Rallye

Rallye
2024

Rapport du 52ème Rallye Mathématique d'Alsace

UFR de mathématique et d'informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

IREM de Strasbourg

IREM de Strasbourg

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur :
Christel BERNHARDT, Pascal MALINGREY, Dominique WEIL, Stephan CZERNIAK

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 52ème fois en 2024. Créé en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (https://mathinfo.unistra.fr/irem/popularisation/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale. Elle a réuni environ 1 100 participants dont 78 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s'inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, quatorze binômes et deux monômes sont primés : trois premiers prix, quatre deuxièmes prix et neuf troisièmes prix.

En Terminale, quinze binômes et un monôme ont été sélectionnés : trois premiers prix, trois deuxièmes prix et dix troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix a lieu à l'UFR de mathématique et d'informatique à Strasbourg. Elle est suivie d'une réception en l'honneur des lauréats.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 52ème édition :

- ◊ Le Rectorat de l'académie de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- ◊ Le Département de Mathématiques
- ◊ L'IREM de Strasbourg
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ La ville de Barr
- ◊ La ville de Bischwiller
- ◊ La ville de Haguenau
- ◊ La ville de Molsheim
- ◊ La ville d'Obernai
- ◊ La ville de Saint-Louis
- ◊ La ville de Strasbourg
- ◊ La ville de Wissembourg
- ◊ La société NUMWORKS

À tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

vous proposent de participer à des stages de préparation aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour obtenir des informations sur toutes les activités proposées, vous pouvez consulter le site d'Animath **:** http://www.animath.fr

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Palmarès des Premières 2024

Premier prix

- ✓ LAMMERT Emile et REVILLARD Martin
  Professeur : Mme Henriet, Lycée Albert Schweitzer, Mulhouse

- ✓ IRISSARRY Matthieu et OSSWALD Ethan
  Professeur : M. Keller, Institution Notre-Dame des Mineurs, Strasbourg

- ✓ GREENBERG Marc
  Professeur : M. Torres-Perez, Lycée Français, Vienne

Deuxième prix

- ✓ BOUZOUBAA Marwan et ROOSMA Madis
  Professeurs : Mmes Bachschmidt et Stupfler, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ BRAUN Arthur et CHARLIER Victor
  Professeur : M. Lutz, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ BREHIN-BOUHIN Maxence et MOGHADDASSI Matthieu
  Professeur : Mme Samama, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ SECHET Raphaël et SIMON GROS Oscar
  Professeurs : Mmes Bachschmidt et Stupfler, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ NGUYEN BUENO Lara et PETIOT Elise
  Professeur : Mme Betz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ LUCEREAU Côme et RANOUX Lucien
  Professeurs : Mmes Collet et Samama, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ DINC Ilyas et REINHART Mathieu
  Professeur : Mme Trehiou, Lycée Alfred Kastler, Guebwiller

- ✓ AUNEAU Quentin et FRANCK Emilien
  Professeurs : Mmes Jehl et Roth, Lycée Théodore Deck, Guebwiller

- ✓ WEISS Augustin
  Professeur : Mme Kuss, Lycée Schuré, Barr

- ✓ AL RIFAI Noam et HILLION Noé
  Professeur : M. Lutz, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ GIBERTI Julia et KARM Zoé
  Professeurs : M. Mazeau et Mme Trehiou, Lycée Alfred Kastler, Guebwiller

- ✓ MAKHLOUFIA Asmaa et MEYER Manon
  Professeur : M. Jaeckel, Ecole européenne, Strasbourg

- ✓ SAX Hugo et VIRQUIN Maxence
  Professeur : M. Jannest, Lycée Alfred Kastler, Guebwiller

Palmarès des Terminales 2024

Premier prix

- ✓ CHAGNAS Raphaël et ISMAAILI-ERNY Noam
  Professeur : M. Matt, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ AVILOV Anton et LAPP Matthias
  Professeurs : Mmes Lapp et Silva, Lycée Saint André, Colmar

- ✓ FLIELLER Aurélie et YANG Menglin
  Professeurs : M. Alati et Mme Collet, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ ENRIQUEZ Elie
  Professeur : M. Bijaoui, Ecole Aquiba, Strasbourg

- ✓ BURGLIN Gabriel et RAPICAULT Alexis
  Professeurs : MM. Logel et Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ DE OLIVEIRA Timéo et HAY Nathan
  Professeur : Mme Higelin, Lycée Don Bosco, Landser

Troisième prix

- ✓ SABATIER Esteban et SAMAMA Charlotte
  Professeurs : M. Alati et Mme Audeoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ RAVEY Camille et STORRER Clément
  Professeur : Mme Schnabel, Institution Sainte Jeanne d'Arc, Mulhouse

- ✓ GONZALVEZ-KISZLO Mila et HUREAUX Anaëlle
  Professeur : M. Monath, Lycée Jean Rostand, Strasbourg

