Rallye

Rallye
2025

Rapport du 53ème Rallye Mathématique d'Alsace

UFR de mathématique
et d'informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : +33 (0)3 68 85 01 97
irem@math.unistra.fr
www.unistra.fr

IREM de
Strasbourg

IREM de
Strasbourg

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur :
Christel BERNHARDT, Pascal MALINGREY, Dominique WEIL, Stephan CZERNIAK

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 53ème fois en 2025. Créé en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (https://mathinfo.unistra.fr/irem/popularisation/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale. Elle a réuni environ 1 030 participants dont 110 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s'inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, dix-sept binômes sont primés : trois premiers prix, cinq deuxièmes prix et neuf troisièmes prix.

En Terminale, seize binômes ont été sélectionnés : un prix exceptionnel, cinq premiers prix, six deuxièmes prix et quatre troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix a lieu à l'UFR de mathématique et d'informatique à Strasbourg. Elle est suivie d'une réception en l'honneur des lauréats.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 53$^{\text{ème}}$ édition :

- ◊ Le Rectorat de l'académie de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- ◊ Le Département de Mathématiques
- ◊ L'IREM de Strasbourg
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ La ville de Barr
- ◊ La ville de Bischwiller
- ◊ La ville d'Obernai
- ◊ La ville de Saverne
- ◊ La société NUMWORKS

Palmarès des Premières 2025

Premier prix

- ✓ BILDSTEIN Arthur et JOUGNEAU Charlie
  Professeur : M. Decque, Lycée Louis Couffignal, Strasbourg

- ✓ JOLLAIN Léo et PAGLIANO Julien
  Professeur : Mme Hertzog, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ MORIN-BRINGEL Emile et SCHNELZAUER Quentin
  Professeur : M. Kubler, Lycée Jean Rostand, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ HEINRICH Clément et MERTZ Enzo
  Professeur : Mme Pfister, Lycée du Haut-Barr, Saverne

- ✓ BOBON Loric et RIBIERE Daphne
  Professeur : Mme Collette, Lycée Français, Luxembourg

- ✓ DEBANDE Matteo et PINTO Louis
  Professeur : Mme Collette, Lycée Français, Luxembourg

- ✓ MAASS Norah et UTVIC Mila
  Professeur : Mme Mothay, Lycée Français, Berlin

- ✓ GOMMARD Guilhem et GREBOVAL Arthur
  Professeur : M. Scheinert, Lycée Français, Berlin

Troisième prix

- ✓ GERARDIN Raphaël et HUPPERTZ Xavier
  Professeurs : Mmes Mariani et Roche, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ AUBIN-IRIBARREN Maurice et GARWOOD-LECAT Jonathan
  Professeurs : MM. Matt et Alilouch, Lycée des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ HABIBULLAH KHAN Fahim et JUNG Justin
  Professeur : M. Kubler, Lycée Jean Rostand, Strasbourg

- ✓ BOCCARA Thomas et VAN EDMOND DASCON Ellande
  Professeur : Mme Collette, Lycée Français, Luxembourg

- ✓ KENNEL Melvin et LAGEL Lilou
  Professeur : M. Pruvot, Lycée Adrien Zeller, Bouxwiller

- ✓ SAVCHENKO Antonina et THEOLEYRE Anaïs
  Professeur : Mme Stupfler, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ DUPONT Christophe et PIETERS Constantin
  Professeur : M. Barau, Ecole Européenne, Luxembourg

- ✓ ARNOLD Paul et STAHN Thelma
  Professeur : Mme Turlure, Lycée Général Leclerc, Saverne

- ✓ MARLATS Joël et SLIMANI Sofiane
  Professeur : M. Kubler, Lycée Jean Rostand, Strasbourg

Palmarès des Terminales 2025

Prix exceptionnel

- ✓ IRISSARRY Matthieu et OSSWALD Ethan
  Professeur : M. Keller, Institution Notre-Dame des Mineurs, Strasbourg

Premier prix

- ✓ GREENBERG Marc et KAMENSKY Sascha
  Professeur : M. Torres-Perez, Lycée Français, Vienne

- ✓ FRANTZEN Lucas et REMMY Nicolas
  Professeur : M. Alati, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ NOWAK Jakub et SEBAN Arthur
  Professeurs : Mme Collette et M. Barbier, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ REINHART Mathieu et SAX Hugo
  Professeur : M. Bolli, Lycée Alfred Kastler, Guebwiller

- ✓ LAMMERT Emile et REVILLARD Martin
  Professeur : Mme Henriet, Lycée Albert Schweitzer, Mulhouse

Deuxième prix

- ✓ NGUYEN BUENO Lara et PETIOT Elise
  Professeurs : Mme Senjean et M. Logel, Lycée des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ DELBECQ Mathias et SURUCIC Alexandre
  Professeurs : MM. Malingrey et Gauthier, Lycée Marie Curie, Strasbourg

- ✓ BREHIN-BOUIN Maxence et MOGHADDASSI Matthieu
  Professeurs : M. et Mme Audeoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ HERZOG Raphaël et ROOSMA Madis
  Professeurs : MM. Audeoud et Elophe, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ ABDAOUI Mondher et RACHEDI Adel
  Professeur : M. Monath, Lycée Jean Rostand, Strasbourg

- ✓ BOUZOUBAA Marwan et SCHWARTZ Simon
  Professeur : Mme Collet, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ DIBLING Benoit et GUSS Timothée
  Professeurs : MM. Hamm et Martin, Lycée Heinrich Nessel, Haguenau

