c^2	a^2

- $bx_M \times c^2 = cy_M \times b^2 \iff cx_M = by_M$
- $bx_M \times a^2 = (-bx_M - cy_M + bc) \times b^2 \iff x_M a^2 = -b^2 x_M - bcy_M + b^2 c$

$$\iff x_M a^2 = -b^2 x_M - c^2 x_M + b^2 c$$

$$\iff \boxed{x_M = \frac{b^2 c}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$puis :$ $\boxed{y_M} = \dfrac{c}{b} x_M = \boxed{\dfrac{bc^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$

$$les\ coordonnées\ du\ point\ M\ sont\ : \left(\frac{b^2 c}{a^2 + b^2 + c^2} ; \frac{bc^2}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$$

On peut remarquer que le point M se situe au milieu de la hauteur du triangle ABC issue de A :
Notons H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A et calculons les coordonnées de H :

$Equation\ de\ la\ droite\ (AH)$:

$\vec{n}_{BC}\begin{pmatrix} \frac{b}{c} \\ 1 \end{pmatrix}$ $est\ un\ vecteur\ directeur\ de\ (AH)\ et\ (AH)\ passe\ par\ l'origine\ A, d'où:$ $(AH) : x - \dfrac{b}{c} y = 0$

$Equation\ de\ la\ droite\ (BC) : y = -\dfrac{b}{c} x + b$

$Le\ point\ H\ est\ le\ point\ d'intersection\ des\ droites\ (AH)\ et\ (BC), pour\ trouver\ ses\ coordonnées, on\ résout\ un\ système$:

$$\begin{cases} x - \frac{b}{c} y = 0 \\ y = -\frac{b}{c} x + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{b}{c} y \\ y = -\frac{b}{c} \times \frac{b}{c} y + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{b}{c} y \\ y = \dfrac{b}{\frac{b^2}{c^2} + 1} = \dfrac{b}{\frac{a^2}{c^2}} = \dfrac{bc^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{b}{c} \times \frac{bc^2}{a^2} = \frac{b^2 c}{a^2} \\ y = \frac{bc^2}{a^2} \end{cases}$$

$les\ coordonnées\ de\ H\ sont\ donc\ \left(\dfrac{b^2 c}{a^2} ; \dfrac{bc^2}{a^2}\right)$

$Les\ coordonnées\ du\ milieu\ de\ [AH]\ sont\ donc\ \left(\dfrac{b^2 c}{2a^2} ; \dfrac{bc^2}{2a^2}\right), ce\ qui\ correspond\ bien\ au\ point\ M\ trouvé$