- ✓ MEYER Emma et WENDLING Matéo
  Professeur : Mme Hauter, Lycée du Haut-Barr, Saverne

- ✓ AMANI Yanis et ROUGNON-GLASSON Yrieix
  Professeur : Mme Pozzo, Lycée Amélie Zurcher, Wittelsheim

- ✓ GIAMBERINI Thomas et SEILER KLEE Baptiste
  Professeur : M. Didier, Lycée Camille Sée, Colmar

- ✓ BERG Timéo et MIOTTI Lorenzo
  Professeurs : M. Audeoud et Mme Collet, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ BOUKHAL Adam et HEBRAUD Lucile
  Professeur : M. Monath, Lycée Jean Rostand, Strasbourg

- ✓ BERNHARDT Goran et SAUREL Anatole
  Professeur : Mme Cerciat, Lycée Henri Meck, Molsheim

- ✓ JEAN-SCHLEIFER Esteban et LOOTEN Amélie
  Professeur : Mme Burck, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2024
52ème édition

PREMIERES
Mercredi 3 avril 2024

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
Pierre et Louis montent en marchant un escalier mécanique en mouvement.
Lorsque Louis arrive en haut, il a monté 21 marches alors que Pierre qui marche deux fois plus vite en a monté 28.
Arrivé en haut Pierre décide de redescendre, toujours à la même vitesse.
Combien de marches devra-t-il descendre ?

Exercice 2 :
Chacune des gares routières desservies par une compagnie d'autocars délivre autant de billets qu'il y a de gares, à l'exception d'elle-même bien sûr. Sur chaque billet sont indiqués la gare où le billet est acheté et la gare de destination. La compagnie dessert depuis ce matin plusieurs gares nouvelles et de ce fait, s'est trouvée dans l'obligation d'imprimer 2024 types de billets différents supplémentaires.
Combien de gares la compagnie dessert-elle aujourd'hui ?

Exercice 3 :
Parmi les trapèzes dont les côtés mesurent 10, 8, 7 et 4, quel est celui dont l'aire est la plus petite ?

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2024
52ème édition

TERMINALES
Mercredi 20 mars 2024

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

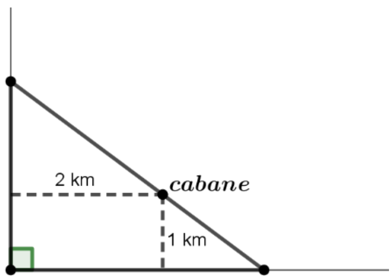
Exercice 1 :
Combien y a-t-il de nombres entiers compris entre 1 et 2024 qui peuvent s'exprimer comme différence de deux carrés d'entiers naturels ?
Combien y a-t-il de nombres entiers N compris entre 1 et 2024 qui peuvent s'exprimer sous la forme $N = a^n - b^n$ où a et b sont deux entiers naturels et n un entier supérieur ou égal à 2 ?

Exercice 2 :
On effectue la somme :

$$\frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1\,000} + \frac{4}{10\,000} + \cdots + \frac{n}{10^n} + \cdots$$

et on écrit cette somme dans le système décimal. On obtient ainsi un certain nombre.
Dans ce nombre, quel est le 2024ème chiffre après la virgule obtenu ?

Exercice 3 :
Un agriculteur possède un grand champ bordé par deux routes rectilignes qui se croisent à angle droit. Une cabane est située sur ce champ, à 1 km de la première route et 2 km de la deuxième. Il désire clôturer intégralement une partie triangulaire, la clôture bordant les deux routes et passant par la cabane, en utilisant le moins de clôture possible.



Quelle est la longueur minimale de la clôture ?

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2024

Cette année, 540 binômes et aussi quelques monômes représentant environ 500 élèves de premières et 600 élèves de terminale ont participé aux épreuves du Rallye.
La participation est en hausse de 21 % par rapport à 2024.

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois très originales. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.

Nous continuons à relever que trop d'élèves n'apportent aucun soin à la présentation de leur travail : il y a des ratures à toutes les lignes, les instruments de construction tels que la règle et le compas ne sont pas utilisés : les figures sont tracées à main levée.
Dans l'ensemble, on remarque beaucoup d'affirmations non justifiées et souvent un mélange de la phase de recherche avec la phase de rédaction.
La qualité mathématique des copies est quelquefois d'un très bon niveau, les exercices sont abordés par un nombre important de candidats et les méthodes proposées ont parfois fait l'admiration de l'équipe des correcteurs.
Lorsque le sujet comporte un exercice de géométrie, il serait souhaitable que les élèves tracent leurs figures sur une feuille annexe (proprement, à la règle et au compas et non à main levée), afin que les correcteurs puissent l'avoir sous les yeux lors de la lecture de l'ensemble de l'exercice.
La rigueur et la clarté des raisonnements est un élément important dans l'appréciation des copies.