- ✓ POISSON Maxime et WALRY Anthony
  Professeurs : Mme Collette et M. Brush, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ BENSALAH Daoud et EL BAYED Kamil
  Professeur : M. Gauthier, Lycée Marie Curie, Strasbourg

- ✓ JELDEN Claire et PARESYS Victor
  Professeurs : Mmes Haas et Thomas, La Doctrine Chrétienne, Strasbourg

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2025
53ème édition

PREMIERES
Mercredi 26 mars 2025

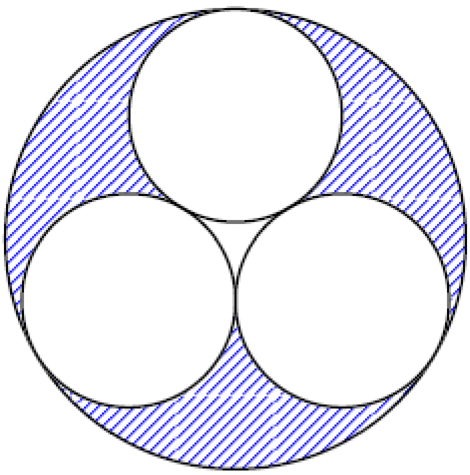
Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une montre connectée, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
On considère la suite des groupes d'entiers impairs suivante : {1}, {3 ; 5}, {7 ; 9 ; 11}, {13 ; 15 ; 17 ; 19} et ainsi de suite.
L'un des groupes contiendra 2025. Quelle est la somme des nombres de ce groupe ?

Exercice 2 :
Sur la figure ci-dessous, les trois petits cercles ont pour rayon 1 et sont tangents entre eux ainsi qu'au grand cercle.



Quelle est l'aire de la zone hachurée ?

Exercice 3 :
Aymeric et Ben jouent au baby-foot et notent le score après chaque but sur une fiche.
Voici un exemple de fiche pour une partie en cinq balles remportée 3 buts à 2 par Aymeric :

Aymeric	1	2	2	2	3
Ben	0	0	1	2	2

On remarque que, dans cette partie, Ben n'a jamais mené au score.

Combien peut-on trouver de fiches possibles pour une partie en dix balles où Ben n'a jamais mené au score ?

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2025
53ème édition

TERMINALES
Mercredi 12 mars 2025

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une montre connectée, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
Sur le côté d'un carré d'aire 2025, on construit un triangle rectangle dont les trois côtés sont entiers (le carré et le triangle ont donc un côté en commun).
Combien de tels triangles peut-on construire ?

Exercice 2 :
Aline et Bernard disposent chacun de deux dés à six faces équilibrés.
Ils lancent chacun à leur tour un dé et le premier qui affiche un carré (avec un ou plusieurs des dés déjà lancés) gagne la partie. C'est Aline qui lance un dé pour commencer la partie.
Par exemple si Aline a obtenu 5 et Bernard 2, Bernard gagne la partie (car 25 est un carré).
Si Aline et Bernard ont obtenus tous les deux 3 et Aline 4 en lançant son deuxième dé, c'est Aline qui gagne (car 4 est un carré).
La partie s'arrête dès que l'un des deux a gagné ou après les quatre lancers.
Quelle est la probabilité qu'Aline gagne ? Quelle est la probabilité que Bernard gagne ?

Exercice 3 :
On peut remarquer que $2025 = 10^3 + 2 \times 8^3 + 1^3$ ou encore $2025 = 11^3 + 2 \times 7^3 + 2^3$.
Combien de nombres N strictement inférieurs à 2025 peuvent-ils s'écrire sous la forme :
$N = a^3 + 2b^3 + c^3$ où a, b, c sont trois entiers naturels non nuls tels que $a > b > c$?

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2025

Cette année, 515 binômes et aussi quelques monômes représentant environ 470 élèves de premières et 560 élèves de terminale ont participé aux épreuves du Rallye.
La participation qui reste importante est en légère baisse de 6 % par rapport à 2024.

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois très originales. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.

Nous continuons à relever que trop d'élèves n'apportent aucun soin à la présentation de leur travail : il y a des ratures à toutes les lignes, les instruments de construction tels que la règle et le compas ne sont pas utilisés : les figures sont tracées à main levée.
Dans l'ensemble, on remarque beaucoup d'affirmations non justifiées et souvent un mélange de la phase de recherche avec la phase de rédaction.
La qualité mathématique des copies est quelquefois d'un très bon niveau, les exercices sont abordés par un nombre important de candidats et les méthodes proposées ont parfois fait l'admiration de l'équipe des correcteurs.
Lorsque le sujet comporte un exercice de géométrie, il serait souhaitable que les élèves tracent leurs figures sur une feuille annexe (proprement, à la règle et au compas et non à main levée), afin que les correcteurs puissent l'avoir sous les yeux lors de la lecture de l'ensemble de l'exercice.
La rigueur et la clarté des raisonnements est un élément important dans l'appréciation des copies.

En première, les premiers prix ont parfaitement résolu deux exercices et ont très bien avancé dans le troisième.
Les deuxièmes prix ont très bien résolu deux exercices et donné des éléments dans le troisième.
Les troisièmes prix ont très bien résolu deux exercices ou très bien résolu un exercice et bien avancé dans les deux autres.

En terminale, le prix exceptionnel a très bien résolu les trois exercices. Les premiers prix ont très bien résolu deux exercices et donné des éléments dans le troisième.
Les deuxièmes prix ont résolu deux exercices et parfois donné quelques éléments dans le troisième. Les troisièmes prix ont très bien avancé dans la résolution de deux exercices.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les bonnes solutions rencontrées.

Compte–rendu de l'épreuve de Première

Les candidats à l'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Le premier exercice portait sur une suite de groupes d'entiers impairs. Dans le deuxième exercice, il fallait calculer l'aire d'une zone délimitée par quatre cercles. Le troisième exercice portait sur un dénombrement.
Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Beaucoup de résultats intermédiaires sont admis. Les élèves conjecturent des formules à partir des premiers termes mais ne les démontrent pas. Les explications manquent souvent de clarté.

Exercice 2 : C'est un exercice qui a été assez bien réussi : les élèves semblent apprécier la géométrie. Toutefois, de trop nombreux binômes écrivent que l'aire d'un disque de rayon r est $2\pi r^2$ au lieu de πr^2. Des élèves calculent avec des valeurs approchées dans les calculs intermédiaires.

Exercice 3 : Nous avons trouvé plusieurs méthodes intéressantes. Les raisonnements sont parfois mal présentés et des résultats sont donnés sans trace de calcul ou sans explication convaincante.

Compte–rendu de l'épreuve de Terminale

L'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Terminale comprend, comme à l'habitude, trois exercices. Dans le premier exercice il s'agissait de trouver le nombre de triangles rectangles qui vérifiaient plusieurs conditions. Le deuxième exercice était un exercice de probabilités. Le troisième exercice portait sur une écriture des nombres entiers naturels sous la forme d'une somme faisant apparaître trois cubes.
Tous les exercices ont été résolus correctement dans des copies.

Exercice 1 : L'énoncé est souvent mal compris en particulier la notion de « côté en commun » que certains interprètent comme seulement une partie du côté. Plusieurs binômes commencent par étudier le cas d'un triangle rectangle isocèle et certains se limitent à ce cas. Des binômes introduisent une fonction qu'ils tabulent sur leur calculatrice pour trouver des solutions entières dans le cas où le côté de longueur 45 est un des côtés de l'angle droit mais la plupart n'expliquent pas pourquoi il est possible de limiter leur recherche. Pour certains, il semble que les seuls triplets pythagoriciens soient 3, 4, 5 et leurs multiples.

Exercice 2 : Les outils mathématiques de la modélisation en probabilité ne sont visiblement pas acquis dans un certain nombre de copies : les événements sont rarement définis et les explications deviennent extrêmement confuses dès que l'on aborde le troisième lancer ; les arbres utilisés sont la plupart du temps des arbres de dénombrement et non des arbres (simplifiés) de probabilité ; la distinction entre probabilité d'un événement, d'une intersection et probabilité conditionnelle est presque toujours absente. Dans beaucoup de copies où l'exercice a été abordé, les élèves se trompent déjà en calculant la probabilité que Bernard gagne à son premier lancer.

Exercice 3 : Dans l'ensemble, c'est l'exercice qui a été le mieux abordé et beaucoup arrivent à 129 solutions mais sans tentative apparente pour voir si deux triplets (a, b, c) donnent le même entier, sauf dans quelques cas.

Copies des Premières

KENNEL Melvin et LAGEL Lilou
Lycée Adrien Zeller, Bouxwiller
Exercice n°1

Le $n^{ème}$ nombre impair est $2n-1=2025$

$2n-1=2025$
$2n=2025+1$
$n=\dfrac{2026}{2}=1013$

Donc 2025 est le $1013^{ème}$ nombre de la suite.

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Le but étant de chercher 2 valeurs de n appartenant à $\mathbb{N}$ pour lesquelles on obtient : $k<1013<k+1$

On appelle k le rang du groupe de la suite numérique.
Nous avons essayer avec différentes valeurs pour voir lesquelles se rapproche le plus de 1013.

- $k=20$ $\quad \dfrac{20\times 21}{2}=210$
- $k=30$ $\quad \dfrac{30\times 31}{2}=465$
- $k=40$ $\quad \dfrac{40\times 41}{2}=820$
- $k=50$ $\quad \dfrac{50\times 51}{2}=1275$

Etant donné que quand $k=20$ cela est trop petit et que quand $k=50$ cela est trop grand nous allons essayer une valeur entre 40 et 50.

• $k = 45$ $\quad \dfrac{45 \times 46}{2} = 1035$ | 1035ème nombre impair mais c'est le dernier du groupe 45.

• $k = 44$ $\quad \dfrac{44 \times 45}{2} = 990$ | 990ème nombre impair mais c'est le dernier du groupe 44.

Donc 2025 appartient au 45ème groupe.

Etant donné que 991 est le premier nombre impair du groupe 45 nous allons chercher sa valeur.

$n = 991$

$2n - 1$

$\Leftrightarrow 2 \times 991 - 1$

$\Leftrightarrow 1981$

1981 est le 1er terme de la suite numérique.

Maintenant pour le dernier terme :

$n = 1035$

$2n - 1$

$\Leftrightarrow 2 \times 1035 - 1$

$\Leftrightarrow 2069$

2069 est le dernier terme de la suite numérique.