En première, les premiers prix ont parfaitement résolu deux exercices et ont donné beaucoup d'éléments dans le troisième.
Les deuxièmes prix ont très bien résolu deux exercices et donné des éléments dans le troisième.
Les troisièmes prix ont très bien résolu un exercice et donné de bonnes pistes dans l'un ou les deux autres exercices, ou seulement résolu parfaitement un exercice, ou encore donné beaucoup d'éléments dans deux exercices.

En terminale, les premiers prix ont très bien résolu deux exercices et donné des éléments dans le troisième.
Les deuxièmes prix ont bien résolu deux exercices ou donné beaucoup d'éléments dans les trois exercices.
Les troisièmes prix ont donné des éléments dans les trois exercices ou bien réussi un exercice et donné des éléments dans un autre.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les bonnes solutions rencontrées.

Compte–rendu de l'épreuve de Première

Les candidats à l'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Le premier exercice portait sur un escalier mécanique en mouvement. Dans le deuxième exercice, il s'agissait de trouver un nombre de gares après avoir posé une équation diophantienne. Dans le troisième exercice, il fallait trouver un trapèze optimal répondant à plusieurs contraintes sur les longueurs de ses côtés et son aire.
Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Il y a eu peu de mise en équation, beaucoup de raisonnements peu clairs qui aboutissent à des résultats faux. La plupart des binômes (qui abordent l'exercice) introduisent une vitesse mais sans préciser en quelle unité, ils écrivent ensuite une équation qui n'est pas homogène (égalité entre une vitesse et un nombre de marche par exemple). Certains oublient que l'escalator est en mouvement.

Exercice 2 : C'est l'exercice qui a été le plus souvent abordé dans les copies. Le fait que les n gares délivrent $n(n-1)$ billets ne semble pas évident pour un certain nombre d'élèves et ce résultat n'est souvent établi qu'après avoir étudié quelques cas particuliers. Dans beaucoup de copies figure l'équation : $n(n-1) = 2024$: le mot « supplémentaire » semble mal compris ou occulté.

Exercice 3 : L'énoncé est souvent mal compris : certains pensent que l'on étudie les trapèzes dont les côtés sont à choisir parmi les nombres 10, 8, 7 et 4 ; d'autres que l'on étudie des figures dont les quatre cotés sont égaux. Beaucoup ne connaissent pas la définition d'un trapèze ; la formule de l'aire n'est pas connue (ni recherchée). Dans certaines copies, les trois trapèzes sont construits, mais souvent les calculs sont faits avec les mesures effectuées sur les figures.

Compte–rendu de l'épreuve de Terminale

L'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Terminale comprend, comme à l'habitude, trois exercices. Dans le premier exercice il s'agissait de dénombrer les entiers compris entre 1 et 2024 qui pouvaient s'écrire sous la forme d'une différence de deux puissances. Le deuxième exercice portait sur l'écriture décimale d'un nombre écrit sous forme d'une somme infinie. Le troisième exercice était un exercice d'optimisation : il s'agissait de trouver la longueur minimale d'une clôture.
Tous les exercices ont été résolus correctement dans des copies.

Exercice 1 : Dans de nombreuses copies, les élèves se contentent de constater à partir de quelques exemples ou par un calcul littéral que la différence de deux carrés est soit impaire soit un multiple de 4 et concluent directement aux 1518 possibilités.
Beaucoup d'élèves font de longs discours souvent confus, alors qu'un simple résultat comme $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ éclairerait leur propos. Très peu d'élèves abordent la deuxième question. Plusieurs binômes trouvent un résultat supérieur à 2024 !

Exercice 2 : Le calcul de la somme ne figure dans presqu'aucune copie. Dans la plupart des copies qui abordent l'exercice, deux méthodes se dégagent : observation d'un cycle dans l'écriture décimale du nombre mais sans réelle justification, isolement des termes autour de $n = 2024$ pour la détermination du résultat mais sans justifier rigoureusement que les termes suivants n'influent pas sur le résultat.

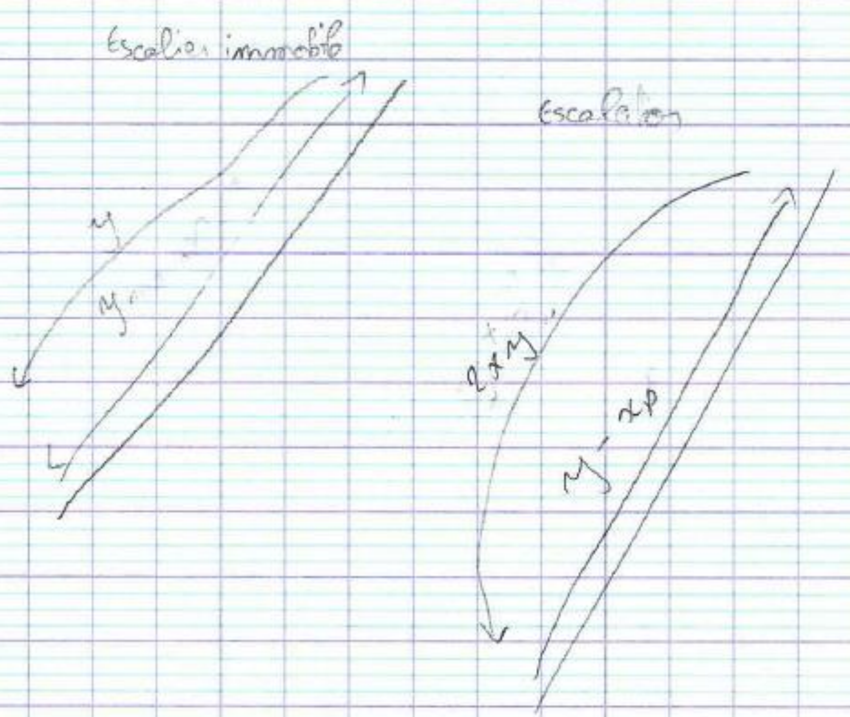
Exercice 3 : Beaucoup de binômes affirment que le triangle est isocèle pour avoir le périmètre minimal, d'autres n'ont pas compris que les longueurs des côtés du triangle pouvaient varier : ils font un calcul dans un cas particulier. Plusieurs binômes arrivent à une expression correcte du périmètre et concluent à l'aide de la calculatrice sans étude du signe de la dérivée.

Copies des Premières

IRISSARRY Matthieu et OSSWALD Ethan
Institution Notre-Dame des Mineurs, Strasbourg
Exercice n°1

Nous avons commencé par créer des variables inconnues :

x_L → le nombre de marches que l'escalator a évité à Louis (par rapport à un escalier immobile)
x_P → le nombre de marches que l'escalator a évité à Pierre (par rapport à un escalier immobile).
y → équivalent du nombre de marches dans un escalier immobile tel que $y = x_P + 28 = x_L + 21$.



Pierre marche 2 fois plus vite.
$28 + x_P = y$ → Pierre a monté 28 marches.
Au même moment, Louis en a monté 14, il lui en reste donc 7 à monter. Il arrivera donc 1,5 fois plus tard. Il sera donc aidé 1,5 fois plus.

Donc $x_L = 1,5\, x_p$

$21 + x_L = y = 28 + x_p$

$21 + 1,5\, x_p = 28 + x_p$

$0,5\, x_p = 7$

$x_p = 14$

Rémi a été aidé de 14 marches.

L'escalier fait donc : $y = 28 + 14 = \boxed{42 \text{ marches}}$

Ainsi pour la descente de 42 marches, on sait que toutes les 28 marches, il sera reculé de 14 marches et aura donc descendu au final que 14 marches. Il doit le double de marches de l'escalier. Le nombre de marches à descendre s'exprime donc par :

$2 \times y = 2 \times 42 = \boxed{84}$ marches.

Il devra descendre de 84 marches.

BOUZOUBAA Marwan et ROOSMA Madis
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°2

On note m le nombre de gares desservies par la compagnie depuis ce matin et n le nombre de gares desservies avant.

Il y a m gares possibles pour le choix de la gare où un billet est acheté et $m-1$ gares possibles pour la destination, il y a donc $m(m-1)$ billets différents, de la même manière on trouve qu'il y avait $n(n-1)$ billets différents avant l'ouverture des nouvelles gares.

Il y a 2024 types de billets différents supplémentaires, donc $m(m-1)-n(n-1)=2024$.

$$m(m-1)-n(n-1)=2024$$
$$\Leftrightarrow \quad m^2-n^2-m+n = 2024$$
$$\Leftrightarrow \quad (m-n)(m+n)-m+n = 2024.$$
$$\Leftrightarrow \quad (m-n)(m+n-1)=2024.$$

Comme m et n sont des entiers alors $m-n$ et $m+n-1$ doivent être des diviseurs de 2024, de plus $m+n-1 > m-n$, (car $2n>1$)

donc $(m-n; m+n-1) \in \{(1;2024), (2;1012), (4;506), (8;253), (11;184), (22;92), (23;88), (44;46)\}$.

De plus, m et n doivent vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} m+n-1 = d_1 \\ m-n = d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = d_1+1+d_2 \\ n = m-d_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{d_1+d_2+1}{2} \\ n = m-d_2 \end{cases}$$

où d_1 et d_2 sont des diviseurs de 2024. m doit être un entier donc d_1+d_2+1 doit être pair, ce qui implique que d_1 et d_2 sont de parités différents. Cela diminue les couples possible au couple (m,n) qui sont solutions du système avec $(d_2, d_1) \in \{(1;2024),(11;184),(23,88),(8;253)\}$.