Calculons la somme des nombres de ce groupe :

$$S = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre d'éléments}}{2}$$

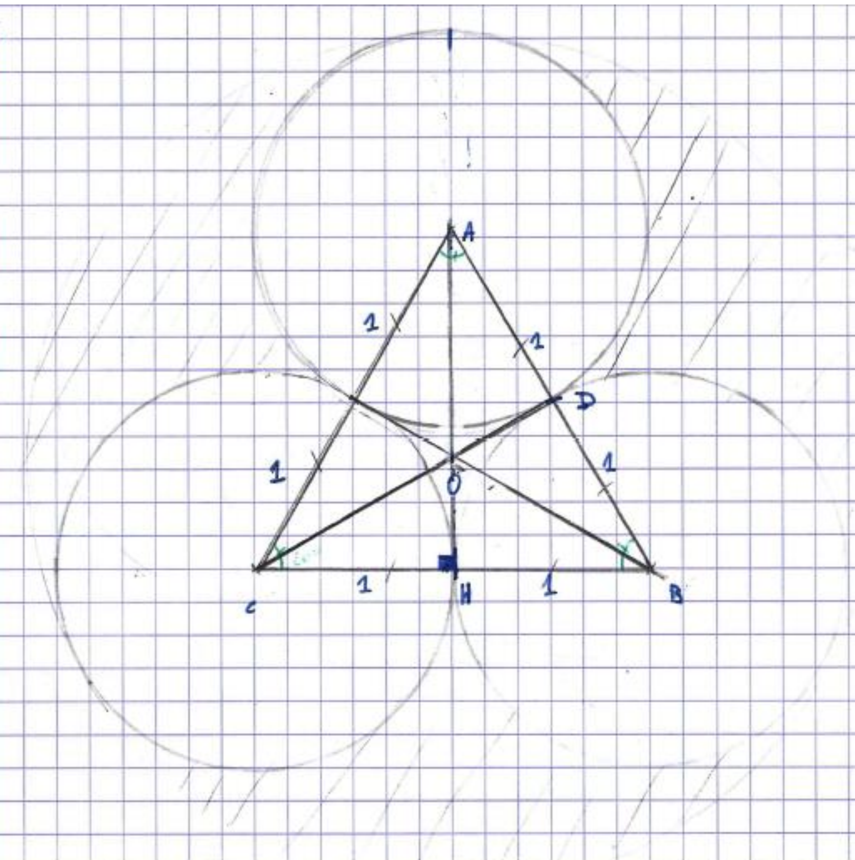
$$= \frac{(1981 + 2069) \times 45}{2}$$

$$S = 91\,125$$

u_1 = 1 élément
u_2 = 2 éléments
⋮
u_{45} = 45 éléments

Pour conclure la somme des nombres de ce groupe est de 91 125.

MORIN-BRINGEL Emile et SCHNELZAUER Quentin
Lycée Jean Rostand, Strasbourg
Exercice n°2



On considère le triangle ABC qui relie le centre des 3 cercles comme sur le schéma ci-dessus.
Chaque côté vaut alors 2 rayons d'un cercle :
$AB = AC = BC = 2$
=> Le triangle ABC est équilatéral
=> Tous ses angles ont pour mesure 60°.
La médiatrice passant par A coupe [BC] en son milieu, on appelera ce milieu le point H.

$O \in (AH)$ → On nomme O le centre du plus grand cercle du schéma.

• Calculons la longueur AH :

AHC est un triangle rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore

$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AH^2 = \underbrace{AC}_{2}{}^2 - \underbrace{HC}_{1}{}^2$

$\Rightarrow AH^2 = 3$

$\Rightarrow \underline{AH = \sqrt{3}}$

• Calculons OC (rayon du cercle circonscrit à ABC) :

ABC étant un triangle equilatéral, ses mediatrices sont aussi ses bissectrices.

Ainsi, $\widehat{DCB} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$ soit $\widehat{DCB} = 30°$

De plus, $O \in [CD]$ et $H \in [BC]$ donc $\widehat{DCB} = \widehat{OCH} = 30°$

En utilisant la trigonométrie dans AHC :

$OC = \frac{CH}{\cos(\widehat{OCH})} \Rightarrow OC = \frac{1}{\cos(30°)} = \underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

• Calculons maintenant l'aire du grande cercle de centre O.

Son rayon r vaut : $r = OC + \underbrace{1}_{\text{Rayon du cercle de centre C}}$.

D'où $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_0} = \pi r^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{E}_0} = \pi \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)^2$

$\Rightarrow \underline{\mathcal{A}_{\mathcal{E}_0} = \frac{4\sqrt{3}\pi + 7\pi}{3}}$

• L'aire $\mathcal{A}_{Hachuré}$ de la partie hachurée s'obtient alors en soustrayant l'aire $\mathcal{A}_{\mathcal{E}b}$ des cercles blancs et l'aire $\mathcal{A}_{centre}$ de la partie au centre des 3 cercles blancs à $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_0}$

$\mathcal{A}_{Hachuré} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}_0} - \mathcal{A}_{\mathcal{E}b} - \mathcal{A}_{centre}$.

- L'aire des cercles blancs vaut :

$\mathcal{A}_{\mathcal{E}b} = 3(\pi \underbrace{r^2}_{1}) \Rightarrow \underline{\mathcal{A}_{\mathcal{E}b} = 3\pi}$

- On détermine l'aire $\mathcal{A}_{centre}$:

On peut l'obtenir en soustrayant à l'aire du triangle $\mathcal{A}_{ABC}$ les $\frac{1}{6}$ d'aire des cercles blancs :

$360° \leftrightarrow 1$
$60° \leftrightarrow x$
$x = \frac{1}{6}$

$$\mathcal{A}_{centre} = \mathcal{A}_{ABC} - 3 \times \frac{1}{6} \pi \overset{1}{\hat{r}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{centre} = \frac{AH \times BC}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{centre} = \frac{\sqrt{3} \times \cancel{2}}{\cancel{2}} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{\mathcal{A}_{centre} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}$$

Finalement,

$$\mathcal{A}_{Hachuré} = \frac{4\sqrt{3}\pi + 7\pi}{3} - 3\pi - \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{Hachuré} = \frac{8\sqrt{3}\pi - \pi - 6\sqrt{3}}{6} = \underline{\frac{2\sqrt{3}(4\pi - 3) - \pi}{6}} \approx 4{,}9996.$$

BILDSTEIN Arthur et JOUGNEAU Charlie
Lycée Louis Couffignal, Strasbourg
Exercice n°3

Prenons deux cas distinct et les plus extrême

si Ben et Aymeric ont une partie serrée

A	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
B	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5

Sachant que Ben n'a jamais mené au score
soit S_A le score final d'Aymeric
et S_B le score final de Ben alors

$5 \leq S_A \leq 10$ et $0 \leq S_B \leq 5$

car Ben ne mène jamais au score.

et une partie où Aymeric gagne sans perdre de point :

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

pour trouver le nombre de partie possible nous allons partir dans le sens inverse de la partie afin de déterminer les issues et les possibilités

N° 9

oN

de chemin possibles.
On dira par exemple que le score final 10 à 0 équivaut à une issue, qu'on notera en indice et le score 9 à 0 équivaut à 2 issues : 10 à 0 et 9 à 1.
Pour l'illustrer, faisons un arbre où les chemins sont illustrés par des flèches :

$10^{è}$ point :	10 ; 0_{1}	9 ; 1_{1}	8 ; 2_{1}	7 ; 3_{1}	6 ; 4_{1}	5 ; 5_{1}
$9^{è}$ point	9 ; 0_{2}	8 ; 1_{2}	7 ; 2_{2}	6 ; 3_{2}	5 ; 4_{2}	
$8^{è}$ point	8 ; 0_{4}	7 ; 1_{4}	6 ; 2_{4}	5 ; 3_{4}	4 ; 4_{2}	
$7^{è}$ point	7 ; 0_{8}	6 ; 1_{8}	5 ; 2_{8}	4 ; 3_{6}		
$6^{è}$ point	6 ; 0_{16}	5 ; 1_{16}	4 ; 2_{14}	3 ; 3_{6}		
$5^{è}$ point	5 ; 0_{32}	4 ; 1_{30}	3 ; 2_{20}			
$4^{è}$ point	4 ; 0_{62}	3 ; 1_{50}	2 ; 2_{20}			
$3^{è}$ point	3 ; 0_{112}	2 ; 1_{70}				
$2^{è}$ point	2 ; 0_{182}	1 ; 1_{70}				
1^{er} point	1 ; 0_{252}					

Il y a donc 252 suites de score possibles, soit 252 fiches possibles.

Copies des Terminales

IRISSARRY Matthieu et OSSWALD Ethan
Institution Notre-Dame des Mineurs, Strasbourg
Exercice n°1

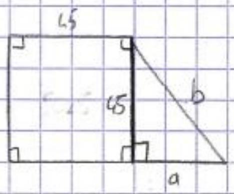
Le côté du carré d'aire 2025 est un côté du triangle rectangle : nous avons donc 2 cas de figure :

1 : le côté du carré n'est PAS l'hypoténuse

2 : le côté du carré EST l'hypoténuse

On commence par le cas numéro $\boxed{1}$.

1 : Schéma explicatif :



l'aire du carré est de 1025
or $\mathcal{A} = \text{côté}^2$
d'où $1025 = \text{côté}^2 \iff \text{côté} = \sqrt{2025} = 45$

entre les 2 autres côtés a et $b \in \mathbb{N}^*$ et on note b l'hypoténuse
De ce fait $b > a$.

D'après le théorème de Pythagore, nous avons donc :
$45^2 + a^2 = b^2 \iff b^2 - a^2 = 45^2 \iff \boxed{(b-a)(b+a) = 45^2}$

Cherchons maintenant les diviseurs de 45^2 :
$45^2 = (3^2 \times 5)^2 = 3^4 \times 5^2$

De ce fait, l'ensemble $\mathcal{D}$ des diviseurs positifs de 45^2 est :
$\mathcal{D} = \{1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 25 ; 27 ; 45 ; 75 ; 81 ; 135 ; 225 ; 405 ; 675 ; 2025\}$

or comme vu précédemment $(b-a)(b+a) = 45^2$
or $(b-a) < b+a$ (car $a > 0$)

donc à chaque fois $(b-a)$ est le petit diviseur qui sera associé au plus grand : $(b+a)$

Pour illustrer : par exemple : $(b-a)(b+a) = 45^2$
or $1 \times 2025 = 45^2$

donc une solution est $\begin{cases} b-a = 1 \\ b+a = 2025 \end{cases}$ → on les associe donc par couple

Attention : puisque $b \neq a \neq 0$, $b-a \neq b+a$ donc le couple $(45 ; 45)$ est exclut.

Nous avons donc 7 couples différents.