On résoud les systèmes :

$$\begin{cases} m = \frac{1+2024+1}{2} \\ n = m-1 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 1013 \\ n = 1012 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \frac{11+184+1}{2} \\ n = m-11 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 98 \\ n = 87 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \frac{23+88+1}{2} \\ n = m-23 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 56 \\ n = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \frac{253+8+1}{2} \\ n = m-8 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 131 \\ n = 123 \end{cases}$$

Une vérification montre que ces couples sont bien solutions.

La compagnie dessert 56, 98, 131 ou 1013 gares aujourd'hui.

LAMMERT Emile et REVILLARD Martin
Lycée Albert Schweitzer, Mulhouse
Exercice n°3

On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés parallèles.
On appelle B le côté parallèle à b tel que $B \geqslant b$.
On a 3 possibilités pour le côté B (il ne peut pas y avoir $B = 4$ car B doit être plus grand que b et 4 est la valeur la

N° 61.9

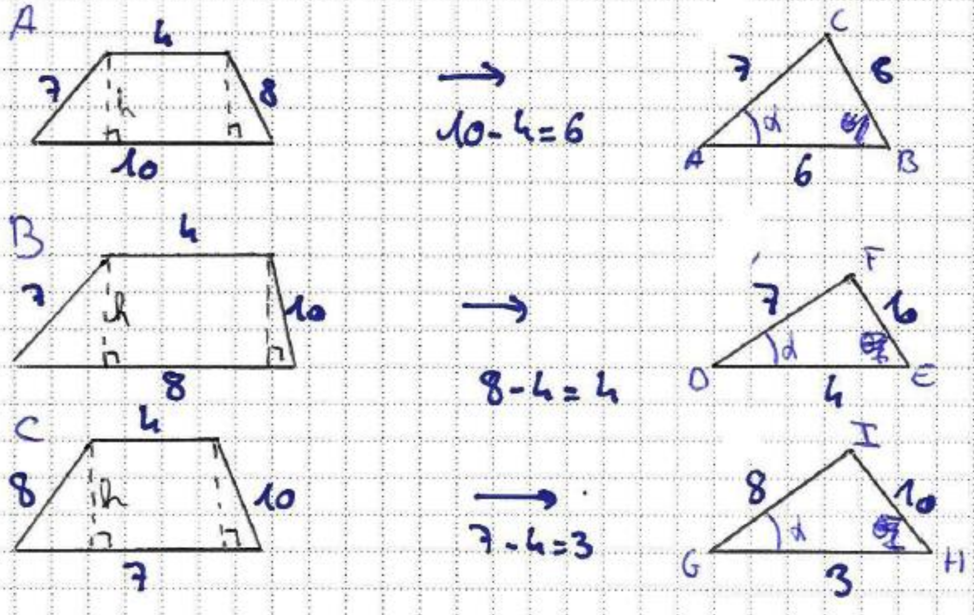
plus petite possible pour un côté) : 10 ; 8 et 7
Pour le côté b, on a 3 possibilités si B vaut 10 : 8 ; 7 et 4. On a 2 possibilités si B vaut 8 : 7 et 4. Et on a une seule possibilité si $B = 7 \Rightarrow b = 4$.
On a donc comme possibilités de couples (B ; b) les 6 couples suivants :
(10 ; 8) ; (10 ; 7) ; (10 ; 4) ; (8 ; 7) ; (8 ; 4) ; (7 ; 4)

On considère chaque fois le triangle obtenu en supprimant le rectangle central du trapèze et en mettant bout à bout les deux triangles obtenus. Les côtés de ces triangles ont pour longueur (B − b), et les deux valeurs entre 10 ; 8 ; 7 ; 4 qui ne correspondent ni à B ni à b.

couple (B ; b)	+ grand côté		somme des deux autres
10 ; 8	7	>	4 + (10 − 8) = 6
10 ; 7	8	>	4 + (10 − 7) = 7
10 ; 4	8	<	7 + (10 − 4) = 13
8 ; 7	10	>	4 + (8 − 7) = 5
8 ; 4	10	<	7 + (8 − 4) = 11
7 ; 4	10	<	8 + (7 − 4) = 11

Les trapèzes ayant pour couples (10 ; 8) ; (10 ; 7) et (8 ; 7) ne sont pas constructibles

N° 7/9



ne rien écrire dans la partie barrée

Dans le triangle ABC

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = 21/2$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \alpha$ $\qquad \cos \alpha = \left(\frac{21}{2}\right) / 42 = \frac{1}{4}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75{,}52°$

Dans le triangle DEF :

$\vec{DE} \cdot \vec{DF} = -\frac{35}{2}$ $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$ $\alpha = 128,68°$