Calculons les côtés a et b de chacun de ces couples :

- $\underline{(1 ; 2025)}$: $\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1+a \\ 1+2a=2025 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1+a \\ a=\frac{2024}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=1013 \\ a=1012 \end{cases}}$

- $\underline{(3 ; 675)}$: $\begin{cases} b-a=3 \\ b+a=675 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+3 \\ 3+2a=675 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+3 \\ a=\frac{672}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=339 \\ a=336 \end{cases}}$

- $\underline{(5 ; 405)}$: $\begin{cases} b-a=5 \\ b+a=405 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+5 \\ 5+2a=405 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+5 \\ a=\frac{400}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=205 \\ a=200 \end{cases}}$

- $\underline{(9 ; 225)}$: $\begin{cases} b-a=9 \\ b+a=225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+9 \\ 9+2a=225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+9 \\ a=\frac{216}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=117 \\ a=108 \end{cases}}$

- $\underline{(15 ; 135)}$: $\begin{cases} b-a=15 \\ b+a=135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+15 \\ 15+2a=135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+15 \\ a=\frac{120}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=75 \\ a=60 \end{cases}}$

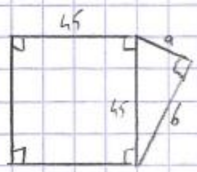
- $\underline{(25 ; 81)}$: $\begin{cases} b-a=25 \\ b+a=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+25 \\ 25+2a=81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+25 \\ a=\frac{56}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=53 \\ a=28 \end{cases}}$

- $\underline{(27 ; 75)}$: $\begin{cases} b-a=27 \\ b+a=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+27 \\ 2a+27=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+27 \\ a=\frac{48}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=51 \\ a=24 \end{cases}}$

De plus on a vérifié que chaque couple vérifie $a^2 + 45^2 = b^2$ (relation de Pythagore).

De ce fait, <u>ces 7 triangles sont constructibles</u>.

Passons maintenant au cas numéro 2 :



ici, côté = 45 est l'hypoténuse

donc la relation de Pythagore dans ce triangle rectangle est :

$$a^2 + b^2 = 45^2 \iff b^2 = 45^2 - a^2 \iff b = \sqrt{45^2 - a^2}$$

on pose toujours $b \geq a$ ainsi que $1 \leq a < 45$ et $1 \leq b < 45$

on teste donc avec la calculatrice la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{45^2 - x^2}$

(ici x correspond à "a" et $f(x)$ à "b")

On teste donc pour tout x entier naturel compris entre 1 et 45 (45 exclut) et on regarde les solutions telles $f(x)$ est lui-même un entier naturel entre 1 et 45 (45 exclut).

il n'y a qu'une solution telles que $x = 27$ et $f(x) = 36$

De ce fait, on a $a = 27$ et $b = 36$

On vérifie : $27^2 + 36^2 = 2025$ et $45^2 = 2025$

Donc la relation est vérifiée, donc le triangle est constructible.

En conclusion, il y a donc $\boxed{8}$ triangles que l'on peut construire tels que le côté d'un carré d'aire 2025 soit un côté du triangle.

REINHART Mathieu et SAX Hugo
Lycée Alfred Kastler, Guebwiller
Exercice n°2

On s'intéresse aux combinaisons possibles gagnantes, c'est-à-dire les carrés qui peuvent faire gagner la partie. Tout nombre $n \in \mathbb{N}$ s'écrit sous la forme $(x+10k)$ avec $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$ et $x \in [0;9]$

On a par ailleurs
$$(0+10k)^2 \equiv 0\,[10]$$
$$(1+10k)^2 \equiv 1\,[10]$$
$$(2+10k)^2 \equiv 4\,[10]$$
$$(3+10k)^2 \equiv 9\,[10]$$
$$(4+10k)^2 \equiv 6\,[10]$$
$$(5+10k)^2 \equiv 5\,[10]$$
$$(6+10k)^2 \equiv 6\,[10]$$
$$(7+10k)^2 \equiv 9\,[10]$$
$$(8+10k)^2 \equiv 4\,[10]$$
$$(9+10k)^2 \equiv 1\,[10]$$

1 et 4 sont déjà les carrés de 1 et de 2, si l'on a 1 ou 4 sur un dé, on gagne directement. Par ailleurs, on ne peut pas avoir de 0 et 9, car les dés ne vont que de 1 à 6. On doit considérer les possibilités d'avoir un carré se terminant en 5. $5^2 = 25$ donc un 2 et 5 font gagner la partie.

Tout nombre donnant un carré se terminant par 5 s'écrit sous la forme $(5+10k)$.

$$(5+10k)^2 = 25 + 100k^2 + 100k$$
$$= 25 + 100(k+k^2)$$

donc tout nombre se terminant par 5 se termine par 25.

Par ailleurs les seuls nombres donnant un carré se terminent par 6 se terminent par 4 ou 6. Le 4 gagne donc nous n'étudions que le cas avec 6

$6^2 = 36$ donc 36 est une combinaison gagnante comme 1, 4, et 25

$16^2 = 256$

$26^2 = 676$

On ne peut pas avoir de 7

$36^2 = 1296$ On ne peut pas avoir de 9

$46^2 = 2116$ gagne car il y a des 1

$56^2 = 3136$

$66^2 = 4356$

$76^2 = 5776$ On ne peut pas avoir de 7

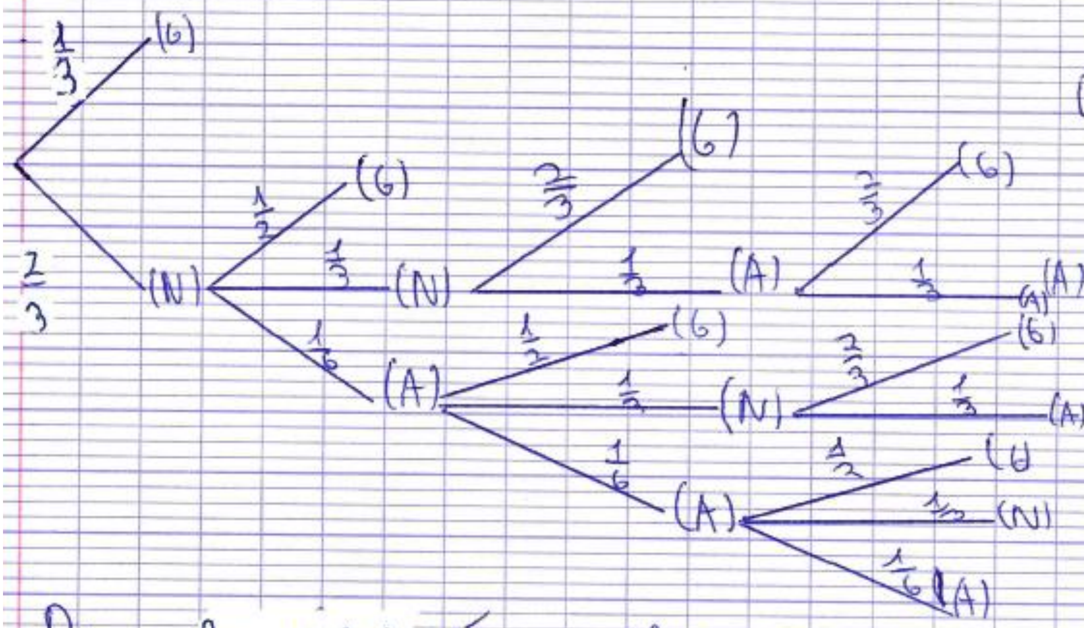
$86^2 = 7396 > 6666$ maximum atteignable dans la partie

Donc, par disjonction des cas, on ne peut que gagner si on a un 1, un 4, un 2 et un 5 ou un 3 et un 6.

Au premier tour, Aline a $\frac{1}{3}$ de chance d'avoir 1 ou 4, et donc de gagner. Elle a $\frac{2}{3}$ de chance d'avoir un autre nombre. Donc Bernard a $\frac{2}{3}$ de chance de jouer le $2^{ème}$ tour.

$2^{ème}$ tour : Bernard a $\frac{1}{3}$ de faire 1 ou 4 et donc de gagner, $\frac{1}{6}$ chance d'avoir le nombre qui manquait pour compléter le 1^{er} nombre d'Aline soit $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$ chance de gagner s'il joue. Il a : donc $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ de chance de gagner au deuxième tour.

Il peut toutefois aussi reproduire le numéro précédent d'Aline ($\frac{1}{6}$ chance) ou en avoir un autre non-gagnant ($\frac{2}{3}$ chance). Comme les situations se reproduisent, nous allons passer à un arbre de probabilité.



Donc la probabilité que Aline gagne est de $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{4}{27}+\frac{1}{18}=\frac{29}{54}$

et P que Bernard gagne $=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

Donc la chance qu'Aline a de gagner est supérieure à celle de Bernard. Elle a $\frac{29}{54}$ chance de gagner. Bernard a $\frac{5}{12}$ de chance de gagner et la chance d'égalité est de $\frac{5}{108}$

FRANTZEN Lucas et REMMY Nicolas
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°3

On cherche le nombre d'entiers $N < 2025$ tel que
$N = a^3 + 2b^3 + c^3$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ et $a > b > c$.

Tout d'abord, comme $N < 2025$

$$a^3 + 2b^3 + c^3 < 2025$$
$$a^3 < 2025 - 2b^3 - c^3$$
$$a < \sqrt[3]{2025 - 2b^3 - c^3}$$

comme $b > 0$ et $c > 0$, on a forcément $a < \sqrt[3]{2025}$

donc $a \leqslant 12$

de plus, comme $0 < c < b < a < 13$:

$c \geqslant 1$ donc $b \geqslant 2$ et $a \geqslant 3$

donc a peut varier entre 3 et 12 (inclus),
b peut varier entre 2 (inclu) et a (exclu),
et c peut varier entre 1 (inclu) et b (exclu).

nous avons donc réalisé le programme python suivant :

```
compteur = 0
nombres_deja_comptes = set()
for a in range(3, 13):
    for b in range(2, a):
        for c in range(1, b):
            N = a**3 + 2*b**3 + c**3
            if N < 2025:
                if N not in nombres_deja_comptes:
                    compteur += 1
                    nombres_deja_comptes.add(N)
print(compteur)
```

Nous avons exécuté ce programme sur la calculatrice et nous trouvons qu'il existe 127 nombres strictement inférieurs à 2025 qui peuvent s'écrire sous la forme $N = a^3 + 2b^3 + c^3$.

NGUYEN BUENO Lara et PETIOT Elise
Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
Exercice n°3

Cherchons tout d'abord les valeurs que peuvent prendre a, b et c.
On sait que $a \in \mathbb{N}^*$ $b \in \mathbb{N}^*$ $c \in \mathbb{N}^*$ et $a > b > c$.
On cherche a, b, c tels que $a^3 + 2b^3 + c^3 = N$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $N < 2025$.

$a > b > c$ et $a, b, c \in \mathbb{N}^3_*$ donc les plus petites valeurs que peuvent prendre a, b et c sont respectivement 3, 2 et 1.

Et $12^3 + 2 \times 2^3 + 1^3 = 1745$
$13^3 + 2 \times 2^3 + 1^3 = 2214 > 2025$
Donc $a = 12$ est la plus grande valeur que peut prendre a puisque $b \geq 2$ et $c \geq 1$ donc $2b^3 + c^3$ ne peut pas valoir moins de $2 \times 2^3 + 1^3$. Et même lorsque b et c sont minimales, prendre $a = 13$ ne respecte pas la condition $N < 2025$.