Dans le triangle GHI :

$\vec{GH} \cdot \vec{GI} = -\frac{27}{2}$ $\cos \alpha = -\frac{9}{16}$ $\alpha = 124,23°$

Dans le trapèze A, d'après la loi des sinus :

$\frac{7}{\sin 90} = \frac{h}{\sin(75,52)}$ $h \simeq 6,78$ cm $A = \left(\frac{B+b}{2}\right) \times h = 47,46$

N°

Dans le trapèze B :

$\frac{7}{\sin 90} = \frac{h}{\sin 128,68}$ $h \simeq 5,46$

$A = 32,76$

Dans le trapèze C :

$\frac{8}{\sin 90} = \frac{h}{\sin(124,23)}$ $h \simeq 6,61$

$A = 36,355$

Le trapèze avec l'aire la plus petite est le B, avec $A = 32,76$

Sa base B vaut 7
Sa base b vaut 4
L'ordre des côtés de longueur 10 et 8 n'a pas d'importance (cela donne des trapèzes symétriques).

Copies des Terminales

CHAGNAS Raphaël et ISMAAILI-ERNY Noam
Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
Exercice n°1

a) Combien y a-t-il de nombres entiers compris entre 1 et 2024 qui peuvent s'exprimer comme une différence de deux carrés d'entiers naturels ?

On remarque que $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ pour tout k entier naturel. Ainsi, il suffit de prendre $a = k+1$ et $b = k$ pour exprimer tout entier impair de la forme $2k+1$ comme différence de deux carrés d'entiers naturels.

De plus, on constate que $(k+1)^2 - (k-1)^2 = k^2 + 2k + 1 - (k^2 - 2k + 1) = 4k$ pour tout entier naturel $k \geq 1$. Ainsi, il suffit de prendre $a = k+1$ et $b = k-1$ pour exprimer tout multiple de 4 de la forme $4k$ (sauf 4×0 que nous ne voulons pas exprimer) comme différence de deux ~~entiers~~ carrés d'entiers naturels.

Montrons maintenant que les entiers congrus à 2 modulo 4 ne peuvent pas s'exprimer comme différence de deux carrés d'entiers naturels.
Soit n, a et b trois entiers naturels tels que $n = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Si n est pair, on a donc $(a-b)$ ou $(a+b)$ qui est pair. Or, si $(a-b)$ est pair, a et b sont de même parité, donc $a+b$ est pair. Et si $(a+b)$ est pair, a et b sont de même parité, donc $(a-b)$ est pair. Ainsi, n est le produit de deux entiers pairs donc n est multiple de 4.
Ainsi, tous les entiers pairs pouvant s'exprimer comme différence de deux carrés d'entiers naturels sont des multiples

de 4. Donc, les entiers congrus à 2 modulo 4, qui sont pairs mais pas multiples de 4, ne peuvent pas s'exprimer comme différence de deux carrés d'entiers naturels.

Ainsi, on peut exprimer comme différence de deux carrés d'entiers naturels tous les nombres entiers entre 1 et 2024 sauf les entiers congrus à 2 modulo 4, c'est à dire 2, 6, 10, ..., 2018, 2022 donc $4\times0+2, 4\times1+2, \dots, 4\times505+2$, donc il y a 506 entiers congrus à 2 modulo 4 entre 1 et 2024.

~~Ao~~ Au final $2024-506=1518$ entiers entre 1 et 2024 peuvent s'exprimer comme la différence de deux carrés.

b) Combien y a-t-il de nombres entiers N compris entre entre 1 et 2024 qui peuvent s'exprimer sous la forme $N = a^n - b^n$ $(a, b \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2)$?

En prenant $n=2$, on ~~peut exprimer~~ a montré dans la partie a) qu'on peut exprimer de cette forme tous les entiers entre 1 et 2024 sauf les entiers congru à 2 modulo 4. Nous allons maintenant chercher quels entiers congrus à 2 modulo 4 peuvent s'exprimer de la forme $a^n - b^n$.

Soit N un nombre entier naturel congru à 2 modulo 4 tel que $N = a^n - b^n$ ($a, b \in \mathbb{N}$, et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$). Si a et b sont de parités différentes, a^n et b^n sont de parité différentes (celles de a et b respectivement) donc $a^n - b^n$ est impair. Si a et b sont pairs, on note $a = 2a'$ et $b = 2b'$, et on a $a^n - b^n = (2a')^n - (2b')^n = 2^n(a'^n - b'^n)$ et $n \geqslant 2$ donc $a^n - b^n$ est un multiple de $2^2 = 4$. On sait donc que a et b sont impairs pour que $a^n - b^n$ soit potentiellement congru à 2 modulo 4 (qui est pair et non multiple de 4).