Donc $a \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

De même on peut chercher la valeur maximale de b:

Pour cela, on considère $c = 1$ et $a = b+1$ afin que $a > b$ et a soit le plus petit possible
On a: $10^3 + 2 \times 9^3 + 1 = 2459 > 2025$
$9^3 + 2 \times 8^3 + 1 = 1754 < 2025$

~~celle de b~~ Donc $b = 8$ est la valeur maximale que peut prendre b.

N° ..1/.6.

$b \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

De même, cherchons la valeur maximale de c:

Pour cela prenons $a = c+2$ et $b = c+1$ afin que $a > b > c$ avec a et b les plus petits possibles.

$8^3 + 2 \times 7^3 + 6^3 = 1414 < 2025$
$9^3 + 2 \times 8^3 + 7^3 = 2096 > 2025$

Donc 6 est la plus grande valeur que peut prendre c.

$c \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Consignons dans un tableau les valeurs de a^3+2b^3.
On ne prend pas en compte la partie du tableau où $b \geq a$.

	b \ a	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L_2	2	43	80	141	232	359	528	745	1016	1347	1744
L_3	3		118	179	270	397	566	783	1054	1385	1782
L_4	4			253	344	471	640	857	1128	1459	1856
L_5	5				466	593	762	979	1250	1581	1978
L_6	6					775	944	1161	1432	1763	2160
L_7	7						1198	1415	1686	2017	2414
L_8	8							1753	2024	2355	2752

On note L_n la ligne dans laquelle $b=n$.

- On remarque que dans L_2, c peut uniquement prendre la valeur 1 car $b=2$ et on veut $b > c > 0$.

Listons l'ensemble des $N = a^3+2b^3+c^3$ qui peuvent être atteints dans L_2 :

$L_2 : \{44 ; 81 ; 142 ; 233 ; 360 ; 529 ; 746 ; 1017 ; 1348 ; 1745\}$

N peut prendre 10 valeurs différentes pour $b=2$.

• Dans L_3 c peut valoir 1 ou 2 donc $c^3 = 1$ ou $c^3 = 8$.

Listons de même l'ensemble des $N = a^3 + 2b^3 + c^3$ atteignables dans L_3 :

$L_3 = \{119 ; 126 ; 180 ; 187 ; 271 ; 278 ; 398 ; 405 ; 567 ; 574 ; 784 ; 791 ;$
$1055 ; 1062 ; 1386 ; 1393 ; 1783 ; 1790\}$

N peut prendre 18 valeurs différentes pour $b = 3$.

• Dans L_4 c peut valoir 1 ou 2 ou 3 donc $c^3 = 1$ ou $c^3 = 8$ ou $c^3 = 27$

$L_4 : \{254 ; 261 ; 280 ; 345 ; 352 ; 371 ; 472 ; 479 ; 498 ; 641 ; 648 ;$
$667 ; 858 ; 865 ; 884 ; 1129 ; 1136 ; 1155 ; 1460 ; 1467 ; 1486 ;$
$1857 ; 1864 ; 1883\}$

est l'ensemble des valeurs que peut prendre N.

Il y en a 24 différentes pour $b = 4$.

• Dans L_5, $c = 1$ ou $c = 2$ ou $c = 3$ ou $c = 4$

donc $c^3 = 1$ ou $c^3 = 8$ ou $c^3 = 27$ ou $c^3 = 64$.

$L_5 = \{467 ; 474 ; 493 ; 530 ; 594 ; 601 ; 620 ; 657 ; 763 ; 770 ;$
$789 ; 826 ; 980 ; 987 ; 1006 ; 1043 ; 1251 ; 1258 ; 1277 ; 1314 ;$
$1582 ; 1589 ; 1608 ; 1645 ; 1979 ; 1986 ; 2005 ; 2042\}$

est l'ensemble des valeurs que peut prendre N.

Il y en a 28 différentes pour $b = 5$.

• Dans $L6$, $c = 1$ ou $c = 2$ ou $c = 3$ ou $c = 4$ ou $c = 5$.

donc $c^3 = 1$ ou $c^3 = 8$ ou $c^3 = 27$ ou $c^3 = 64$ ou $c^3 = 125$

On ne note ici que les valeurs que peut prendre N telles que $N < 2025$.

$L_6 : \{776 ; 783 ; 802 ; 839 ; 900 ; 945 ; 952 ; 971 ; 1008 ;$
$1069 ; 1162 ; 1169 ; 1188 ; 1225 ; 1286 ; 1433 ; 1440 ;$
$1459 ; 1496 ; 1557 ; 1764 ; 1771 ; 1790 ; 1827 ;$ [illegible]

25 valeurs possibles pour N.

N° 3/6

On continue, on trouve 19 valeurs possibles pour N dans L_7 dont 1225 qui était déjà présente dans une des listes.

Et on trouve 6 valeurs possibles pour N dans L_8.

Au final, il y a seulement 1225 et 1790 en double.

Il y a donc :

$$10+18+24+28+25+19+6-2=128$$

valeurs de N telles que $N \leq 2025$ et $N=a^3+2b^3+c^3$ avec $a>b>c>0$.

ne rien écrire dans la partie barré

NDLR : il y a une erreur dans L_5 : le nombre 2042 ne devrait pas figurer dans l'ensemble.
La réponse est donc 127 et non 128.