De plus, n est impair car si n est pair, a^n et b^n sont alors des carrés et on a montré dans la partie a) que les entiers congrus à 2 modulo 4 ne s'expriment pas comme différence de deux carrés d'entiers naturels.

Ensuite, a et b étant impairs et $a > b \geq 1$ pour que $a^n - b^n > 0$, on a $a \geq 2 + b$ donc $a^n - b^n \geq (b+2)^n - b^n$. Or, la fonction $(x+2)^n - x^n$, qui vaut $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-k} b^k$ par le binôme de Newton, est la somme de fonctions croissantes donc est une fonction croissante. Ainsi comme $b \geq 1$ on a $N = a^n - b^n \geq (b+2)^n - b^n \geq 3^n - 1^n = 3^n - 1$.

Or $N \leq 2024 \Rightarrow 3^n - 1 \leq 2024$

$$3^n \leq 2025$$

$$n \ln(3) \leq \ln(2025)$$

$$n \leq \frac{\ln(2025)}{\ln(3)} \simeq 6,93$$

Ainsi $n = 3$ ou $n = 5$.

Pour $n = 3$, on teste toutes les valeurs possibles de a et b pour trouver quels $N \equiv 2\ [4]$ on peut atteindre :

Différence	1^3	3^3	5^3	7^3	9^3	11^3	13^3	15^3	17^3	19^3	21^3
1^3	0	26	124	342	728	1330	2196	≥ 2024	≥ 2024	≥ 2024	≥ 2024
3^3		0	98	316	702	1304	2170	≥ 2024	≥ 2024	≥ 2024	≥ 2024
5^3			0	218	604	1206	2072	≥ 2024	≥ 2024	≥ 2024	≥ 2024
7^3				0	386	988	1854	3032	≥ 2024	≥ 2024	≥ 2024
9^3					0	602	1468	2646	≥ 2024	≥ 2024	≥ 2024
11^3						0	866	2044	≥ 2024	≥ 2024	≥ 2024
13^3							0	1178	2716	≥ 2024	≥ 2024
15^3								0	1538	3484	≥ 2024
17^3									0	1946	≥ 2024
19^3										0	2402

On a entouré les entiers N congrus à 2 modulo 4. On s'est arrêté à 21^3 car si $b \geq 19^3$ on a
$a^3 - b^3 \geq (b+2)^3 - b^3 \geq 21^3 - 19^3 = 2402 > 2024$.

De même, pour $n = 5$, on teste les valeurs possibles de a et b pour trouver quels $N \equiv 2[4]$ on peut atteindre :

Si $b \geq 3$ alors $a^5 - b^5 \geq 5^5 - 3^5 = 2882 > 2024$

Ainsi $b = 1$ donc si $a \geq 5$ $a^5 - 1 \geq 5^5 - 1 = 3124 > 2024$
donc on peut uniquement avoir $a = 3$ et $b = 1$
Donc la différence $3^5 - 1^5 = 243 - 1 = 242$

Ainsi $b = 1$ donc si $a \geq 5$ $a^5 - 1 \geq 5^5 - 1 = 3124 > 2024$
donc on peut uniquement avoir $a = 3$ et $b = 1$
Donc la différence $3^5 - 1^5 = 243 - 1 = 242$

Ainsi, on a trouvé 15 entiers congru à 2 modulo 4 qui peuvent s'exprimer sous la forme $a^n - b^n$. Il y a donc $1518 + 15 = 1533$ entiers qui peuvent s'exprimer sous cette forme

AVILOV Anton et LAPP Matthias
Lycée Saint André, Colmar
Exercice n°2

Convergence : L'énoncé implique que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{10^k} = S \text{ avec } S \text{ un réel}$$

On remarque que $\frac{S}{10} + \frac{1}{9} = S$:

$$\frac{S}{10} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{10^k}}{10} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{10^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{10^{k+1}} + \frac{0}{10}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{k+1}}$$

or, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$, c'est la limite de la somme d'une suite géométrique, qui vaut :

$$= \frac{1}{\frac{9}{10}} - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}.$$

Donc $$\frac{S}{10} + \frac{1}{9} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{10^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{10^{k+1}}$$ on pose $q = k+1$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q}{10^q} = S$$

$0,12345\ldots$
$\downarrow \times \frac{1}{10}$
$0,012345\ldots$
$\downarrow + \frac{1}{9}$
$0,123456\ldots$

donc, $S = \frac{5}{10} + \frac{1}{9}$

$$\frac{9}{10} S = \frac{1}{9}$$

$$S = \frac{10}{81}$$ car $\frac{10}{81}$ est rationnel

On trouve la notation décimale de $\frac{10}{81}$ (elle doit être périodique)

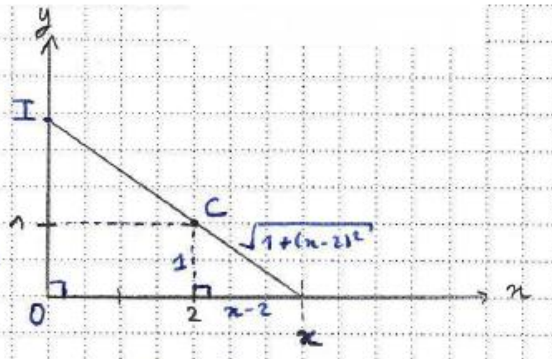
10	81
190	0,123456790
280	
370	
460	
550	
640	
730	
100	
19	

on retombe sur 19, donc la même chose recommence

La longueur de la période est 9,
donc le 2024ème chiffre est ~~le reste~~ le même que le reste de la D.E de 2024 par 9, soit ~~8~~ le 8-ème, donc c'est $\boxed{9.}$

FLIELLER Aurélie et YANG Menglin
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°3

On note x le côté du champs dont la plus courte distance à la cabane C (2, 1) est 1, y l'autre, selon un plan (o x y).



Soit I l'intersection de l'axe y et de l'hypothénuse du triangle de l'énoncé. Comme I, C, (x,0) et O, (2,0), (x,0) sont alignés dans cet ordre et (OI)//(C,(2,0)) d'après le théorème de Thalès, on a les triangles IO(x,0) et C(2,0)(x,0) semblables de rapport $\frac{x}{x-2}$ avec $x \neq 2$

Soit f la fonction qui à x associe le périmètre.

$$f(x) = \frac{x}{x-2}\left(1 + (x-2) + \sqrt{1+(x-2)^2}\right)$$

$$= \frac{x}{x-2}\left(x - 1 + \sqrt{x^2-4x+5}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x-2} - \frac{x}{x-2} + \frac{x\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2} \quad \text{avec } x \neq 2$$

Sur $\mathbb{R} - \{2\}$, on dérive f :

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} - \frac{(x-2)-x}{(x-2)^2} + \frac{\left(x\sqrt{x^2-4x+5}\right)'(x-2) - x\sqrt{x^2-4x+5}}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2} - \frac{-2}{(x-2)^2} + \frac{\left(x\sqrt{x^2-4x+5}\right)'(x-2) - x\sqrt{x^2-4x+5}}{(x-2)^2}$$

N° 3/3

$$= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+5} + x\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}\right)(x-2) - x\sqrt{x^2-4x+5}}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+5}(-2) + \frac{x(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+5}}\right)}{(x-2)^2}$$

$$= 1 - \frac{2}{(x-2)^2} - 2\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{(x-2)^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

On remarque que

$$f'\left(\frac{10}{3}\right) = 1 - \frac{2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - 2\,\frac{\sqrt{\frac{100}{9} - 4\cdot\frac{10}{3} + 5}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} + \frac{10}{3\sqrt{\frac{100}{9} - \frac{40}{3} + 5}}$$

$$= 0$$

On aimerait montrer que cela correspond à un minimum. On dérive :

$$f''(x) = -2\cdot(-2)\cdot(x-2)^{-3} - 2\cdot\frac{(2x-4)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-4x+5}}(x-2)^2 - 2(x-2)\cdot\sqrt{x^2-4x+5}}{(x-2)^{\cancel{3}4}}$$

$$+ \frac{\sqrt{x^2-4x+5} - (2x-4)\cdot x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-4x+5}}}{\left(\sqrt{x^2-4x+5}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{(x-2)^3} + \frac{4\sqrt{x^2-4x+5}}{(x-2)^3} - \frac{4x^2-17x+20}{(x-2)\cdot(x^2-4x+5)^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2-4x+5)^{3/2} + x^3 - 12x + 20}{(x-2)^3\cdot(x^2-4x+5)^{3/2}}$$

Soit $g(x) = x^3 - 12x + 20$

$g'(x) = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 12 = 0 \qquad x^2 = 4 \qquad x = 2$ (ou -2, mais nous travaillons sur $\mathbb{R}_+$)

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	4	$\nearrow$	

$g(2) = 2^3 - 12\cdot 2 + 20$
$= 28 - 24 = 4$

g est > 0 sur $\mathbb{R}_+$

$f''(x)$ est alors positive car $(x-2)^3 > 0$ puisque $x > 2$ (énoncé),
et $\sqrt{x^2-4x+5}^{\,3} > 0$

$f''(x)$ est > 0, ainsi $f'(x)$ est strictement croissante. On a alors

x	0		$\frac{10}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f\left(\frac{10}{3}\right)$	$\nearrow$	

f admet un alors un minimum en $x = \frac{10}{3}$

N° …/…

$$f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{100}{9\left(\frac{4}{3}\right)} - \frac{10}{3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)} + \frac{10\sqrt{\frac{100}{9} - 4\cdot\frac{10}{3} + 5}}{3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$= 10$$

La longueur minimale de la clôture est de 10 km.